

STRUTTURE LOGICO-MATEMATICHE IN MECCANICA QUANTISTICA: DA J. VON NEUMANN A J. BELL

E. G. BELTRAMETTI

Dipartimento di Fisica, Università di Genova;
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Genova,
via Dodecaneso 33, I-16146 Genova, Italy

1. Introduzione

L'edificio matematico della meccanica quantistica, come viene configurandosi negli anni '30, appare coerente, autoconsistente, ma piuttosto complesso. Motivare, dedurre, spiegare questo complesso edificio a partire da sottostrutture logico-matematiche più semplici, più elementari e fisicamente motivate, appare essere l'idea che ha guidato gli studi sui fondamenti matematici della meccanica quantistica, dal celebre lavoro di G. Birkhoff e J. von Neumann [1] del 1936, agli sviluppi degli anni sessanta e settanta, fino a risultati recenti.

Nel seguito ci riferiremo prevalentemente all'aspetto statico della descrizione quantistica, evidenziando analogie e divaricazioni rispetto al caso classico; gli aspetti dinamici e di evoluzione temporale resteranno a margine.

L'insieme degli oggetti, o sistemi fisici che sono propriamente descritti dalla meccanica quantistica è distinto dall'insieme dei sistemi fisici descritti dalla meccanica classica ma in generale ogni oggetto del campionario classico appare pensabile come composto di oggetti del campionario quantistico. Il perché mettendo insieme oggetti quantistici (atomi ad esempio) si possa finire in un oggetto classico non ha ancora trovato una risposta completa e definitiva: la transizione tra il comportamento quantistico e quello classico mantiene aspetti problematici.

La nozione di oggetto o sistema fisico non è priva di qualche ambiguità e richiede un qualche grado di idealizzazione. Occorre immaginare, ad esempio, che l'interazione del sistema fisico in questione con l'ambiente circostante, e con l'osservatore in particolare, non ne metta in discussione l'identità. Tale nozione *funziona* senza sostanziale equivocità sia nella meccanica classica che in quella quantistica elementare, dove i processi di creazione e distruzione non sono di primaria importanza.

Vi sono alcuni ingredienti familiari nella descrizione di un sistema fisico, sia esso classico o quantistico. Uno di questi è il concetto di stato del

sistema: esso riassume le informazioni relative alla preparazione del sistema stesso ed incorpora gli attributi "accidentali", o variabili nel tempo (ad esempio la posizione o la velocità se il sistema è libero di muoversi). Naturalmente il confine tra "accidentale" e "sostanziale" ha carattere parzialmente convenzionale: è un confine che dipende dai contesti considerati e dallo sviluppo storico delle conoscenze.

Un altro ingrediente cruciale è la nozione di osservabile, intendendosi con tale espressione una generica quantità fisica, pertinente all'oggetto in questione, che possa essere misurata, o osservata. La specificazione di un'osservabile porta con sé anche l'indicazione dei possibili valori che essa potrà assumere: ogni stato del sistema fisico determinerà dunque una distribuzione di probabilità sullo spazio dei possibili valori (eventualmente concentrata su un solo valore). In molti esempi di osservabili lo spazio dei valori è la retta \mathbf{R} dei numeri reali, ancorché dal punto di vista delle misurazioni il campo dei numeri razionali sarebbe ampiamente sufficiente; ma potranno anche darsi osservabili di natura "vettoriale", o osservabili congiunte per le quali lo spazio dei valori sarà piuttosto \mathbf{R}^n , con n intero.

Si osservi che la coppia formata da un'osservabile A e da un sottoinsieme X del suo spazio dei valori individua la domanda "il valore di A cade in X ?" Siamo di fronte ad una domanda che ammette due sole risposte: sì o no. Non si deve naturalmente intendere che, fissato lo stato del sistema, la risposta debba essere sicuramente sì o sicuramente no: ciascuna delle due risposte potrà avere una probabilità di presentarsi in ogni singolo atto di misura. La coppia (A, X) porta dunque con sé una nozione di dicotomia e diremo che essa rappresenta un *evento*.

