GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ
DEMONSTRATIONE NOVAE DE RESISTENTIA SOLIDORUM

DANILO CAPECCHI
Dipartimento di Scienza delle Costruzioni,
Università Federico II, Napoli.
Email: capecchi@grisnet.it

1. Introduzione

Lo scritto *Demonstratione novae de resistentia solidorum*[1] è citato in gran parte dei testi di storia della Scienza delle costruzioni e anche in alcuni manuali tecnici di questa disciplina (Truesdell, 1954; Todhunter e Pearson, 1866). Tale scritto però non deve essere stato analizzato e compreso a fondo visto che generalmente viene riferito impropriamente. Ad esempio Truesdell (1954) si riferisce a esso come al primo esempio di applicazione del calcolo integrale alla meccanica del continuo affermando che una parte dei risultati sono riportati senza dimostrazione. Come apparirà chiaro dal testo originale, entrambe queste asserzioni, se non completamente false, sono quantomeno imprecise. Il lavoro di Leibniz è importante sia perché ha rappresentato un contributo importante alla chiarificazione del comportamento della trave inflessa, sia perché ha stimolato l'attenzione di Jakob Bernoulli, il maggiore studioso delle travi inflesse del secolo XVII. Infatti Bernoulli lesse il lavoro di Leibniz scrivendogli nel 1687 una lettera di chiarimenti. In questa lettera riferiva che le sue prove sperimentali non erano d'accordo con le affermazioni di Leibniz; in particolare l'ipotesi di comportamento lineare dei materiali non era verificata[2].

---

[1] Acta Eruditorum, July 1684, 319. Mathemahischen Schriften, Vol. VI, 106.

[2] Secondo Bernoulli (lettera del 15 dicembre 1987, Basilea; Mathematischen Schriften, Vol. III, 10) le prove sperimentali da lui effettuate non erano d'accordo con le assunzioni di Leibniz. In particolare l'ipotesi di comportamento lineare dei materiali non era verificata. Bernoulli riporta i risultati delle prove di trazione di corde usate negli strumenti musicali che rivelano un comportamento incrudente, con la rigidezza crescente con l'allungamento. Riferiva inoltre di prove condotte su travi in ferro incastrate in un muro e soggette a una forza di estremità, che invece di rompersi all'incastro si rompono sensibilmente più avanti, da un terzo alla metà della lunghezza della trave. Leibniz risponde, con molto ritardo a causa dei suoi viaggi, solo nel 1690. Per quanto riguarda i risultati delle prove di trazione conferma che non ci sono ragioni necessarie per un comportamento lineare dei materiali; è l'esperienza che deve decidere. Riguardo alla modalità di rottura delle travi in ferro, Leibniz re-

La *Demonstratione* si colloca in un dibattito iniziato dopo la pubblicazione, nel 1638, dei *Discorsi* di Galilei, contenenti la trattazione della resistenza della trave. Le idee di Galilei trovarono subito dei seguaci e in breve tempo apparvero una serie di lavori sulla resistenza delle travi con analisi molto più dettagliate e specifiche di quella di Galilei; al proposito si veda (Benvenuto, 1981).

Vale però la pena di segnalare l'opera di Vincenzo Viviani. Allievo di Galilei, anche se solo dal 1639, si interessò a fondo al problema della resistenza dei solidi. Purtroppo morì nel 1703 senza avere pubblicato nulla. I suoi scritti furono pubblicati da Grandi nell'edizione delle opere di Galilei del 1718 (essi non compaiono nell'edizione nazionale di Favaro), con il titolo: *Trattato delle resistenze principiato da Vincenzo Viviani per illustrare le opere di Galileo.* Si ritiene comunemente che il lavoro originale di Viviani sia stato modificato largamente da Grandi, anche alla luce delle nuove tecniche matematiche oramai sviluppate. L'approccio di Viviani-Grandi è di tipo assiomatico abbastanza formalizzato e si discosta pertanto dall'approccio di Galilei più informale e centrato su un problema. È possibile che Grandi sia stato influenzato dall'opera di Alessandro Marchetti (1633-1714)[3]. Nel 1669 Marchetti pubblicò *De resistentia solidorum*, un'opera abbastanza interessante basata sulla teoria galileiana, cui diede una struttura assiomatica rigorosa, che trattava in larga parte il problema dei solidi di uniforme resistenza. La pubblicazione del lavoro di Marchetti precede quella di Viviani-Grandi di quasi 50 anni, un periodo di tempo considerevole per non essere stato notato. Un altro studioso di buon livello che si occupò della resistenza delle travi, nell'ottica Galileiana è l'architetto francese François Blondel. Questi compose un trattato *Galileus promotus de resistentia solidorum*, nel 1649, che non raggiunse mai le stampe. Invece fu stampata nel 1661 la lettera di Blondel a Paul Würtz del 1657, dove sono corretti gli "errori" di Galilei in materia di resistenza dei solidi.

---

plica, in modo un po' vago, affermando che il tutto dovrebbe dipendere da un effetto globale di flessione e che lui per semplicità non ha studiato tale problema. Comunque i risultati teorici ottenuti da lui sono certamente validi (sono "nozioni comuni") e non possono essere messi in dubbio da incerte prove sperimentali Poi Leibniz argomenta, basandosi su una semplice analisi dimensionale, che la natura del legame costitutivo non modifica i suoi risultati ottenuti per le travi di uniforme resistenza.

[3] Alessandro Marchetti (1633 Pontorno, 1714 Pisa). Matematico e letterato. Famoso, oltre che per i suoi studi sulla trave, per la traduzione del *De rerum natura* di Lucrezio.

Ancora da segnalare un lavoro poco noto di Huygens, di data incerta verosimilmente del 1671, il quale utilizza l'approccio galileiano per determinare la resistenza di una mensola inclinata rispetto all'orizzonte[4]. Il lavoro di Huygens è interessante principalmente da un punto di vista matematico: la soluzione del problema viene riportata a quella di un problema di minimo. Più noto è invece un altro lavoro in cui Huygens utilizza ancora una procedura di minimo abbinata al principio dei lavori virtuali per trovare la sezione di rottura di una trave.

Alcuni anni dopo, Mariotte introduce la teoria dell'elasticità nel calcolo del resistenza della mensola. Benché le conclusioni di Mariotte compaiano solo nel *Traité du mouvement des eaux*, pubblicato postumo del 1686, si deve ritenere che i primi studi risalgano almeno agli inizi degli anni '80 del 1600. Mariotte oltre a una trattazione teorica tutto sommato soddisfacente, riporta anche molti risultati sperimentali.

Nel presente articolo vengono prima presentati, in modo sintetico, i risultati ottenuti da Galilei e da Mariotte, la cui conoscenza è indispensabile per comprendere la portata del lavoro di Leibniz. Poi viene presentata la traduzione italiana del lavoro di Leibniz, preceduto da un commento.

2. I precursori

2.1 La seconda giornata dei *Discorsi* di Galileo Galilei

Galilei nella seconda giornata dei *Discorsi e Dimostrazioni matematiche*, pubblicato nel 1638, studia la resistenza a rottura di una trave prismatica incastrata a una parete verticale, cioè una mensola. La mensola, "di vetro, acciaio, legno o altra materia frangibile", è soggetta a una forza applicata all'estremità libera e diretta verso il basso.

