D. Cenadelli, *Chandrasekhar e il limite di massa per le nane bianche*, Atti del XXV Congresso Nazionale di Storia della Fisica e dell'Astronomia, Milano, 10-12 novembre 2005, (Milano: SISFA, 2008): C05.1-C05.7.

CHANDRASEKHAR E IL LIMITE DI MASSA PER LE NANE BIANCHE

DAVIDE CENADELLI
Istituto di Fisica Generale Applicata
Università degli Studi di Milano

ABSTRACT
In questo contributo metterò in luce come Chandrasekhar sia arrivato a formulare il famoso limite di massa per le nane bianche che porta il suo nome, cercando di porre il lavoro dell'astrofisico indiano in relazione con le teorie della struttura stellare della sua epoca e concentrandomi prevalentemente sugli aspetti formali. Mostrerò come l'equazione di stato dei gas degeneri renda possibile una trattazione di tipo politropico per la struttura di equilibrio delle nane bianche, così come elaborata da Chandrasekhar, e come l'astrofisico indiano abbia individuato nel passaggio al regime relativistico il punto cruciale per il limite di massa.

1. IL BACKGROUND TEORICO: I MODELLI POLITROPICI

Chandrasekhar si occupò del problema della struttura di equilibrio delle nane bianche in una serie di lavori pubblicati tra il 1931 e il 1939.[1] Allorché lo scienziato indiano cominciò ad occuparsi del problema, poteva disporre di una solida teoria della struttura stellare sviluppata nei decenni precedenti da Ritter, Lane, Emden e, particolarmente, Eddington.[2] Volendo riassumere brevemente lo "stato dell'arte" agli inizi degli anni '30, possiamo sottolineare l'esistenza di modelli della struttura stellare di tipo politropico, via via elaborati da Lane, Ritter ed Emden, e l'esistenza del modello di stella in equilibrio interamente radiativo di Eddington che pure, secondo il suo autore, era passibile di essere trattato da un punto di vista formale come un modello politropico di indice 3. I modelli menzionati presupponevano la validità della legge dei gas perfetti.

Ricordiamo che i modelli politropici sono modelli della struttura stellare per i quali si chiude il sistema di equazioni atte a descriverla ipotizzando l'esistenza di una relazione $P = P(\rho)$ avente forma di legge di potenza. Più in dettaglio, nell'insieme delle equazioni:

$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{M(r)}{r^2}\rho(r) \qquad \text{(equilibrio idrostatico)} \qquad (1)$$

[1] Elencati in bibliografia.
[2] Su questo punto v. ad esempio Arny, Thomas (1990) e Masani, Alberto (1984): parte quarta.

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \qquad \text{(continuità della massa)} \qquad (2)$$

$$P = P_{gas} + P_{rad} = NKT + \frac{1}{3}aT^4 \qquad \text{(equazione di stato)} \qquad (3)$$

sono presenti le quattro variabili P, ρ, T, M espresse in funzione di r (si tratta rispettivamente di pressione, densità, temperatura e massa contenuta entro il raggio r). Dunque serve un'altra relazione, il che normalmente porta a introdurre un'equazione che esprime il gradiente di temperatura per irraggiamento (o una equivalente per la convezione):

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac}\frac{k\rho(r)L(r)}{4\pi r^2 T(r)^3} \qquad (4)$$

Dato che nella precedente compare L(r), ovvero la luminosità prodotta dai processi energetici attivi nella stella all'interno del raggio r, dobbiamo inserire un'altra equazione, quella della produzione di energia:

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)\varepsilon \qquad (5)$$

I termini k ed ε nelle ultime due equazioni rappresentano il coefficiente di assorbimento e il tasso di produzione di energia e sono noti dalla fisica atomica e nucleare.[3]

Un'altra possibilità di chiudere il sistema senza ricorrere alle equazioni (4) e (5) è di ipotizzare l'esistenza di qualche relazione semplice e ragionevole tra le variabili P, ρ, T, M. Tale esigenza era particolarmente sentita prima che Eddington elaborasse il proprio modello di stella radiativa perchè solo allora furono introdotte equazioni simili alle (4) e (5), in precedenza mai ricavate.[4] Una relazione semplice, e giustificabile in alcuni casi dal punto di vista fisico, ad esempio se si ammette l'esistenza di un equilibrio convettivo quasi adiabatico è:

$$P_{gas} = K\rho^{\gamma} \qquad (6)$$

ove K è una costante. Poniamo $\gamma = 1 + 1/n$, n è l'indice politropico. La (6) unita all'equazione di stato dei gas perfetti fornisce anche:

$$T \propto \rho^{1/n} \qquad (7)$$

Il metodo di Emden[5] per risolvere il sistema consiste nell'introdurre due variabili adimensionali ξ e φ legate a r e ρ e giungere all'equazione di Lane-Emden:

