

**IL CONTRIBUTO FONDAMENTALE
DI GIOVANNI SCHIAPARELLI E GIUSEPPE COLOMBO
ALLA DETERMINAZIONE DEL
PERIODO DI ROTAZIONE DI MERCURIO**

ALESSANDRO MANARA
Osservatorio Astronomico di Brera

1. Introduzione

Da circa un paio di anni è stata approvata dall'ESA la missione BepiColombo, che consiste nel lanciare una sonda verso il pianeta più vicino al Sole (Fig.1).



Fig. 1 – Mercurio fotografato dalla sonda della NASA Mariner 10.

La sonda impiegherà, secondo il progetto iniziale, due anni e mezzo ad arrivare a destinazione e rimarrà in orbita intorno a Mercurio per un anno con un tempo totale di missione di tre anni e mezzo. La missione, che vuole ricavare una miriade di dati estremamente interessanti, è stata denominata in onore di Giuseppe Colombo (Fig.2), uno dei più celebri meccanici celesti italiani del ventesimo secolo.

In questo articolo ricordo alcuni studi del famoso scienziato relativi al moto di Mercurio; tale ricerche sono state il proseguimento di quelle altrettanto importanti portate a termine da Schiaparelli circa ottanta anni prima sullo stesso argomento.



Fig. 2 – Il Prof. Giuseppe Colombo.

2. Prima di Schiaparelli

Il primo che ha determinato il periodo di rotazione di Mercurio, pur non avendo a disposizione strumenti osservativi molto potenti, è stato Giovanni Jeronimo Schroeter (Schroeter, G.G., 1803), che pubblicò anche le sue osservazioni da cui aveva ricavato i risultati. Il valore errato del periodo trovato da Schroeter è stato pubblicato per quasi cento anni in tutti i libri di astronomia.

Schroeter aveva notato che osservando Mercurio per due giorni consecutivi alla medesima ora del giorno solare si trova essere identico il suo aspetto, vedendosi le stesse macchie, chiare ed oscure, occupare approssimativamente il medesimo luogo del disco apparente. Aveva inoltre notato che dopo un intervallo di due, tre o quattro giorni solari completi la differenza di aspetto non è molta, tenendo conto della diversa forma ed ampiezza della fase visibile. In particolare Schroeter notò, come Schiaparelli alcuni decenni più tardi, una macchia nettamente troncata (Fig.4) nell'emisfero australe di Mercurio che si presentava più o meno nello stesso posto a giorni successivi. Tale fatto si poteva spiegare in tre modi: 1) che il pianeta compisse una rotazione completa in circa 24 ore 2) che il pianeta compisse due o più rotazioni complete nel medesimo intervallo 3) che il pianeta avesse una rotazione molto lenta da non riuscire apprezzabile la variazione da un giorno all'altro, con quel tipo di osservazione. Schroeter, influenzato probabilmente anche dal valore del periodo di rotazione della Terra e di Marte di circa un giorno, credette di trovare più verosimile alle sue osservazioni la prima ipotesi. Inoltre Schroeter riteneva che il diverso splendore delle regioni polari di Mercurio fosse dovuto alla presenza di altissime montagne (oltre 20 km). Bessel (Bessel, F.W., 1813), analizzando profondamente le osservazioni di Schroeter determinò la rotazione di Mercurio in 24 ore 0 minuti 52,97 secondi; trovò inoltre che l'asse del pianeta doveva essere inclinato sul piano orbitale di 70 gradi.

3. G. Schiaparelli

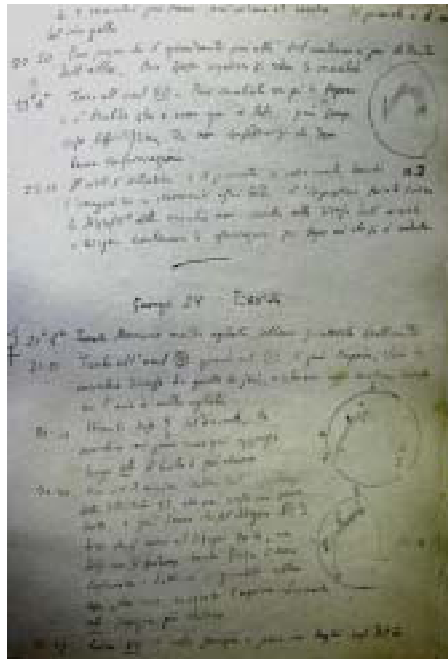


Fig. 3 – Uno dei 150 disegni di Schiaparelli eseguiti da osservazioni del pianeta Mercurio. (Archivio Osservatorio Astronomico di Brera).