La resistenza a rottura della trave è spiegata con la sua microstruttura la quale è rappresentata da fibre per le travi in legno, da "grani" per le travi in pietra o in metallo. Talvolta Galilei parla anche di "fibre, filamenti o le parti tenaci". I grani e le fibre sono tenuti insieme dall'*horror vacui* e da un "glutine" non ben precisato (la cui natura dopo un'analisi accurata di tipo logico è ricondotta anche essa all'horror vacui). All'interno di un corpo sollecitato da forze esterne si vengono a determinare "forze" interne dovute ai "vacui", tra i grani, che si oppongono alla rottura. Tali forze sono piccolissime ma comunque forze a tutti gli effetti (usando una terminologia moderna, forze concentrate) di valore finito.

[4] C. Huygens,Oeuvres complètes, Vol. 16, 70

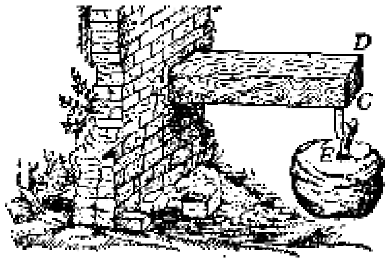
Manca nell'analisi di Galileo una caratterizzazione matematica precisa delle forze dei vacui. Più esattamente manca la definizione della tensione intesa come forza per unità di superficie; sia perché le reazioni dovute all'*horror vacui* non sono esattamente delle forze in senso moderno, sia perché sono delle grandezze irriducibilmente concentrate. L'idea di una forza distribuita all'ìinterno dei corpi sarebbe stata inconcepibile per Galilei. Tale idea, che non è poi così naturale come potrebbe sembrare, né esente da critiche di tipo logico e ontologico, si affaccia in modo chiaro solo con Cauchy, nel 1822 (Capecchi, 2001) [5].

Le forze dei vacui si sommano ed equivalgono a un'unica forza applicata nel baricentro della sezione. L'intensità massima di questa forza è pari a quella necessaria per rompere la trave per trazione pura, chiamata da Galilei resistenza assoluta q. Vale la pena di sottolineare che, nell'analisi di Galilei, le forze che si oppongono alla rottura sono quelle che una parte di

---

[5] Nell'analisi delle forze interne di Galilei le deformazioni non giocano alcun ruolo. Prima del distacco dei grani non c'è alcuno spostamento relativo, la forza dei "vacui" si oppone a che si realizzi. Poi bruscamente il distacco e la forza dei "vacui" si annulla improvvisamente. Lo studio della relazione tra forze e deformazioni sarà il tema della teoria dei legami costitutivi, che inizia a svilupparsi nella seconda metà del secolo XVII. Mentre era sempre stato chiaro che l'applicazione di una forza a certi corpi produce una deformazione, la tematizzazione della relazione tra forze e spostamenti a oggetto degno di un'analisi scientifica di tipo quantitativo è un fatto dell'era moderna. La problematica della deformabilità dei corpi soggetti a sollecitazioni comincia già con Beeckman e Pardies (1673) e sicuramente non nasce dal nulla. Lo scienziato che pubblica per primo dei risultati sperimentali coerenti è Robert Hooke *(Lectures de potentia restituiva, or of spring explaining the power of springing bodies*, 1678). Hooke formula la legge secondo cui la deformazione di un corpo (un filo, una molla, una trave inflessa) è proporzionale alla forza applicata. Ciò vale per tutti i corpi, anche per le rocce, i marmi, ecc., che apparentemente sembrano indeformabili. Hooke, riprendendo anche considerazioni di Beeckman è anche tra i primi a proporre a livello scientifico la problematicità della contemporanea presenza di trazioni e compressioni in un unico corpo (la trave inflessa). Più o meno dello stesso periodo Mariotte esegue degli esperimenti con le sostanze più varie, ponendo una particolare attenzione al comportamento flessionale delle travi. Anche lui trova una relazione lineare tra deformazioni e forze. In realtà la relazione lineare assunta da Hooke e Mariotte approssima solo il legame costitutivo di molti materiali, legame la cui "vera" legge va determinata empiricamente. La scelta è dettata più da ragioni metafisiche riguardo alla semplicità e da limitazioni dell'apparato matematico che da una reale evidenza empirica. Questa evidenza era certamente problematica data la scarsa precisione ottenibile allora con le misure sperimentali..

trave esercita sull’altra. Questo carattere di “internezza” delle forze verrà ignorato dagli autori successivi per essere riscoperto con Coulomb nel 1773 (Heyman, 1999).



Sulla base delle assunzioni sulla distribuzione delle forze interne e dell’esame del cinematismo di rottura, è facile per Galilei applicare la legge della leva angolare per ottenere il massimo carico p che la trave può sopportare. La mensola viene considerata quale corpo rigido che si rompe staccandosi dalla parte di trave infissa nella parete, ruotando attorno al vertice più basso B della sezione di incastro. Il meccanismo di rottura suggerisce il ricorso alla legge della leva angolare ABC per determinare il massimo carico sopportabile dalla mensola:

Il momento della forza posta in C al momento della resistenza, che sta nella grossezza del prisma, ... ha la medesima proporzione che la lunghezza CB alla metà della BA; e però l'assoluta resistenza all'esser rotto, … all'esser rotto con l'aiuto della leva BC, ha la medesima proporzione che la lunghezza BC alla metà di AB (Galilei, *Discorsi*, p. 123-124).

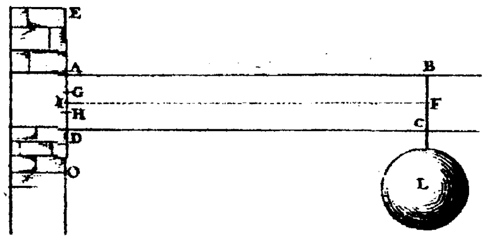
Imponendo l’equilibrio dei momenti rispetto al punto B della forza q distante $h/2$ e della forza p distante l, dove h è l’altezza della trave, l la sua lunghezza e q la resistenza assoluta, si ottiene una relazione che espressa in termini moderni è del tipo:

$$p = \frac{1}{2} q \frac{h}{l}$$

2.2 Edme Mariotte e il *Traité du mouvement des eaux*

Mariotte nel suo lavoro *Traité du mouvement des eaux* del 1686, critica esplicitamente il risultato (e implicitamente l'anche l'analisi) di Galilei. Sopattutto perché non conforme ai risultati sperimentali ottenuti da lui e da altri.

Nonostante il *Traité* si mantenga a un livello più vicino alla pratica sperimentale rispetto al libro di Galilei, l'analisi della costituzione della materia è in qualche modo più idealizzata. Mariotte sembra ritenere che tutti i materiali, legno metalli pietra siano costituiti da fibre. Inoltre queste fibre sembrano immaginate orientate nella direzione dell'asse della trave. Esse si allungano in modo proporzionale alla forza che le sollecita. L'allungamento non può superare un certo valore limite pena la rottura (per Mariotte il criterio di rottura è quindi espresso in termini di spostamento e non di forze).