Stati, osservabili ed eventi sono elementi basilari nella costruzione di una "meccanica", sia essa classica o quantistica. Tali elementi sono tra loro interconnessi sicché lo studio dei fondamenti matematici di una teoria fisica non attribuirà a ciascuno di essi il ruolo di elementi primitivi. Quando si adottano gli stati del sistema fisico come elementi primitivi, mediante i quali definire osservabili ed eventi, si approda ai cosiddetti approcci "convessi", dove l'oggettivazione fa riferimento al fatto che la struttura basilare dell'insieme degli stati è appunto la convessità, come avremo occasione di osservare più avanti; in tal caso l'attenzione si focalizza sulla struttura probabilistica, giacché gli stati determinano appunto misure di probabilità sugli eventi. Quando il ruolo di elementi primitivi viene invece affidato alle osservabili si parla piuttosto di approcci algebrici, giacché è la struttura di algebra che in tal caso viene naturalmente chiamata in causa. Infine, quando sono gli eventi a giocare il ruolo di elementi primitivi si rientra nel cosiddetto approccio logico, che trae il nome dal ruolo centrale giocato da

eventi, o proposizioni, nella logica matematica. Ci soffermeremo in particolare su alcuni aspetti ed alcune tappe di tale approccio: per un approfondimento dei temi che verranno toccati si rinvia, ad esempio, alla voce [2] della bibliografia.

2. Le algebre Booleane del caso classico

Nello schema classico il sistema fisico in esame individua un insieme (uno spazio misurabile) Ω generalmente chiamato lo "spazio delle fasi" del sistema. Gli stati sono quindi identificati con le misure di probabilità su Ω , più precisamente con le misure di probabilità sulla famiglia $B(\Omega)$ dei sottoinsiemi (misurabili) di Ω . Indicheremo con $M_1^+(\Omega)$ l'insieme da esse formato. Le misure di probabilità concentrate in un punto di Ω , le cosiddette misure di Dirac, rappresentano preparazioni del sistema massimamente selettive e corrispondono agli *stati puri*. Possiamo dunque dire che Ω è (in corrispondenza biunivoca con) l'insieme degli stati puri del sistema. $M_1^+(\Omega)$ è un insieme convesso dal momento che la combinazione convessa di due (o più) misure di probabilità è ancora una misura di probabilità. Si ricordi che l'espressione "combinazione convessa" indica una combinazione lineare a coefficienti positivi aventi somma uguale ad 1. La famiglia degli stati puri coincide con l'insieme degli elementi estremi dell'insieme convesso $M_1^+(\Omega)$: essa è sufficientemente "ricca" da consentire di esprimere qualunque stato non puro come combinazione convessa, o miscuglio, di stati puri. La definizione stessa di $M_1^+(\Omega)$ assicura poi che la decomposizione di uno stato non puro in stati puri è unica: in altre parole l'insieme convesso degli stati è un simpleso. Questa proprietà individua una delle caratteristiche peculiari della descrizione classica.

Le osservabili classiche, o variabili casuali nella terminologia della meccanica statistica classica, sono una particolare famiglia di applicazioni affini dall'insieme convesso degli stati all'insieme delle misure di probabilità sullo spazio dei valori dell'osservabile in questione: se \mathbf{R}^n è lo spazio dei valori dell'osservabile A allora essa è rappresentata da un'applicazione affine $M_1^+(\Omega) \rightarrow M_1^+(\mathbf{R}^n)$ che manda misure di Dirac su Ω in misure di Dirac su \mathbf{R}^n . L'osservabile A determina dunque una funzione $f_A : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ che a sua volta determina univocamente l'osservabile. Se il sistema è nello stato $\mu \in M_1^+(\Omega)$ e se X è un sottoinsieme di \mathbf{R}^n la probabilità che la misura di A dia un risultato in X sarà $\mu(f_A^{-1}(X))$. Si osservi che la richiesta di mandare

misure di Dirac su Ω (stati puri) in misure di Dirac sullo spazio dei valori traduce il contesto deterministico della meccanica classica: quando l'informazione sulla preparazione del sistema è massimale (ossia quando il sistema è in uno stato puro) allora ogni osservabile ha un valore ben determinato.

Appare chiaro da quanto sopra che l'evento (A, X) individuato dall'osservabile A e dal sottoinsieme X dello spazio dei valori di A determina il, ed è determinato dal, sottoinsieme $f_A^{-1}(X)$ di Ω . Gli eventi sono dunque in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $B(\Omega)$. Indicheremo tali elementi con a, b, \dots . La probabilità che si verifichi l'evento $a \in B(\Omega)$ quando il sistema è nello stato $\mu \in M_1^+(\Omega)$ è $\mu(a)$.