---

[3] O meglio lo sarebbero via via divenuti. Eddington dovette arrovellarsi parecchio circa i loro valori (a questo riguardo v. ad es. Masani *cit.*). Ciò che qui conta sottolineare è che, comunque essi siano noti, non sono variabili del sistema che stiamo considerando ma grandezze – pure dipendenti da r - da fissare sulla base di altre considerazioni.

[4] Non è rilevante in questo contesto insistere sul fatto che le equazioni utilizzate da Eddington differissero leggermente dal punto di vista formale da quelle presentate. Dal punto di vista concettuale le possiamo ritenere equivalenti.

[5] Il classico lavoro di Emden di indagine della struttura stellare tramite l'ipotesi politropica fu intitolato *Gaskügeln* e pubblicato nel 1906.

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\varphi}{d\xi}\right)=-\varphi^n \qquad (8)$$

che integrata alle differenze finite permette di dedurre $\varphi(\xi)$ ovvero $\rho(r)$ e da ρ il valore in funzione di r delle altre variabili.

In un modello di questo tipo sono presenti quattro grandezze "libere:" la massa complessiva della stella M_S, il suo raggio R_S, la densità centrale ρ_c e la costante K nella (6). Due di esse vengono fissate dalle condizioni iniziali per integrare la (8), per cui ne rimangono libere 2, che possiamo scegliere essere M_S e R_S. Questo significa che non esiste una relazione massa-raggio, ovvero le due grandezze possono variare indipendentemente: la stella può quindi evolvere cambiando il suo raggio in diversi periodi della sua vita per una data massa.[6]

2. Il Background Osservativo: la Scoperta della Nane Bianche

Nel momento in cui Chandrasekhar cominciò ad occuparsi delle nane bianche, queste rappresentavano un problema osservativo ben stabilito, anche se non percepito come fondamentale, generalmente parlando, dagli astrofisici dell'epoca. Gli anni compresi tra il 1928 e il 1932 furono quelli in cui la confluenza delle evidenze spettroscopiche da un lato, e di quelle relative alla struttura e all'equilibrio stellare sviluppate da Eddington dall'altro, portarono al dibattito sulla composizione chimica della materia stellare e alla definitiva accettazione della grande abbondanza dell'idrogeno e dell'elio.

Contribuiva al fatto che le nane bianche non fossero tra i problemi più pressanti la relativa povertà numerica delle evidenze osservative. Se infatti la scoperta indiretta della loro esistenza datava al 1844, allorché F. W. Bessel osservò l'oscillazione nei moti propri di Sirio e Procione, e la prima osservazione visuale della compagna di Sirio avvenne ad opera di A. G. Clark già nel 1862, bisogna aspettare il 1910 allorché H. N. Russell, intento a costruire il diagramma colore – luminosità, osservò il carattere eccezionale di o^2 Eridani B. Nel 1914 W. S. Adams confermò per essa la classe spettrale A, l'anno successivo poté ascrivere a tale classe spettrale anche la compagna di Sirio, e anche se nel 1924 Eddington scrisse "The white dwarfs Sirius (comes) and o^2 Eridani [...] have long presented a difficult problem,"[7] nel complesso l'astrofisico inglese dedicò poca attenzione alle nane bianche. Sostanzialmente si limitò ad osservare come esse fossero "la" categoria di stelle che non rientrava all'interno dell'ambito di validità del suo modello radiativo, a causa della eccessiva densità del gas cha evidentemente faceva venir meno la condizione di gas perfetto su cui la sua elaborazione teorica era basata.

Dal punto di vista osservativo, dunque, abbiamo la chiara individuazione di una classe di stelle dalle caratteristiche inspiegate, sebbene su di un campione numericamente molto esiguo. L'interesse degli astrofisici era nel complesso rivolto altrove, ma l'elaborazione della statistica di Fermi-Dirac (1926) portò immediatamente, come vedremo nel prossimo paragrafo, ai primi tentativi di comprensione delle strane caratteristiche di questi oggetti.