Come in Galilei la trave è concepita quale corpo rigido che ruota intorno al suo punto più basso D[6]. Per determinare il valore del peso *p* (rappresentato dalla sfera L nella figura) che distacca la trave dal muro o dalla parte della trave infissa[7] Mariotte ammette, in una prima fase, che la resistenza a rottura sia dovuta solo a quattro fibre H, I, G, A (cinque, compresa quella in D), equidistanti tra di loro. La rottura si ha quando la fibra più esterna A ha raggiunto l'allungamento limite e quindi anche la forza limite. Le fibre H, I e G avranno subito un allungamento pari rispettivamente a 1/4, 2/4 e 3/4 di quello della fibra A ed eserciteranno all'atto della rottura una forza pari a 1/4, 2/4 e 3/4 della forza della fibra in A (qui viene quindi fatta implicita-

[6] Bisogna dire che Mariotte sa che il cinematismo di rottura della trave, che assume come fissa la fibra più bassa della trave, non è quello che si realizza realmente, e lo scrive chiaramente nel suo lavoro. In realtà, secondo lui, una parte delle fibre sono tese e una parte compresse. Nella sezione rettangolare la fibra neutra che separa la parte tesa da quella compressa è situata a metà altezza. Però, secondo Mariotte, considerare questo meccanismo di rottura (quello vero) e quello con la fibra neutra in basso è la stessa cosa perché il valore del carico *p* che rompe la trave è lo stesso. Nei calcoli il secondo meccanismo va preferito al primo perché più semplice. Questa affermazione di Mariotte deriva ahimè da un "banale " errore di calcolo. Mariotte che tutto sommato si era dimostrato un matematico intelligente, se non coltissimo, fa un ragionamento sintetico, apparentemente corretto, ma sbagliato di un fattore due.

[7] Mariotte non sottolinea come Galilei la presenza della parte di trave infissa anche se i disegni la mostrano.

mente l'ipotesi che tutte le fibre abbiano le stesse dimensioni e le stesse proprietà meccaniche).

Applicando la legge della leva angolare, Mariotte dimostra facilmente che le fibre, contate dal basso, contribuiscono a sostenere il peso *p* in proporzione ai quadrati dei primi quattro numeri. Infatti ogni fibra dà un contributo che è proporzionale alla sua forza e alla sua distanza da D. Ma entrambe queste quantità sono proporzionali ai primi quattro numeri naturali e il loro prodotto è quindi proporzionale al quadrato di questi numeri. Se la sezione della trave viene divisa in *n* fibre, compresa quella del punto D, si ha che le fibre contribuiscono al sostegno del peso *p* in funzione dei quadrati dei numeri 0, 1, 2, 3, …, *n*-1. Per trovare il rapporto del peso *p* di rottura alla flessione al peso *q* di rottura a trazione pura – la resistenza assoluta secondo Galilei – Mariotte fa un ragionamento involuto, il quale una volta decifrato si presenta però piuttosto "intelligente". Assume che il valore corretto del peso *p* portato si ottiene considerando un valore infinito di fibre, assume cioè la relazione:

$$p \propto \sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

per *n* che tende a infinito (il simbolo $\propto$ significa proporzionale).

Il valore del carico *p* va confrontato con la resistenza assoluta *q* la quale è fornita da:

$$q \propto n(n-1)^2$$

La formula è giustificata in quanto adesso si hanno *n* fibre che resistono tutte con la forza di rottura, proporzionale a $(n\text{-}1)^2$.

Sembra strano che Mariotte esprima le resistenze per mezzo dei numeri interi, con l'apparente paradosso che la resistenza della fibra esterna aumenta al crescere del numero di fibre, mentre è chiaro invece che tale resistenza diminuisce perché diminuisce la dimensione della fibra. Le cose diventano coerenti se si riflette che per Mariotte le resistenze delle fibre sono solo proporzionali ai numeri interi con una costante di proporzionalità che diminuisce all'aumentare del numero *n* e tende a zero per *n* tendente a infinito[8].

---

[8] Un ragionamento analogo a quello di Mariotte, che si sviluppa con le stesse relazioni numeriche anche se in un contesto diverso è dovuto a John Wallis. Questi nel suo *Arithmetica infinitorum* del 1655 fa il confronto tra i quadrati degli indivisibili del triangolo con i quadrati degli indivisibili del rettangolo che lo inscrive. Se si prende la lunghezza del primo indivisibile del triangolo pari a zero, la lunghezza del secondo pari a 1, si ha che la lunghezza dell'*n*-esimo è *n*-1. La

In quanto riportato sopra mancano le dimensioni geometriche della trave. Naturalmente la capacità di portare il peso *p* dipende anche dalla lunghezza della trave e dalla sua altezza. Mariotte però rimane ambiguo su questo aspetto, che evidentemente dà per scontato. Per lui è essenziale avere dimostrato che il coefficiente numerico che collega la resistenza a flessione e quella assoluta è pari a 1/3 e non 1/2 come aveva trovato Galilei. Tale modo di operare crea qualche problema nell'interpretazione dei suoi ragionamenti[9].

3. Il testo di Leibniz

Leibniz segue sicuramente un approccio meno fisico, rispetto a Galilei e rispetto a Mariotte. Sembra scarsamente interessato all'analisi della struttura della materia e al reale comportamento della trave. Il suo approccio si può caratterizzare come segue.

a) Posizione del problema fisico. Assume che la trave si comporti come un corpo rigido che ruota attorno al suo punto più basso (il punto A della

---

lunghezza degli indivisibili corrispondenti al rettangolo è invece sempre pari n-1. Il rapporto tra i quadrati di tutti gli indivisibili del triangolo e i quadrati di tutti gli indivisibili del rettangolo è chiaramente pari al rapporto p/q. Per n indivisibili, sia Wallis sia Mariotte (che verosimilmente conosceva il risultato del primo anche se non lo cita) ottengono il rapporto:

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$$

La dimostrazione di entrambi è fatta per "induzione", nel senso che viene fatto vedere che la relazione vale per alcuni valori di n (la dimostrazione non è comunque formalizzata nel senso dell'induzione matematica). È evidente che per un numero infinito di fibre il rapporto tra p e q si riduce a 1/3.

[9] Se Mariotte non avesse "sbagliato" i calcoli nell'esame del meccanismo di rottura corretto, con fibre tese e compresse, avrebbe trovato che il coefficiente che lega la resistenza a flessione e quella assoluta è pari a 1/6 e non a 1/3. E sarebbe rimasto disorientato. Infatti Mariotte supportava la sua teoria con dei valori sperimentali i quali, seppure non sempre si accordassero completamente con la teoria, non se ne discostavano nemmeno molto. La formula con il coefficiente "corretto" 1/6 fornisce invece valori falsificati nettamente dall'esperienza. Oggi, con la migliore conoscenza dei materiali, si è in grado di spiegare questa "anomalia". Certamente ciò non era possibile ai tempi di Mariotte e probabilmente il riconoscimento dell'anomalia avrebbe messo in crisi il programma di ricerca sulla resistenza delle travi.

figura 3) sino alla rottura. L'incastro della trave alla parete è assicurato da un'infinità di fibre elastiche, tante quanti sono i punti della sezione. Ciascuna fibra, che per la prima volta è rappresentata graficamente e quindi resa esplicita, è di lunghezza "insensibiles", termine che potrebbe essere tradotto con "infinitesima". In corrispondenza del cinematismo di rottura ciascuna fibra si allunga rispetto al suo "stato naturale", cioè al suo stato indeformato, ed esercita una forza proporzionale all'allungamento subito. Poiché gli allungamenti delle fibre sono proporzionali alla loro distanza dalla fibra neutra, anche le forze sono proporzionali a questa distanza. Il criterio di rottura non è reso esplicito ma sembra essere quello per cui la "forza" della fibra più distante dalla fibra neutra, cioè la forza della fibra più sollecitata, è uguale alla forza che tale fibra può sopportare per trazione semplice.