L'insieme $B(\Omega)$ degli eventi di un sistema classico ha la struttura di algebra Booleana. Con ciò si intende che:

(i) è definita in $B(\Omega)$ una nozione d'ordine, convenendo che l'evento a è "minore" dell'evento b se a è insiemisticamente contenuto in b . Ciò equivale a dire che, per ogni stato del sistema, la probabilità che si verifichi a è minore della probabilità che si verifichi b . Si tratta naturalmente di una relazione d'ordine parziale poiché potranno presentarsi coppie di eventi che non appartengono alla relazione d'ordine così definita. Rispetto a tale ordinamento il sottoinsieme vuoto di Ω ed Ω stesso rappresentano due eventi estremi e fisicamente banali: il primo è l'evento minore di ogni altro, quello che non si verifica mai, che indicheremo con $\mathbf{0}$, mentre il secondo è l'evento maggiore di ogni altro, quello che si verifica sempre, che indicheremo con $\mathbf{1}$.

(ii) Ogni famiglia di eventi ammette sempre un estremo inferiore, rappresentato dall'intersezione insiemistica degli eventi considerati, ed un estremo superiore, rappresentato dall'unione insiemistica. Questo fatto viene riassunto dicendo che gli eventi formano un reticolo completo.

(iii) Ogni evento a ammette un complemento a' , rappresentato dal complemento insiemistico, con le proprietà $a \cap a' = \mathbf{0}$, $a \cup a' = \mathbf{1}$, $a \leq b \Rightarrow b' \leq a'$.

(iv) L'estremo inferiore e l'estremo superiore sono reciprocamente distributivi, ossia:

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c), \quad a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c). \quad (1)$$

Questa struttura di algebra Booleana costituisce la base della meccanica statistica classica e la base della teoria della probabilità classica. È importante osservare che la struttura di algebra Booleana non solo modella l'insieme degli eventi dei sistemi fisici classici ma offre anche il

modello algebrico della logica classica, più specificamente del calcolo proposizionale classico. Invero, le proposizioni A, B, C, \dots del linguaggio comune possono essere associate ad elementi a, b, c, \dots di un'algebra Booleana in modo tale che i connettivi logici trovino una rappresentazione in termini di operazioni nell'algebra in questione. Così, ad esempio, la congiunzione $A \text{ e } B$ corrisponderà all'elemento $a \cap b$, la disgiunzione $A \text{ o } B$ corrisponderà all'elemento $a \cup b$, la negazione di A all'elemento a' , l'implicazione $A \Rightarrow B$ all'elemento $a' \cup b$, eccetera.

Il fatto che le algebre Booleane sono ad un tempo il modello algebrico dell'insieme degli eventi dei sistemi fisici classici ed il modello algebrico della logica classica riveste un carattere semplificante e, per certi versi, rassicurante. Tale fatto non osta all'idea che la logica abbia un'origine empirica, piuttosto che essere un dato a priori: l'esperienza accumulatasi dall'osservazione dei sistemi fisici classici induce un modello algebrico che a sua volta determina la logica del linguaggio comune. Ma, come vedremo, gli eventi di un sistema fisico quantistico non ammettono le algebre Booleane come modello algebrico: il quadro sopra detto deve quindi essere riconsiderato.

3. I reticoli ortomodulari del caso quantistico

Si ricordi che nella formulazione standard della meccanica quantistica viene associato al sistema fisico in questione uno spazio di Hilbert H (separabile e sul campo complesso): gli stati del sistema sono rappresentati dagli operatori densità ρ di H e gli stati puri corrispondono ai proiettori unidimensionali ovvero ai sottospazi unidimensionali di H , le osservabili a valori nel campo reale sono rappresentate da operatori autoaggiunti e le osservabili dicotome, ossia gli eventi, corrispondono ai proiettori di H . La struttura algebrica dell'insieme degli eventi è dunque la struttura dell'insieme $L(H)$ dei proiettori. Scriveremo a, b, \dots per denotare gli eventi e P_a, P_b, \dots per i corrispondenti proiettori.

(i) In $L(H)$ è definita una naturale nozione di ordinamento parziale: dati due proiettori P_a, P_b , ed indicando con H_a e H_b i sottospazi (chiusi) di H su cui essi proiettano, diremo che $P_a \leq P_b$, o semplicemente che $a \leq b$, se $H_a \subseteq H_b$. Indicheremo ancora con $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ gli eventi banali rappresentati rispettivamente dal proiettore nullo e dall'identità.