---

[6] La nota esistenza di una relazione tra massa e raggio di una stella sulla sequenza principale è dovuta al fatto che la presenza delle reazioni di fusione H $\rightarrow$ He impone un'ulteriore condizione.

[7] Eddington, Arthur S. (1924): 322.

3. L'EQUAZIONE DI STATO PER I GAS DEGENERI

Già nel 1926, R. H. Fowler in un fondamentale contributo intitolato "On Dense Matter"[8] osservò come la struttura di equilibrio delle nane bianche fosse spiegabile ammettendo che esse siano costituite di gas degenere e che la pressione fosse sostenuta dal gas di elettroni degeneri. La deduzione è giustificata dall'applicazione di una formula di degenerazione non relativistica che prevede una relazione tra pressione e densità del tipo:[9]

$$P \approx 0{,}0485 \frac{h^2}{m_e} n_e^{5/3} = K_1 \rho^{5/3} \qquad (9)$$

in cui m_e è la massa dell'elettrone[10] e n_e la densità numerica degli elettroni. Osserviamo che dal punto di vista formale la precedente è del genere di una relazione politropica di indice 3/2.

Una formula di degenerazione relativistica fu fornita negli anni successivi da W. von Anderson ed E. C. Stoner[11]. Essa assumeva la forma:

$$P \approx 0{,}123 hcn_e^{4/3} = K_2 \rho^{4/3} \qquad (10)$$

Questa è formalmente una relazione di tipo politropico di indice 3.

4. CHANDRASEKHAR E IL LIMITE DI MASSA

Come abbiamo detto, Chandrasekhar dedicò al problema un certo numero di pubblicazioni tra il 1931 e il 1939. Egli descrisse la struttura della nane bianche sfruttando dal punto di vista formale la teoria delle politropiche, proprio in virtù del fatto che le equazioni di stato assumono una forma di questo tipo. In altre parole egli riuscì a sfruttare le equazioni (1) e (2) unite alla (9) oppure (10) al posto della (3), senza nemmeno introdurre la variabile T che in un gas degenere non è definita. A differenza di un modello politropico di stella in stato di gas perfetto, incontrò un'importante ulteriore differenza: la costante di proporzionalità tra P e ρ non risultava più libera come nella (6), ma era determinata, per cui l'integrazione riduceva ad una sola le costanti libere. Questo implicava che esistesse una relazione massa-raggio. In regime non relativistico, ovvero utilizzando la (9) Chandrasekhar trovò una relazione del tipo:[12]

$$R_S \propto M_S^{-1/3} \qquad (11)$$

Tale relazione prevede che al crescere della massa il raggio lentamente si riduca ed è fisicamente convincente: il crescere della gravità porta a un raggio di equilibrio minore.

---

[8] Fowler, Ralph H. (1926).

[9] La relazione riportata non utilizza la stessa notazione di Fowler. La cosa è poco rilevante dato che in questo contributo sto seguendo lo sviluppo della teoria dal punto di vista strettamente concettuale. Lo stesso discorso vale per la formula (10). V. anche nota 4.

[10] La dipendenza della pressione dall'inverso della massa della particella giustifica l'idea che la pressione sia sostenuta dagli elettroni, laddove i protoni possono ancora trovarsi in stato di gas perfetto o comunque contribuire in maniera più trascurabile alla pressione del gas.

[11] Anderson, Wilhelm von (1929), Stoner, Edmund C. (1929) e (1930).

[12] Chandrasekhar, S. (1935a): 219.

Il risultato fondamentale ottenuto da Chandrasekhar è però un altro: egli si rese conto che al crescere della massa e al ridursi del raggio si deve instaurare ad un certo punto un regime relativistico dovuto alla velocità sempre maggiore assunta dagli elettroni nel gas degenere. In questo caso bisogna piuttosto utilizzare la (10) e Chandrasekhar dimostrò che la relazione massa raggio porta ad una massa limite – oggi nota come **Massa di Chandrasekhar** – oltre la quale non può più esistere alcuna configurazione di equilibrio. Senza seguire in dettaglio il suo ragionamento – il che richiederebbe ben altro spazio – possiamo osservare come per una stella si può dare in generale una stima approssimativa della pressione centrale idrostatica del tipo:[13]

$$P_c \approx \frac{GM_S^{\,2}}{R^4} \approx M_S^{\,2/3} \rho_{media}^{\;\;4/3} \qquad (12)$$

Se dunque vale la (10) possiamo stimare che il rapporto tra la pressione centrale e la pressione di gas degenere dipenda solo dalla massa e non dalla densità secondo una relazione del tipo:

$$\frac{P_C}{P} \approx M_S^{\,2/3} \qquad (13)$$

per cui la pressione per masse abbastanza elevate diventa effettivamente insostenibile.