b) Principi meccanici. L'unico principio meccanico usato è la legge della leva. Il peso sollecitante la trave è equilibrato dall'azione di tutte le fibre per ognuna delle quali si introduce una leva. Si assume valido il principio di sovrapposizione degli effetti per il quale il peso complessivo sopportato dalla trave è pari alla somma de pesi sopportati dalle singole fibre. In qualche occasione Leibniz sembra servirsi della legge dei momenti che è matematicamente equivalente a quella della leva ma prescinde da una rappresentazione geometrica. Ciò è vero per esempio quando tratta il solido di uniforme resistenza, ove usa il termine "momentum". Lo usa però solo per caratterizzare l'azione delle forze che contribuiscono a rompere la trave. Invece non parla mai di momento delle forze resistenti, alla cui azione complessiva si riferisce semplicemente come alla "Resistenza". L'equilibrio risulta dall'uguaglianza tra il momentum e la Resistenza.

c)Metodi matematici. Il principio dell'equilibrio viene reso operativo con il metodo degli indivisibili di Cavalieri. C'è da chiedersi perché Leibniz non utilizzi esplicitamente il calcolo integrale che aveva oramai messo a punto. Si possono fare almeno tre ipotesi; per la prima Leibniz è influenzato dal metodo usato da Mariotte, basato anche esso in qualche misura sugli indivisibili, e si limita solo a presentarlo in modo più elegante. Per la seconda ipotesi si può pensare che Leibniz si senta ancora poco sicuro dei suoi risultati[10]. Infine, e questa mi sembra la spiegazione più convincente, si deve

---

[10] Sebbene Leibniz avesse già sviluppato il calcolo infinitesimale da alcuni anni, all'atto della scrittura del presente lavoro aveva appena cominciato a pubblicare i suoi risultati. La prima pubblicazione, sugli Acta Eruditorum del 1684, *Nova methodus pro maximis et minimis*, …., è relativa al calcolo differenziale. Solo due anni dopo, sempre negli Acta, pubblicherà un lavoro sul calcolo integrale, *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum*.

considerare che il problema della resistenza della trave non era esprimibile facilmente nel linguaggio del Calcolo. Con le nozione moderna di tensione, il calcolo del momento resistente della trave inflessa potrebbe farsi semplicemente calcolando l'integrale, esteso all'area della sezione, della quantità $py\mathrm{d}A$, ove p è la tensione nella generica areola $\mathrm{d}A$ ed y è la distanza di $\mathrm{d}A$ dalla fibra neutra. Tale approccio è reso semplice e possibile dal concetto di tensione, come forza per unità di superficie. Leibniz non aveva tale concetto. Per lui esistevano solo le forze, che seppure riferite a fibre di dimensioni infinitesime, erano comunque forze "totali" e non distribuite[11].

La traduzione del testo di Leibniz non ha presentato particolari difficoltà in quanto quasi tutti i termini tecnici si rifanno a concetti classici. Qualche imbarazzo si è presentato solo per alcuni termini della geometria, tra cui hungula, tuba e conoide, per i quali ho scelto rispettivamente unghia, tromba e paraboloide, senza sforzarmi di effettuare una ricerca accurata sugli effettivi termini più moderni, che sono comunque desueti e quindi inutili. Il testo scorre abbastanza bene, credo, e la spiegazione dei passaggi meno chiari è affidata alle note. Riporto comunque nel seguito un brevissimo sommario, dove mi soffermo solo su alcuni aspetti. Intanto Leibniz sottolinea come i problemi di resistenza dei materiali siano stati studiati molto poco, fino a Galilei. La teoria proposta da Galilei non è comunque conforme ai risultati sperimentali, come appare chiaro dopo le numerose esperienze condotte da Paul Würtz, François Blondel e specialmente da Edme Mariotte, nella seconda metà del secolo XVII. La causa di tali discrepanze va ricercata, secondo Leibniz, nel fatto che Galilei considerò la trave come perfettamente rigida, che «è spezzata tutta in un sol colpo quando la sua resistenza sia superata» mentre invece bisogna ammettere che "tutti i corpi che ci è consentito trattare cedono in qualche punto" prima di rompersi.

Dopo questi preliminari Leibniz comincia a "calcolare" la resistenza della mensola a sezione rettangolare. Il suo ragionamento si rifà strettamente a quello di Mariotte, anche se è più ordinato. Per eliminare un elemento di ambiguità che dava qualche fastidio nella lettura del lavoro di Mariotte, Leibniz considera una trave la cui altezza è pari alla lunghezza (una trave tozza diremmo noi). Con una approccio elegante basato sul metodo geome-

---

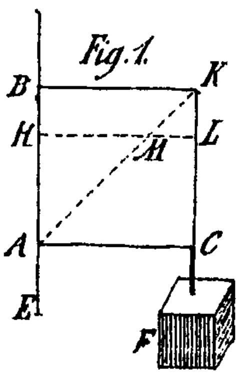
[11] A rigore bisogna dire che Parent, molti anni dopo, nel periodo 1707-1713, calcolerà il momento resistente di una sezione generica con l'impiego del calcolo integrale senza introdurre esplicitamente la pressione ma calcolando come integrale la somma degli infinitesimi forniti dai momenti delle singole fibre (*Comparaison des résistances des cylindres et segmens pleins, avec celles des creux égaux in base, dans le système de M. Mariotte*).

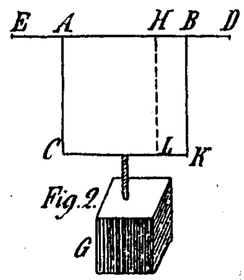
trico degli indivisibili di Cavalieri, Leibniz perviene immediatamente a stabilire che il carico di rottura trasversale è un terzo di quello di rottura assiale.

Dopo aver trattato la trave tozza, Leibniz passa all'analisi della trave di lunghezza qualsiasi e la risolve in modo semplice. Segue la trattazione delle travi di uniforme resistenza; argomento che era oramai divenuto classico (Benvenuto, 1981). Affronta il caso della trave soggetta al peso proprio per la quale ritrova il profilo parabolico e la trave soggetta a carico uniforme il cui profilo di uniforme resistenza è lineare. Verso la fine del lavoro c'è la trattazione della trave di sezione qualsiasi. Qui, più che una formula, Leibniz fornisce un metodo, riportando il caso del calcolo del momento resistente alla determinazione del baricentro di un solido (il solido delle tensioni).

4. Demonstratione novae de resistentia solidorum

Si ritiene che la Scienza Meccanica consti di due parti, una riguardante la capacità di agire e di muoversi, l'altra la capacità di subire e resistere, ossia la resistenza dei corpi. La seconda di queste due cose è stata trattata da ben pochi. Archimede che, quasi solo fra gli antichi, applicò la geometria alla Meccanica, non si occupò di questa parte. Poi dai tempi di Archimede, non è stato fatto quasi nulla nel campo della Geometria Meccanica fino a Galileo, il quale, dotato di un'acuta capacità di giudizio e di una grande conoscenza dell'intima natura della geometria, allargò per primo i confini della scienza e allo stesso tempo incominciò a ricondurre la resistenza dei solidi alle leggi della Geometria. E, sebbene né su questo argomento, né circa il moto dei proiettili, avesse colpito nel segno, servendosi di ipotesi non abbastanza fondate, tuttavia ragionò correttamente a partire dalle [sue] premesse.





Dunque, riguardo la resistenza delle travi che vengono incastrate nei muri o nelle pareti egli la pensa in questo modo. Nelle figure 1 e 2 sia la trave ABC infissa perpendicolarmente nel muro o nel sostegno DE e sia AC uguale allo stesso AB. Nella figura 1 un peso F sia appeso a C, il quale possa staccare precisamente [il minimo peso che può rompere] la trave orizzontale dal muro verticale; nella figura 2 un peso G che possa staccare verticalmente la trave dal sostegno orizzontale (il primo caso dei quali chiamerò spezzare trasversalmente, il secondo svellere assialmente).