(ii) L'estremo inferiore $P_a \wedge P_b$ è il proiettore sull'intersezione $H_a \cap H_b$ (che è un sottospazio chiuso di H), mentre l'estremo superiore $P_a \vee P_b$ è il proiettore sulla chiusura dell'unione $H_a \cup H_b$ (giacché tale unione non è in

generale un sottospazio chiuso di H). Quando ci riferiremo agli eventi piuttosto che ai corrispondenti proiettori scriveremo $a \wedge b$ e $a \vee b$ per indicarne l'estremo inferiore e superiore. Queste definizioni possono essere generalizzate in modo ovvio all'estremo inferiore e superiore di una generica famiglia di eventi. $L(H)$ assume così la struttura di *reticolo completo*.

(iii) L'applicazione $a \rightarrow a'$ definita da $P_{a'} = I - P_a$ (dove I rappresenta l'identità) ha le proprietà di un ortocomplemento: infatti essa è tale che $a'' = a$, $a \leq b \Rightarrow b' \leq a'$, $a \wedge a' = \mathbf{0}$.

(iv) La divaricazione fondamentale tra il caso classico e quello quantistico è rappresentata dal fatto che la reciproca distributività dell'estremo inferiore e superiore, tipica del caso classico, viene meno nel reticolo $L(H)$: infatti la proprietà

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

risulta soddisfatta soltanto per particolari triple di eventi, ossia quando $a \leq b$ e $c = a'$.

Questa divaricazione tra il comportamento classico e quello quantistico venne messa in luce fin dal 1936 nel citato articolo di G. Birkhoff e J. von Neumann [1] dal titolo *The Logic of Quantum Mechanics*: essa è alla base di una lunga sequenza di studi che riguardano non solo i fondamenti della meccanica quantistica, ma anche sviluppi più propriamente matematici e logici.

Le proprietà sopra richiamate qualificano l'insieme $L(H)$ degli eventi relativi ad un sistema quantistico come *reticolo ortomodulare*. Si osservi che la teoria dei reticoli ortomodulari rientra nel grande albero genealogico che ha le algebre di von Neumann come teoria madre, le *geometrie continue* di von Neumann come "figlio primogenito", ed appunto i reticoli ortomodulari come sbocco successivo.

Un elemento di un reticolo che sia una maggiorazione minimale dell'elemento $\mathbf{0}$ viene chiamato "atomo" ed il reticolo è detto "atomistico" se ogni elemento non nullo è l'estremo superiore degli atomi che esso contiene. Se poi l'estremo superiore di un generico elemento a del reticolo e di un atomo non contenuto in a è una maggiorazione minimale di a allora si dice che il reticolo possiede la proprietà di ricoprimento. Il reticolo $L(H)$ degli eventi quantistici è atomistico (gli atomi sono i proiettori unidimensionali) ed ha la proprietà di ricoprimento. Si noti che anche l'algebra Booleana degli eventi classici è atomistica (gli atomi sono i sottoinsiemi di Ω che contengono un solo punto) ed ha la proprietà di ricoprimento.

Come ricordato nel precedente paragrafo, gli eventi relativi a sistemi classici formano algebre Booleane le quali sono i modelli algebrici della logica classica: sorge allora la domanda di quale logica non classica i reticoli ortomodulari, generati dagli eventi di sistemi quantistici, siano i modelli algebrici. Appare naturale battezzare *logica quantistica* quella logica che ammette i reticoli ortomodulari come modelli algebrici, ma complessa e non ovvia è la successiva domanda di quale possa essere il ruolo di tale nuova logica. è questo un tema che ha suscitato una vasta serie di studi e risultati: il darne conto esula dai propositi di questo scritto. Ci limitiamo ad elencare alcune domande che di tali studi hanno formato oggetto:

Se la logica è empirica e trae i suoi fondamenti dal comportamento dei sistemi fisici, allora la logica quantistica dovrebbe essere più fondamentale della logica classica, visto che la meccanica quantistica ha per molti versi un ruolo più fondamentale della meccanica classica?

Ma come è possibile che la meccanica quantistica, la cui formulazione usa la logica classica, dia luogo ad una logica diversa? Qual' è la relazione fra logica classica e logica quantistica? La prima è la metalogica della seconda?

Se alla logica quantistica si riconosce un ruolo più fondamentale, come spiegare il fatto che la matematica è basata sulla logica classica? La logica quantistica si riduce a quella classica se ristretta alle proposizioni che formano oggetto della matematica?

Se la logica è invece un dato *a priori*, non derivato dall'esperienza, vi sono approcci alla logica quantistica che non si riducano a *leggerla* dalla meccanica quantistica?