Chandrasekhar stimò il valore limite di massa e ne diede la seguente espressione:

$$M_3 \approx 5{,}76 \mu_e^{-2} M_{Sole} \qquad (14)$$

ove μ_e è il perso molecolare medio, da cui dunque dipende l'esatto valore della massa limite. Dato che in generale per materia altamente ionizzata priva di idrogeno $\mu_e \approx 2$ indipendentemente dalla composizione chimica esatta, la massa limite si viene a situare intorno alle 5,76/2 = 1,44 masse solari.

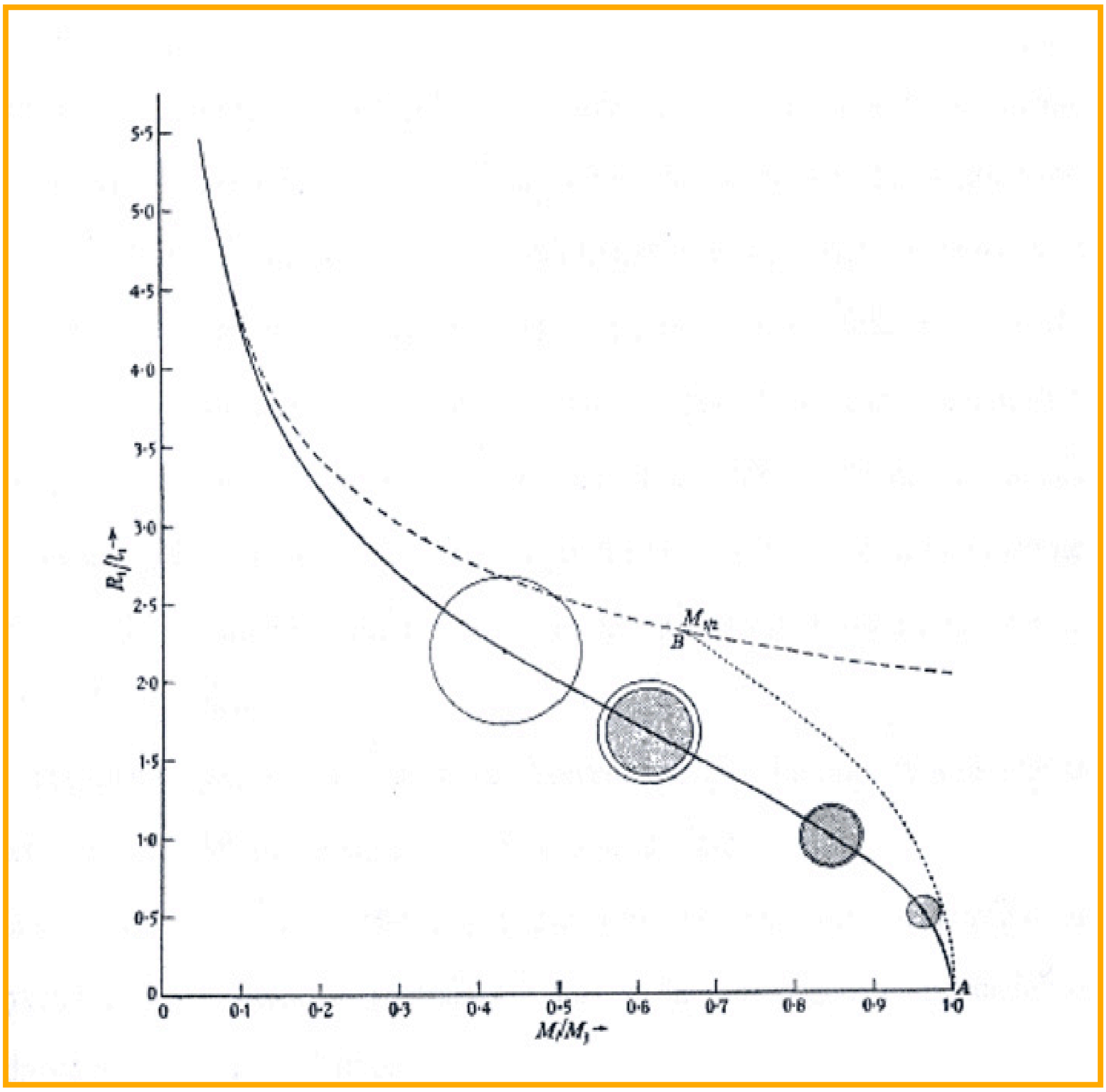
Osserviamo che Chandrasekhar chiamò M_3 la massa limite, a sottolineare che essa corrisponde ad una struttura politropica di indice 3. Egli stimò anche il valore minimo di massa – detta $M_{3/2}$ – perché si potesse instaurare una regione di gas in regime relativistico e le configurazione miste gas degenere + gas perfetto cercando di individuare una superficie di raccordo tra le due zone. Dimostrò in particolare come tale superficie dovesse essere molto vicina alla superficie esterna per le nane bianche.