Secondo Galileo[12] il peso F è la metà del peso G, posto che il solido [la trave] sia perfettamente rigido e incapace di alcuna flessione e non si consideri il peso della trave stessa o sia già considerato nel peso sospeso. Infatti poiché AB e AC sono uguali, il peso F nella figura 1 troverà nel punto B la stessa resistenza, anche se tirasse assialmente come [illustrato] nella figura 2. Dunque la resistenza del punto B in entrambe le figure è rappresentata da BK. Invece la resistenza del punto H nella figura 2 è rappresentata da HL, uguale alla stessa BK, poiché nella figura 2 la resistenza di tutti i punti è la stessa, ma la resistenza dello stesso punto H nella figura 1 sarà rappresentata dall'ordinata HM del triangolo ABK che sta alla resistenza di B, come AH [sta] ad AB, secondo la legge della leva. Ancora, facendo per un qualsiasi altro punto tra A e B ciò [le considerazioni] che abbiamo fatto per il punto H, per rappresentare la resistenza si completerà il quadrato BC, nella figura 2, e per [rappresentare] la resistenza un triangolo ABK che sarà la metà di quel quadrato, nella figura 1. Così se, nella [situazione della] figura 1, fosse applicato un peso F pari precisamente a questa resistenza, in modo da vincerla con l'aggiunta di un seppur piccolo peso, esso sarebbe la metà del peso G (pari alla resistenza nella figura 2), e la capacità di spezzare trasversalmente sarebbe la metà (chiariremo in seguito che in realtà non è la metà, ma la terza parte) della capacità di svellere direttamente[13]. Da ciò si possono già dedurre molte conclusioni pratiche.

---

[12] Galileo Galilei, Seconda giornata dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche sopra due nuove scienze*, Leida, 1638.

[13] Leibniz presenta una rilettura del procedimento di Galilei che si riallaccia all'approccio seguito successivamente. Esplicitando quanto fa Galilei, Leibniz afferma che la resistenza a flessione della trave è somma delle resistenze delle singole fibre. Però, a differenza di Galilei, che si mantiene generico, e andando oltre le intenzioni di questi, Leibniz precisa il modo con cui ciascuna fibra contribuisce a sopportare il peso applicato all'estremità: essa segue la legge della leva.

Il metodo matematico usato per confrontare la resistenza a flessione con quella a trazione è il metodo degli indivisibili di Cavalieri, applicato all'inverso; cioè invece di dedurre il rapporto delle aree dal rapporto della somma degli indivisibili, deduce

Paolo Vurzio [Paul Würtz], insigne per grandi successi militari e per imprese mai compiute prima di allora, nonché molto capace in questi studi, una volta cominciò ad esaminare queste ed altre simili teorie di Galileo, facendo molti esperimenti, incontrando poco successo in alcune conclusioni, come apprendo da Cl. Blondello[14], esimio in questa ed altre materie, da poco maestro di matematica del Serenissimo Delfino e Direttore dell'Accademia Architettonica, che si occupò dello stesso argomento e fu amico del Vurzio. Ma anche Cl. Mariotte[15] dell'Accademia Regia, emerito nel campo dell'ottica e della meccanica, facendo degli esperimenti trovò come il peso F avesse bisogno di molto meno di quanto pensava Galileo, per spezzare la trave. La causa di ciò non può essere altro che egli [Galileo] considerò la trave come perfettamente rigida, che è spezzata tutta in un sol colpo quando la sua resistenza sia superata, nonostante tutti i corpi che ci è consentito trattare cedano in qualche punto prima che possano essere divelti. Cl. Mariotte, osservando ciò trovò, con calcolo ingegnoso, che il peso F era circa la quarta parta del peso G[16]. Ma poiché mi si è presentata l'occasione di considerare l'argomento più a fondo e di esaminarlo secondo le leggi della geometria, ho scoperto

---

il rapporto della somma degli indivisibili dal rapporto delle aree. Il peso totale sostenuto dalla trave incastrata, pari alla somma dei pesi sostenuti dalle singole fibre, è proporzionale alla somma di tutti i segmenti (gli indivisibili) del tipo HM della figura 1 i quali formano il triangolo ABK. Analogamente il peso totale sostenuto dalla stessa trave soggetta a uno sforzo assiale di trazione, è proporzionale alla somma di tutti gli indivisibili del rettangolo ABCK. Ma secondo il metodo degli indivisibili il rapporto tra la somma di tutti gli indivisibili del triangolo e la somma di tutti gli indivisibili del quadrato è uguale al rapporto tra l'area del triangolo e l'area del quadrato. Quindi il peso complessivo portato a flessione sta al peso portato a trazione come l'area del triangolo sta all'area del quadrato, cioè come uno sta a due.

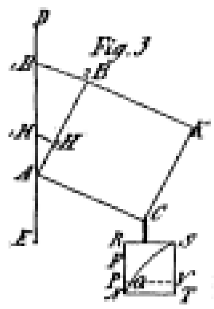
[14] François Blondel, architetto francese nato nel 1618. Membro dell'Accademia delle scienze di Parigi, professore e direttore dell'Accademia reale di architettura. La sua memoria: *Résolution des quatre principaux problèmes d'architecture* (Mémoires de l'Académie Royale des sciences, 1666-1699), contiene considerazioni sui solidi di ugual resistenza.

[15] Edme Mariotte, *Traité du mouvement des eaux*, Parigi, 1686, anche in Œvres de Mariotte, Leida, 1742.

[16] Leibniz cita un risultato di Mariotte, (la resistenza a flessione di una trave è un quarto di quella assoluta) che è difforme dal risultato pubblicato nel *Traité du mouvement des eaux* del 1686 (ove, come in Leibniz, la resistenza a flessione di una trave è un terzo di quella assoluta). O Leibniz aveva una conoscenza superficiale dell'opera di Mariotte (non ancora pubblicata nel 1684) o aveva a sua disposizione qualche manoscritto, di Mariotte, non aggiornato.

infine le vere proporzioni e ho dimostrato, tra le altre cose, che il peso F deve essere la terza parte del peso G e di conseguenza, riguardo alla consistenza dei corpi, che la resistenza alla rottura è minore nella proporzione di uno e mezzo di quanto sostenne Galileo.

Affinché si comprenda questo, innanzitutto bisogna sapere che due corpi uniti [tra loro] non sono immediatamente disgiunti vicendevolmente in un solo colpo, cosa che si può osservare con l'esempio del bastone, che si piega prima di rompersi, oppure con l'esempio della corda, che si estende prima di spezzarsi, e la stessa flessione dei bastone è una sorta di estensione nella sua superficie convessa. Che nulla sia tanto rigido, da non flettersi affatto ad un seppur lieve impulso, segue dalla natura del suono[17], che è una vibrazione, ossia una flessione reciproca delle parti del corpo sonante, e tanto più rapido e insensibile [impercettibile] è il ripristino (dello stato precedente alla vibrazione che genera il suono) e l'acutezza del suono, quanto le parti vibranti che costituiscono un corpo più compatto sono più brevi [ravvicinate] e tese. Lo stesso vetro è flessibile e a provarlo sono i suoi filamenti lunghi e tenui; gli esperimenti fiorentini dimostrano come il vetro abbastanza spesso si contragga sotto l'azione del freddo. I sensi stessi ci insegnano in che modo anche le parti delle piante e degli animali siano formate da tessuti e tenute insieme da filamenti variamente disposti. Anche i minerali e i metalli, pur essendo fluidi in partenza, in seguito si induriscono, ed è evidente che essi hanno tenacità e sono ridotti a filamenti, se stesi con il martello, e che si ricompattano nella fusione.