4. La "ricostruzione" dell'edificio matematico della meccanica quantistica

La ricca fioritura di studi sui fondamenti matematici della meccanica quantistica, a partire dal citato lavoro di Birkhoff e von Neumann, comprende un certo numero di opere che offrono punti di riferimento: tra queste ricordiamo quelle di J. von Neumann del 1932 [3], di G. Mackey del 1963 [4], di J. Jauch del 1968 [5], di V.S. Varadarajan del 1968 e del 1985 [6], di G. Ludwig del 1954 [7], di C. Piron del 1976 [8], oltre al già citato riferimento [2].

In questo paragrafo ricordiamo un rilevante problema che ha ricevuto grande attenzione: quello della *ricostruzione* del complesso edificio matematico della meccanica quantistica a partire dalla più semplice struttura algebrica degli eventi. Più specificamente, consideriamo la seguente

domanda: se adottiamo gli eventi come elementi primitivi e se postuliamo per essi la struttura (astrattamente definita) di reticolo ortomodulare, atomistico, con la proprietà di ricoprimento, siamo in grado di dedurre che tale reticolo è isomorfo al reticolo dei proiettori di un opportuno spazio di Hilbert? In altre parole, possiamo ritenere che il complesso edificio matematico della meccanica quantistica sia ricostruibile a partire dalla più semplice struttura ordinata degli eventi? Un primo significativo assestamento del problema si è configurato negli anni '70, grazie al convergere di vari contributi.

Per riassumere i risultati in questione occorre premettere qualche definizione.

Un campo numerico K (non necessariamente commutativo) è detto involutivo se esiste un'applicazione $\lambda \rightarrow \lambda^*$ di K in K tale che, per ogni $\lambda, v \in K$,

$$(\lambda + v)^* = \lambda^* + v^*, (\lambda v)^* = v^* \lambda^*, \lambda = \lambda^{**}.$$

Uno spazio vettoriale V su un campo involutivo K è detto Hermitiano se esiste una funzione $h : V \times V \rightarrow K$ tale che, per ogni $v, w, v_i, w_i \in V$ ed ogni $\lambda, v \in K$,

$$h(\lambda v_1 + v v_2, w) = \lambda h(v_1, w) + v h(v_2, w),$$

$$h(v, \lambda w_1 + v w_2) = h(v, w_1) \lambda^* + h(v, w_2) v^*,$$

$$h(v, w) = (h(w, v))^*,$$

$$h(v, v) = 0 \text{ se e solo se } v = 0.$$

La funzione h viene anche chiamata "forma Hermitiana".

Dato un sottospazio L di V definiamo

$$L^\circ = \{v \in V \mid h(v, w) = 0 \text{ per ogni } w \in L\}$$

e diciamo che L è chiuso, rispetto alla forma Hermitiana h , se $L = L^{\circ\circ}$.

Il problema della rappresentabilità della struttura ordinata (astrattamente definita) degli eventi mediante sottospazi di uno spazio vettoriale può essere riassunta dal seguente notevole e profondo risultato:

(A) Se L è un reticolo completo, ortocomplementato, atomistico, con la proprietà di ricoprimento, allora esiste uno spazio vettoriale V su un campo

numerico involutivo K ed una forma Hermitiana $h : V \times V \rightarrow K$ tali che L è isomorfo al reticolo dei sottospazi chiusi di V (ordinato mediante l'inclusione insiemistica dei sottospazi ed ortocomplementato mediante l'applicazione $L \rightarrow L'$).

Il raggiungimento di tale risultato è piuttosto complesso e non tenteremo di riassumerne la dimostrazione, per la quale si rinvia al riferimento bibliografico [2] (dove sono anche precisati alcuni dettagli tecnici omessi nella formulazione precedente).

Un buon tratto della marcia di avvicinamento all'edificio matematico usuale della meccanica quantistica risulta coperto dal risultato sopra menzionato, ma un ulteriore tratto resta da percorrere: occorrerebbe infatti che V fosse non solo uno spazio Hermitiano ma che esso assumesse la più stringente struttura di spazio di Hilbert (in altre parole la forma Hermitiana h dovrebbe diventare un "prodotto scalare") e occorrerebbe che il campo numerico K uscisse dal limbo di un generico campo involutivo per concretizzarsi nel campo dei numeri complessi. Si noti che il precedente risultato non richiede l'ortomodularità del reticolo L , laddove tale proprietà risulta essere un attributo fisicamente naturale per l'insieme degli eventi, come mostrato ad esempio dall'approccio assiomatico di G.Mackey [4]. Si affaccia dunque spontaneamente la domanda se l'ortomodularità di L possa farci percorrere il tratto di strada mancante ed arrivare così al desiderato spazio di Hilbert. Naturalmente non potremmo sperare che l'ortomodularità di L costringa K a diventare il campo \mathbf{C} dei numeri complessi essendo ben noto che anche i reticoli dei proiettori di spazi di Hilbert sul campo \mathbf{R} dei reali o sul campo \mathbf{Q} dei quaternioni (che insieme ai complessi formano i completamenti "Archimedei" dei razionali) sono ortomodulari, ma l'approdo a $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}$ sarebbe sostanzialmente soddisfacente giacché sono state studiate le possibilità di traduzione della meccanica quantistica su spazi di Hilbert reali o quaternionici.