L'esistenza del limite di massa fu illustrata mediante un grafico M-R.[14]

---

[13] La precedente si ottiene integrando alle differenze finite in un solo "salto" tra centro e superficie della stella l'equazione dell'equilibrio idrostatico.

[14] Chandrasekhar, S. (1935a): 219.



In figura M è in unità di M_3, R in unità di $l_1 = 7{,}72m^{-1}\times10^8$ cm.

La linea continua rappresenta la relazione reale, quella tratteggiata la relazione (11) tipica del regime non relativistico (politropica di indice 3/2). Lungo la linea continua sono mostrate alcune configurazioni: la regione scura mostra la porzione di nana bianca soggetta a regime relativistico, quella chiara a regime ordinario. Si osserva l'instaurarsi del regime relativistico in corrispondenza di una certa massa e il suo crescere con la massa.

BIBLIOGRAFIA

Anderson, Wilhelm von (1929). "Über die Grenzdichte der Materie und der Energie", *Zeitschrift für Physik*, 1929 *56*: 851-856.

Arny, Thomas (1990). "The Star Makers: A History of the Theories of Stellar Structure and Evolution", *Vistas in Astronomy*, 1990, *33*: 211-233;

Chandrasekhar, Subrahmanyan (1931a). "The maximum mass of ideal white dwarfs", *Astrophysical Journal*, 1931, *74*: 81-82.

Chandrasekhar, Subrahmanyan (1931b). “The highly collapsed configuration of a stellar mass”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1931, *91*: 456-466.
Chandrasekhar, Subrahmanyan (1931c). “The stellar coefficients of absorption and opacity”, *Philosophical Magazine*, 1931, *11*: 592-596.
Chandrasekhar, Subrahmanyan (1932). “Some remarks on the state of matter in the interior of the stars”, *Zeitschrift für Astrophysik*, 1932, *5*: 321-327.
Chandrasekhar, Subrahmanyan (1934). “The physical state of matter in the interior of the stars”, *Observatory*, 1934, *57*: 93-99.
Chandrasekhar, Subrahmanyan (1935a). “The highly collapsed configuration of a stellar mass (second paper)”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1935, *95*: 207-225.
Chandrasekhar, Subrahmanyan (1935b). “Stellar configurations with degenerate cores”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1935, *95*: 226-259.
Chandrasekhar, Subrahmanyan (1935c). “Stellar configurations with degenerate cores (second paper)”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1935, *95*: 676-693.
Chandrasekhar, Subrahmanyan (1939). “An introduction to the study of stellar structure” (Chicago: University Of Chicago Press, 1939).
Eddington, Arthur S. (1924). “On the Relation between the Masses and Luminosities of the Stars”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1924, *84*: 308-332.
Fowler, Ralph H. (1926). “On Dense Matter”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1926, *87*: 114-122.
Masani, Alberto (1984). *Astrofisica* (Roma: Editori Riuniti, 1986).
Stoner, Edmund C. (1929). “On the Limiting Density in White Dwarf Stars”, *Philosophical Magazine*, 1929, *7*: 63-70.
Stoner, Edmund C. (1930). “The Equilibrium of Dense Stars”, *Philosophical Magazine*, 1930, *9*: 944-963.