[17] Secondo Truesdell, *Opera Omnia* di Leonhard Euler, 2° serie, vol. 11, p. 63, questa di Leibniz è una delle prime spegazioni "corrette" e connesse all'elasticità dei materiali, dell'origine del suono.

Ragioneremo, dunque, come se avessimo delle fibre[18] le quali uniscono le parti dei corpi, e considereremo che la trave BC sia fissata alla parete o al sostegno DE con vari intrecci di fibre nei punti A, H, B e negli altri infiniti punti intermedi. Aggiunto il peso F, la trave non si muoverà affatto nel fulcro A della figura 3 [(cioè il punto A della trave rimane fisso)], mentre il punto B della trave, staccandosi dalla parete, si sposterà dal punto $_1B$ della parete al punto $_2B$ distante dalla parete, portando con sé la fibra con la quale è congiunto alla parete tendendola a guisa di corda. Ossia la tenderà lungo la linea $_1B\ _2B$, oltre il suo stato naturale. Allo stesso modo, il punto H tenderà la sua fibra verso $_1H_2H$. Esse [le fibre] in realtà sono linee impercettibili, rese tuttavia visibili per [rendere comprensibile] la dimostrazione.

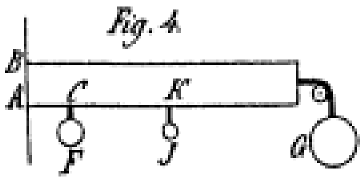
Inoltre la fibra $_1H_2H$ sarà sollecitata a trazione meno della fibra $_1B\ _2B$ e questo in proporzione doppia della distanza da A[19], ossia [in proporzione] doppia della distanza dal vertice assunto. Infatti, in primo luogo, il peso in C, necessario a tendere la fibra $_1H_2H$ nella stessa misura della fibra $_1B_2B$, è minore rispetto al peso richiesto per tendere la fibra $_1B_2B$, nella proporzione di AH ad AB. Per esempio, se AH fosse la terza parte di AB, allora anche il peso in C, capace di tendere la sola fibra $_1H_2H$ in modo che [essa] sia uguale alla $_1B_2B$ sarebbe la terza parte del peso tendente la sola fibra $_1B_2B$. Poi, quando sono entrambe tese dal peso appeso in C, la fibra $_1H_2H$ non è certamente tesa quanto la fibra $_1B_2B$, ma molto meno, e ciò di nuovo nella proporzione di AH ad AB. Infatti, se AH fosse la terza parte della stessa AB, $_1H_2H$ sarebbe la terza parte della stessa $_1B_2B$. Così (sulla base dell'ipotesi confermata in un altro punto del ragionamento, che gli allungamenti sono proporzionali alle forze di tensione) per allungarla in questo modo occorrerà la terza parte del peso, che era stata necessaria per allungarla quanto $_1B_2B$, ossia la terza parte della terza parte del peso che tende la stessa $_1B_2B$, ovvero la nona parte di esso. Quindi, in generale, in questa tensione simultanea di tutte le fibre, le resistenze saranno in qualsiasi punto in una proporzione doppia delle distanze misurate dal fulcro più in basso [il punto A], centro o asse dell'equilibrio. Cioè la resistenza in H starà alla resistenza in B, come il quadrato della stessa AH starà al quadrato della stessa AB. Dunque, se il peso F in figura 3 fosse il corpo parabolico NRSQN, liberamente sospeso da C, nel quale l'altezza NR è uguale alla base RS (come AB è uguale ad AC) e le ordinate sono proporzionali ai quadrati delle altezze, ossia PQ sta a RS come il

[18] È la prima volta che le fibre della trave vengono rappresentate esplicitamente. Si tratta chiaramente di elementi longitudinali, caratteristica questa che non era resa esplicita negli scritti di Galilei (e forse nemmeno di Mariotte).
[19] Cioè proporzionalmente al quadrato della distanza.

quadrato NP sta al quadrato NR; allora, posto che la base RS rappresenti la resistenza in B, l'ordinata PQ rappresenterebbe la resistenza in H, ovviamente se le altezze NP, NR fossero proporzionali alle altezze corrispondenti AH, AB. A sua volta, l'intero triangolo parabolico concavo NRSQN rappresenterebbe la resistenza dell'intera linea AB, qualora la trave ABC fosse spinta in basso trasversalmente da un peso aggiunto F, secondo la regola della leva. Ma il quadrato RNTS, circoscritto a questo triangolo parabolico, rappresenterebbe la resistenza diretta della stessa linea AB, se, come nella figura 2, la trave diretta [sollecitata assialmente] dovesse essere divelta dalla parete. Infatti, poiché AB e AC sono uguali, la resistenza trasversale del punto B sarà la stessa di quella diretta, ovviamente rappresentata da RS nella figura 3. Ora, se la trave fosse divelta direttamente (come nella figura 2), la resistenza di tutti i punti sarebbe la stessa; quindi, la resistenza diretta del punto H sarebbe PV, uguale alla stessa RS; e procedendo in tal modo negli altri punti verrebbe riempito il quadrato RT, che è il triplo [ha area tripla] del triangolo parabolico concavo inscritto, ossia NRSQN. Per questo anche la resistenza diretta di una linea retta (come AB), sarà tripla rispetto alla resistenza trasversale. Questo è quanto bisognava dimostrare[20].

---

[20] Nel brano sopra riportato, relativo al calcolo del peso che può essere sostenuto dalla trave inflessa trave, Leibniz riparte dall'analisi di Mariotte secondo cui ogni fibra contribuisce a portare un peso proporzionale al quadrato della sua distanza dal fulcro A (per esempio la fibra ${}_1$H-${}_2$H porta un peso proporzionale al quadrato della distanza A-${}_1$H). Leibniz considera una trave di sezione rettangolare la cui altezza è uguale alla larghezza - una trave tozza. Costruisce un diagramma il quale riporta per ogni punto della trave un segmento proporzionale al peso portato dalla fibra associata a quel punto. Ottiene così il diagramma parabolico NRS della figura 3 in cui l'altezza RS della parabola rappresenta il contributo della fibra esterna e la base RN, rappresenta la base AB. Se la trave invece di essere inflessa fosse soggetta a trazione semplice tutte le fibre contribuirebbero allo stesso modo a sostenere il peso e il corrispondente diagramma sarebbe costituito dal rettangolo (o quadrato) NRST. È sottinteso che la rottura avvenga quando la fibra in B raggiunge un allungamento o una forza limite. Il ragionamento successivo si basa sul metodo degli indivisibili di Cavalieri, applicato all'inverso, analogamente a quanto fatto per illustrare il risultato di Galilei; solo adesso Leibniz è più preciso. Il peso totale sostenuto dalla mensola incastrata è pari alla somma dei pesi sostenuti dalle singole fibre, quindi proporzionale alla somma infinita di tutti i segmenti, gli indivisibili, associati alla parabola. Analogamente il peso totale sostenuto dalla stessa mensola soggetta a uno sforzo assiale di trazione, è proporzionale alla somma di tutti gli indivisibili del rettangolo che circoscrive il triangolo parabolico. Secondo il metodo degli indivisibili il rapporto tra la somma di tutti gli indivisibili del triangolo parabolico e la somma di tutti gli indivisibili del quadrato è uguale al rapporto tra l'area della parabola e l'area del