Per un certo tempo ebbe qualche credito la congettura che l'ortomodularità fosse sufficiente a raggiungere la struttura Hilbertiana desiderata, finché nel 1980 H.Keller [9] pose fine a tale ipotesi: egli fornì infatti una controprova mostrando la possibilità di costruire spazi di Hilbert su campi non classici (diversi da $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}$) i cui proiettori formavano ancora reticoli ortomodulari.

Un brillante criterio per compiere il passo mancante è stato dimostrato da M.P. Soler (una ricercatrice della scuola di Zurigo) nel 1995. Grazie a tale risultato [10] possiamo infatti completare il risultato (A) sopra riportato con la seguente aggiunta:

(B) Se L è anche ortomodulare e se lo spazio vettoriale V possiede una sequenza ortonormale infinita di elementi, allora K è necessariamente $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}$, la forma hermitiana h diventa un prodotto scalare e V è uno spazio di Hilbert.

I risultati (A) e (B) compendiano il lungo e difficile percorso di ricostruzione del formalismo Hilbertiano della meccanica quantistica a partire dall'ipotesi di struttura ordinata degli eventi.

5. Probabilità classiche e quantistiche

L'attenzione agli eventi focalizza la divaricazione tra le algebre Booleane del caso classico ed i reticoli ortomodulari non distributivi del caso quantistico: dunque la divaricazione tra la "logica classica" e la "logica quantistica".

Spostando l'attenzione alle misure di probabilità sull'insieme degli eventi si focalizza invece la divaricazione fra le probabilità classiche e quelle quantistiche. Si ricordi che, sia nel caso classico che in quello quantistico, le misure di probabilità sull'insieme degli eventi corrispondono a stati del sistema fisico in questione: la corrispondenza è sempre biunivoca nel caso classico, mentre nel caso quantistico, grazie ad un celebre teorema di Gleason, la corrispondenza è biunivoca purché la dimensione dello spazio di Hilbert sia strettamente maggiore di 2.

Il fatto che la struttura probabilistica insita nella teoria quantistica contenga aspetti non classici è stato ampiamente studiato nella letteratura. Spesso i fenomeni quantistici non si accordano con la teoria standard, o Kolmogoroviana, della probabilità: si pensi ad esempio ai fenomeni di interferenza quantistica o alle violazioni delle diseuguaglianze di Bell. Nel seguito supporremo che, dato un sistema fisico in un determinato stato, si misurino le probabilità che vari eventi si verifichino, nonché le probabilità che alcuni di questi si verifichino congiuntamente. Nasce allora spontaneo il problema di avere criteri per decidere se un dato insieme di probabilità empiricamente osservate si conformi al contesto classico (ossia le probabilità empiriche sono riconducibili ad una misura di probabilità su un'algebra Booleana) oppure a quello quantistico (ossia le probabilità empiriche sono riconducibili ad una misura di probabilità su un reticolo ortomodulare non distributivo del tipo $L(H)$). Si tratta di un problema non semplice che commenteremo brevemente in questo paragrafo: vari risultati hanno indicato criteri per separare il caso classico da quello non classico, mentre più complesso appare il proposito di separare il caso genuinamente quantistico da un generico contesto non classico.

Storicamente, merita menzione un metodo assai generale studiato da Boole [11] nel 1862 per determinare condizioni necessarie e sufficienti per la rappresentabilità classica di una generica famiglia di probabilità empiriche: Boole parlava di *conditions of possible experience*, non essendo ancora in vista la fenomenologia quantistica. L'attenzione al problema della rappresentabilità classica o quantistica di probabilità empiriche divenne poi molto vivo dopo il lavoro di Bell sull'interpretabilità in termini di *teorie a variabili nascoste* della nota correlazione che forma oggetto del cosiddetto paradosso di Einstein-Podolsky-Rosen (EPR). Citiamo in particolare il rilevante *polytope approach* proposto da Pitowski nel 1989 [12].