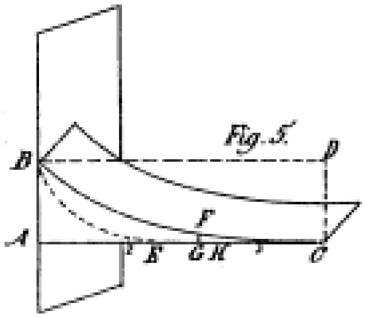
Di conseguenza, qualunque sia la lunghezza della trave, oppure la distanza dalla parete del peso aggiunto (che fino ad ora abbiamo considerato pari all'altezza della trave), si potrà facilmente stabilire il peso sufficiente a spezzare la trave: tanto che se il peso G potesse spezzare direttamente la trave [come] nella figura 4, il peso F sarebbe la terza parte dello stesso G (a patto che AC fosse uguale a AB); se invece il peso J fosse sospeso a K, e se AK fosse quadrupla rispetto alla stessa AB o AC, il peso J sarebbe la quarta parte della stessa F, e la dodicesima della stessa G[21]. In generale, dunque, un peso che svelga direttamente una trave parallelepipeda, per la legge della leva, starà al peso che [la] spezzi trasversalmente come la lunghezza della leva sta alla terza parte dello spessore della trave[22]. Fino a questo punto abbiamo considerato questa trave priva di peso; perché se si dovesse prendere in esame il peso della trave stessa, sarebbe come se un peso J uguale al[peso del]la trave pendesse da K, centro di gravità della stessa trave.

---

quadrato. Quindi il peso complessivo che viene portato a flessione sta al peso che viene portato a trazione come l'area del triangolo parabolico sta all'area del quadrato. Cioè come uno sta a tre, in quanto è noto dall'antichità che il triangolo parabolico ha area pari a un terzo del rettangolo che lo circoscrive.

[21] Secondo la legge della leva, se A è il fulcro, un peso applicato lungo l'asse della trave equilibra le forze delle fibre che agiscono su Ab, proporzionalmente alla sua distanza da A.

[22] Se q è la resistenza assoluta, p il peso che provoca la rottura a flessione, h l'altezza della trave e l la distanza di p dall'incastro (la lunghezza della trave), si ha: $p = \frac{1}{3}\frac{h}{l}q$, e quindi $\frac{p}{q} \propto \frac{h}{l}$.



Potrebbe accadere che la trave sia spezzata dal suo peso in un altro punto, come G nella figura 5, tra la parete AB e l'estremità della trave C, quando la gravitazione [l'azione del peso] della porzione FGCF, tenuta in equilibrio dal punto fisso G, ha un rapporto maggiore rispetto a quello della gravitazione [dell'azione del peso] dell'intera trave con la resistenza in AB. Ci si chiede allora, come debba essere la linea BFC, perché le resistenze siano proporzionali alle gravitazioni corrispondenti e la trave resista allo stesso modo in ogni punto. Si capisce che questa è la Parabola[23]. Infatti la resistenza in FG sta alla resistenza in BA, come il triangolo parabolico concavo FGCF sta allo stesso BACB, se la base del triangolo è uguale alla sua altezza (come si evince dai ragionamenti precedenti), o come il quadrato FG sta al quadrato BA (perché tale triangolo è la terza parte del quadrato circoscritto)[24]. Ma il momento o la gravitazione di ciascuna porzione di FGCF tenuta in equilibrio da G, sta al momento dell'intera trave BACB tenuta in equilibrio da A, come il quadrato FG sta al quadrato BA, il che è dimostrato facilmente dalla natura della parabola (infatti i rapporti [tra le aree] di CGFC e CABC sono come i cubi di CG, CA. Quindi, siano A2 e G3 le quarte parti di CG e CA, [esse] sono le distanze dei centri della gravità delle parti CGFC e CABC dai punti fissi o dai centri dell'equilibrio G e A. I momenti[25] delle dette parti dipendo-

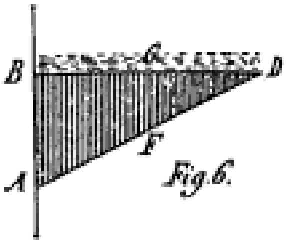
---

[23] È questo uno dei problemi di trave a uniforme resistenza. Fu affrontato per primo da Galilei, che assunse però una trave priva di peso con una forza concentrata in C. La forma della trave di minor resistenza era ancora una parabola ma di forma complementare rispetto a quella trovata da Leibniz. Facendo riferimento alla figura 5, si tratta della parabola BFCD, ruotata di 180° attorno a C e traslata in modo che DC si sovarpponga ad AB. Una panoramica sugli studi sui solidi di uniforme resistenza, precedenti Leibniz, si può trovare in *An introduction to the history od structural mechanics*, di E. Benvenuto.

[24] Il ragionamento di Leibniz è sintetico ma corretto.

[25] Con il significato moderno di momento statico, prodotto della forza per il braccio.

no dal loro modo di variazione con le distanze, in un rapporto composto delle parti, cioè dei cubi di GC e CA [i pesi], e delle distanze, che sono come le stesse CG e CA: quindi in un rapporto del quadrato dei quadrati da CG, CA, cioè nella proporzione dei quadrati da FG e BA)[26]. Ne consegue che le resistenze sono proporzionali ai momenti, o alle forze, e che il rapporto di ogni momento con la sua resistenza è lo stesso ovunque e la resistenza è garantita in ogni punto fino a quando la trave resiste al suo peso. Quindi, per qualsiasi lunghezza si protragga una trave così immaginata, se non è spezzata dal suo peso vicino al muro, non si spezzerà in nessun altro punto. Inoltre poiché la trave Parabolica è solo la terza parte della trave piena CDBA, considerata la terza parte del peso e considerata la distanza del centro di gravità da AG alla sua metà A2, la trave Parabolica sarà più resistente di sei volte di quella piena[27].



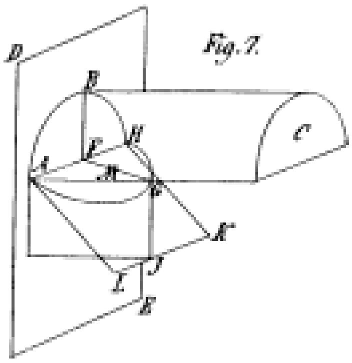
Ma se, tralasciato il peso, si considerasse la forza dell'acqua o del vento, o qualsiasi altra cosa ugualmente distribuita per l'intera lunghezza della trave, come nella figura 6, o se la trave ABD sporgente dal muro dovesse sop-

[26] Il rapporto tra i pesi dei triangoli parabolici è pari al rapporto delle aree A_1= 1/3 AC×AB e A_2=1/3GC×GF. Poiché GF = k CG^2, AB = k AC^2, si ha A_1 = k/3 AC^3 e A_2= k/3 CG^3, da cui A_1/A_2=AC^3/GC^3. Il baricentro, cioè il punto di applicazione del peso di ciascun triangolo parabolico è situato a un quarto della lunghezza dalla base (risultato già noto dalla teoria dei baricentri di Archimede). Quindi i momenti delle forze peso, pari al prodotto della distanza per il peso, sono forniti da m_1 = k/12 AC^4 = 1/(12k) AB^2, m_2 = k/12 GC^4 =1/(12k) GF^2. Quindi m_1/m_2=AB^2/FG^2.