Sia l'approccio di Boole che quello di Pitowski presentano una complessità esponenziale, nel senso che il numero di condizioni necessarie e sufficienti per la rappresentabilità classica di un dato insieme di probabilità empiriche cresce esponenzialmente con il numero di eventi a cui tali probabilità si riferiscono. Consideriamo ad esempio la citata correlazione EPR in cui un sistema fisico decade in due particelle a e b di spin- $1/2$, indichiamo con p_1, p_2 le probabilità che la particella a passi un filtro polarizzatore orientato lungo le direzioni 1, 2, con p_3, p_4 le probabilità che la particella b passi un filtro polarizzatore orientato lungo le direzioni 3, 4, e con $p_{1,3}, p_{1,4}, p_{2,3}, p_{2,4}$ le probabilità congiunte che entrambe le particelle passino i filtri corrispondenti: in tal caso il numero di condizioni necessarie e sufficienti per la rappresentabilità classica di tale insieme di probabilità è 88 (incluse alcune condizioni banali). Ma se passiamo all'esempio di un sistema fisico che decade in tre particelle di spin- $1/2$, e consideriamo la analoga famiglia di probabilità singole e congiunte di passare filtri polarizzatori allora il numero di condizioni necessarie e sufficienti per la rappresentabilità classica diventa 51676.

Le precedenti osservazioni rendono interessante la ricerca di regole più semplici che forniscano condizioni necessarie (eventualmente non sufficienti) per la rappresentabilità classica. Riassumeremo qui una di tali regole.

Consideriamo n eventi e siano p_1, p_2, \dots, p_n , le probabilità empiriche che ciascuno di tali eventi si verifichi. Supponiamo che anche le probabilità congiunte di alcuni eventi vengano osservate, cosicché la famiglia delle probabilità osservate assumerà la forma $\{p_T \mid T \in F\}$ dove F è una collezione di sottoinsiemi di $\{1, 2, \dots, n\}$. Ad esempio, nel contesto EPR ricordato sopra avremmo $n = 4$ ed F diventa la famiglia $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}$. Vale allora il seguente risultato [13,14]: la disuguaglianza

$$0 \leq \sum_{T \in F} c_T p_T \leq 1, \quad (2)$$

nella quale i coefficienti c_T sono numeri reali tali che,

$$0 \leq \sum_{T \subseteq S} c_T \leq 1 \quad \text{per ogni } S \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \quad (3)$$

è una condizione necessaria per la rappresentabilità classica della famiglia di probabilità $\{p_T \mid T \in F\}$.

Riprendendo l'esempio del contesto EPR è immediato verificare che la diseuguaglianza

$$0 \leq p_1 + p_3 - p_{1,3} - p_{1,4} - p_{2,3} + p_{2,4} \leq 1 \quad (4)$$

è caratterizzata da coefficienti che soddisfano l'Eq.(3) ed è pertanto una condizione necessaria per la rappresentabilità classica: essa corrisponde invero ad una delle possibili forme in cui esprimere le *diseguaglianze di Bell*.

La condizione di rappresentabilità classica sopra menzionata ammette interpretazioni alternative. Dati gli n eventi precedentemente considerati indichiamo con ξ_i, η_i i due possibili valori dell' i -esimo evento (convenendo che il valore ξ_i corrisponda al verificarsi dell'evento stesso). Si noti che ogni stato del sistema fisico considerato determina una misura di probabilità μ_i sullo spazio

$\{\xi_i, \eta_i\}$. Indichiamo poi con $\mu_{i,j}$ la misura di probabilità congiunta sullo spazio $\{(\xi_i, \xi_j), (\xi_i, \eta_j), (\eta_i, \xi_j), (\eta_i, \eta_j)\}$ determinata dallo stato in questione, e similmente per misure di probabilità congiunte che coinvolgano più di due eventi. Rispetto alla notazione considerata più sopra avremo $\mu_i(\xi_i) = p_i$, $\mu_{i,j}(\xi_i, \xi_j) = p_{i,j}$.

Data una famiglia di misure di probabilità $\{\mu_T \mid T \in F\}$ dove F è una collezione di sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$ diciamo che essa ammette un elemento generatore se esiste, sullo spazio $\{(\xi_1, \dots, \xi_n), (\eta_1, \dots, \eta_n)\}$ (contenente 2^n elementi), una misura di probabilità $\mu_{\{1, \dots, n\}}$ che generi la famiglia data mediante il meccanismo della proiezione marginale. Vale allora il seguente risultato [15]: condizione necessaria per la rappresentabilità classica della famiglia $\{\mu_T \mid T \in F\}$ è l'esistenza dell'elemento generatore.