[27] La dizione è poco precisa; più correttamente si dovrebbe dire che a parità di altezza, larghezza – e quindi di resistenza - e di lunghezza la trave parabolica presenta un momento delle forze peso all'incastro che è sei volte più piccolo di quello della trave a sezione uniforme. Infatti per la trave parabolica il momento all'incastro è dato dal peso Q per la distanza del baricentro dall'incastro, pari a l/4, per cui m_1= Ql/4; per la trave a sezione uniforme (il cui volume e quindi il peso è tre volte quello della trave a sezione uniforme) si ha invece m_2=3 Q l/2; da cui la proposizione di Leibniz.

portare il peso della terra sovrapposta o del frumento o di qualche altro materiale, [il suo profilo] potrebbe essere triangolare, secondo la linea retta AD, e la trave resisterebbe allo stesso modo in ogni punto al peso imposto[28]. Se non si rompesse nel muro, non potrebbe essere rotta in nessun altro punto. Infatti, secondo le note leggi della Meccanica, il momento del peso che grava su GD, sta al momento del peso che incombe su BD, come il quadrato di GD sta al quadrato di BD, ossia come il quadrato di GF sta al quadrato di BA, cioè come la resistenza in GF sta alla resistenza in BA: quindi considerando sia il peso imposto sia la forma della trave, si ottiene una figura di uniforme resistenza.

Fino a questo punto abbiamo preso in esame soltanto la trave, la cui superficie, lungo la quale aderisce al muro o al sostegno. ha una profondità uguale in ogni punto, per cui è stato sufficiente assumere la retta BA, ma poiché la superficie comune alla trave e alla parete può essere varia, diamo una regola generale per determinarne la resistenza dal punto di vista geometrico. Se qualcuno avrà il tempo di trattare con attenzione le sue caratteristiche, troverà molti teoremi elegantissimi

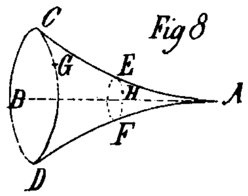


In generale, invece, sia la trave ABHC (figura 7), la cui sezione rispetto al sostegno DE sia la figura piana ABH di forma qualunque. Sia questa disposta in orizzontale, oppure venga tracciata sul piano orizzontale un’altra figura uguale a essa, simile e similmente posta, AGH. Dal punto G, il più lontano dall'ultima delle orizzontali AH (che corrisponde al punto B), sia condotta verso AH la perpendicolare GF (uguale alla stessa BF) e si consideri un corpo cilindrico, la cui base o qualunque sezione parallela sia simile a quella orizzontale e uguale ad AGH; l'altezza perpendicolare sia invece GJ, uguale FG o BF, e questo corpo si chiami cilindro. Per J si conduca la tan-

[28] Qui viene considerato il profilo di uniforme resistenza per una trave priva di peso proprio, soggettta a un carico uniformenente distribuito sulla lunghezza.

gente indefinita KJL parallela ad AH. Infine un piano passi per AH e KL, formando un angolo semiretto con l'orizzonte, che dividerà il corpo cilindrico in due parti, delle quali quella verso cui cade GJ, che nella figura è la secante sopra il piano, viene chiamata Unghia. Dico che questa Unghia tagliata dal cilindro e avente funzione di leva, il cui fulcro sia in AH, equivale o rappresenta la resistenza della trave ABCH che si deve spezzare trasversalmente in ABH, se il peso del cilindro stesso [dell'intero cilindro] è sufficiente a svellerla direttamente dal muro[29]. Ma per evitare che si debba considerare l'Ungula come una leva, e per ragionare in maniera indipendente sul corpo rappresentante la resistenza, si consideri l'Ungula sospesa al punto M alla distanza FM del centro di gravità dell'Unghia dalla parete. Allora sarà esattamente uguale alla resistenza trasversale, se il cilindro è uguale alla resistenza diretta [Allora il carico dell'Unghia sospesa in M sarà uguale al carico di rottura]. Cosi, qualora si chieda se e quando un solido debba spezzarsi, la valutazione non sarà difficile per il geometra; questo infatti accadrà quando il momento dell'Unghia, dovuto all'Unghia appesa alla distanza del suo centro di gravità da un piano verticale contenente l'asse dell'equilibrio [AH], avrà rapporto minore con [sarà inferiore al] la potenza che tenta di spezzarla in quel punto. Per cui, considerate queste poche cose, questa materia è ricondotta alla pura Geometria, cosa che in Fisica e Meccanica si desidera unicamente.

[29] Qui Leibniz non esplicita il suo ragionamento forse perché lo considera troppo semplice. La resistenza complessiva è la somma dei contributi delle forze delle singole fibre. Queste forze sono distribuite linearmente sulla sezione e generano un solido S quando sono considerate come segmenti ortogonali alla sezione ABH. In corrispondenza della rottura della trave l'altezza del solido delle tensioni S, cioè l'intensità della forza della fibra B più distante dalla base della sezione, è pari alla resistenza massima a trazione. Le forze di questo solido sono equilibrate da quelle di un solido simile ma ruotato di 90°, che come S si appoggia all'asse AH; queste forze sono esattamente le forze peso delle parti costituenti l'Unghia. Poi l'altezza GJ dell'Ungula, se deve rappresentare il solido delle tensioni, deve essere pari all'altezza del cilindro che con il suo peso provocherebbe la rottura della trave per trazione pura.



Aggiunta: Se qualcuno cercasse un conoide di uniforme resistenza, sarebbe soddisfatto dalla Tromba parabolica. Sia nella figura 8 la curva parabolica AEC, di vertice A, tangente del vertice AB, intorno alla quale, come intorno all'asse, venga fatta ruotare la curva parabolica, e si ottenga la Tromba AECGDFA. Considerata ora un'altra porzione della Tromba, essendo le resistenze delle basi o dei cerchi CGD, EBF come i cubi dei diametri CD, EF, si troverà che i momenti delle stesse porzioni AECGDFA e AEFHA sono, secondo la natura della parabola, anche come ì cubi CD, EF[30].

Bibliografia

Benvenuto E., An introduction to the history of structural mechanica, Sprinter-Verlag, 1981.

Capecchi D., *La tensione secondo Cauchy,* Hevelius, Benevento, 2001.

Huygens C., Œuvres complètes, Martinus, Nijhoff, La Haye, 1888-1937.

Todhunter I., Pearson K., *A history of the theory of elasticity and the strength of materials from Galilei to the present time*, Part 1-2, Cambridge, 1886-1889.

Mariotte E. *Traité du mouvement des eaux* (1686) in Œvres de Mariotte, 327, Marchand, Leida, 1742

Galilei G. *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla mecanica ed i movimenti locali*, a cura di Enrico Giusti, Einaudi, Torino, 1990.

C. Truesdell: The rational mechanics of flexible elastic bodies, Introduzione all'opera Omnia di Leonhard Euler, 2° serie, vol. 11.

Timoshenko S. P., *History of strength of materials*, Dover, New York, 1983.

W. Leibniz: Mathematische Schriften, George Olmes Verlag, New York, 1971

J. Heyman: Il saggio di Coulomb sulla statica, Hevelius, Benevento, 1999.

Vincenzo Viviani e Guido Grandi. *Trattato delle resistenze*. Opere Galilei, Vol. 13, Società editrice fiorentina, Firenze, 1855.

[30] La resistenza di AEHF è pari al momento dell'Unghia considerata nella figura 7. Esso è proporzionale all'area della sezione e alla distanza del baricentro dell'Unghia dal fulcro. L'area della sezione, che in questo caso è un cerchio, è proporzionale al quadrato del diametro; la distanza del baricentro è proporzionale al diametro. Quindi il momento dell'Unghia è proporzioanle al cubo del diametro. Il peso di AEHF dipende dalla quinta potenza di HA, la distanza del baricentro da EF varia linearmente con HA. Il momento di AEHF varia quindi con la sesta potenza di HA, ovvero con il cubo di EF.