Riprendendo l'esempio EPR, con la famiglia $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_{1,3}, \mu_{1,4}, \mu_{2,3}, \mu_{2,4}\}$ di misure di probabilità, è facile [15] vedere che l'esistenza di un elemento generatore $\mu_{1,2,3,4}$ implica (tra altre) la disuguaglianza

$$0 \leq \mu_1(\xi_1) + \mu_3(\xi_3) - \mu_{1,3}(\xi_1, \xi_3) - \mu_{1,4}(\xi_1, \xi_4) - \mu_{2,3}(\xi_2, \xi_3) + \mu_{2,4}(\xi_2, \xi_4) \leq 1$$

che riproduce con diversa notazione la (4), ossia una disuguaglianza di Bell. Una violazione di tale disuguaglianza esclude l'esistenza dell'elemento generatore e dunque la rappresentabilità classica.

Il fatto matematico messo in luce da Bell [16] è esprimibile dicendo che nell'ambito quantistico esistono famiglie di misure di probabilità (prodotte da uno stesso stato del sistema fisico) che non ammettono un elemento generatore. Tale situazione è invece impossibile in ambito classico.

Nella letteratura sulle disuguaglianze di Bell è ampiamente condivisa l'opinione che un requisito di *località* stia alla base di tali disuguaglianze, cosicché una loro violazione implicherebbe anche una non-località della teoria sottostante. Può dunque apparire sorprendente che nella discussione su criteri di rappresentabilità classica esaminati in questo paragrafo la nozione di località non intervenga in alcun modo. Si osservi in merito che nell'esempio EPR i termini $\mu_{1,3}(\xi_1, \xi_3)$, $\mu_{1,4}(\xi_1, \xi_4)$, $\mu_{2,3}(\xi_2, \xi_3)$, $\mu_{2,4}(\xi_2, \xi_4)$ rappresentano probabilità condizionate da diversi contesti sperimentali: il primo termine corrisponde ad una misura in cui la particella *a* attraversa un filtro polarizzatore orientato lungo la direzione 1 e la particella *b* attraversa un filtro orientato nella direzione 3, laddove il secondo termine presuppone che la particella *b* sia inviata su un filtro orientato nella direzione 4 (e similmente per gli altri termini). Non vi è dunque alcuna necessità logica che esse siano rappresentabili in uno stesso spazio di probabilità classico; in altre parole non vi è necessità logica che la famiglia di misure di probabilità considerata ammetta un elemento generatore. Quando ci si pone nel contesto delle *teorie a variabili nascoste* il tema della località emerge peraltro come naturale argomento a favore del fatto che la famiglia di misure di probabilità in gioco ammetta un elemento generatore.

Bibliografia

- [1] G. Birkhoff e J. von Neumann, *Ann. Math.* 37, 823 (1936)
- [2] E.G. Beltrametti and G. Cassinelli, *The Logic of Quantum Mechanics*, Addison-Wesley (Reading, Mass.) 1981
- [3] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer (Berlin) 1932; *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, (Princeton) 1955

- [4] G.W. Mackey, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press (Princeton, N.J.) 1955
- [5] J.M. Jauch, *Foundations of Quantum Mechanics*, Addison-Wesley (Reading, Mass.) 1968
- [6] V.S. Varadarajan, *Geometry of Quantum Theory*, Springer (Berlin, Heidelberg, New York) 1968 (1a edizione), 1985 (2a edizione)
- [7] G. Ludwig, *Die Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer (Berlin) 1954; *Foundations of Quantum Mechanics*, Springer (Berlin) 1983
- [8] C. Piron *Foundations of Quantum Physics*, Benjamin (Reading, Mass.) 1976
- [9] H.A. Keller, *Math. Z.* 172, 41 (1980)
- [10] M.P. Soler, *Comm. in Algebra* 23, 219 (1995)
- [11] G. Boole, *Phil. Trans. R. Soc. London* 152, 225 (1862)
- [12] I. Pitowski, *Quantum Probability-Quantum Logic*, *Lect. Notes in Phys.* 321, Springer (Berlin) 1989
- [13] E.G. Beltrametti and M. Maczynski, *J. Math. Phys.* 34, 4919 (1993)
- [14] E.G. Beltrametti and M. Maczynski, *Found. of Phys.* 24, 1153 (1994)
- [15] E. G. Beltrametti, S. Bugajski, *J. Phys. A: Math. Gen.* 29, 247 (1996)
- [16] J.Bell, *Physics* 1, 195 (1964)