Schiaparelli (Schiaparelli, G., 1889, a) incomincia ad osservare Mercurio nel 1881 col Merz di 22 cm e, avendo ottenuto risultati incoraggianti, all'inizio del 1882 prende la decisione di fare uno studio regolare del pianeta. Da quel momento fece centinaia di osservazioni e per oltre 150 volte vide delle macchie o particolari degni di nota; da questo studio uscirono 150 disegni fino al 1889 (Fig.3), ma con il maggior numero nel biennio 1882-1883, durante il quale Schiaparelli seguì Mercurio con una certa continuità per sette rivoluzioni sinodiche; già nel 1884 avrebbe potuto pubblicare i suoi risultati ma il desiderio di poterli verificare col nuovo rifrattore di 49 cm (messo a punto nel 1886) lo indusse a ritardare la discussione dei dati e dei disegni ottenuti fino al 1889. L'osservazione di Mercurio non può essere fatta durante una notte completa ed anche durante i crepuscoli riesce assai difficoltosa essendo il pianeta molto basso sull'orizzonte. Per questo Schiaparelli dovette fare le sue osservazioni col Sole sull'orizzonte. Le

osservazioni sono state fatte in tutte le fasi della rivoluzione sinodica del pianeta, con due interruzioni corrispondenti alla congiunzione inferiore e superiore. Da queste osservazioni Schiaparelli ricavò, come Schroeter, il seguente fatto fondamentale: osservando Mercurio per due giorni consecutivi alla medesima ora del giorno solare, trovò essere identico il suo aspetto, e vide le stesse macchie occupare circa il medesimo luogo del disco apparente; aumentando l'intervallo a due, tre o quattro giorni solari completi, la differenza non era molta. Ciò risultò anche dalle più recenti osservazioni di de Ball (de Ball, L., 1882).

Come abbiamo visto l'interpretazione di questi risultati portò Schroeter e Bessel a optare per un periodo di rotazione di Mercurio vicino alle 24 ore. Ma Schiaparelli non si fermò qui; infatti, osservando ripetutamente il pianeta nel corso di una stessa giornata ad intervalli qualsiasi di parecchie ore, trovò ancora che il suo aspetto non era cambiato e lo stesso avveniva quando si ripetevano le osservazioni in due giornate consecutive, ma ad ore notevolmente differenti in modo che l'intervallo fosse sensibilmente maggiore o minore di 24 ore. Questo fatto era in aperta contraddizione con la rotazione calcolata da Schroeter ed anche che il pianeta compisse due o più rotazioni nel medesimo intervallo. Quindi per Schiaparelli la rotazione di Mercurio non durava nè un giorno nè una frazione di giorno, ma avveniva con molta lentezza. Esaminando ancora più dettagliatamente le sue osservazioni Schiaparelli dimostrò che Mercurio ruota intorno al Sole presso a poco nello stesso modo della Luna intorno alla Terra, presentando cioè al Sole (in generale con qualche oscillazione) costantemente il medesimo emisfero della sua superficie. Questo dà immediatamente e senza ulteriori calcoli la durata della rotazione di Mercurio uguale a quella della sua rivoluzione siderale, cioè 87.9693 giorni. Data la poca precisione delle osservazioni, Schiaparelli non riuscì a determinare con una certa precisione la direzione dell'asse rotatorio. Schiaparelli però riuscì a dimostrare che la rotazione di Mercurio era uniforme; questo fatto, combinato con la grande eccentricità dell'orbita, dà origine ad una forte librazione in longitudine rispetto al raggio vettore, della quale il periodo è di 88 giorni e la cui ampiezza totale è 47 gradi e 21 primi (il doppio della massima equazione del centro). Questa è la causa dell'avvicinarsi e dell'allontanarsi periodico delle macchie rispetto ai limiti orientali ed occidentali del cerchio d'ombra. Le macchie si presentavano quasi sempre sotto forma di striscie d'ombra estremamente leggere (Fig.4).

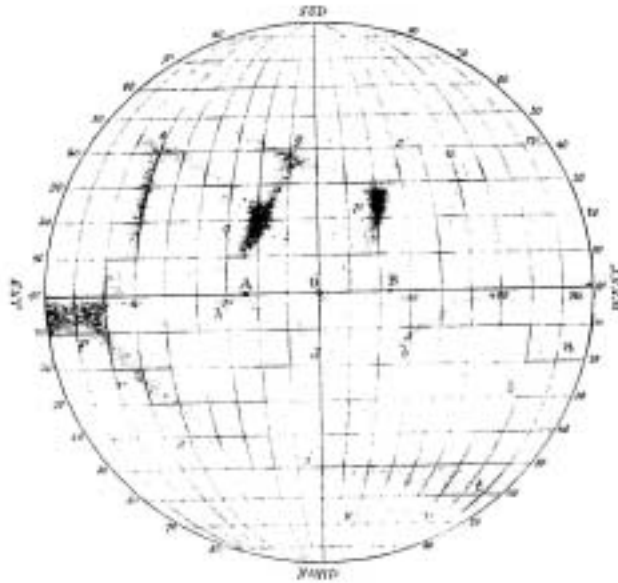


Fig. 4 – Planisfero di Mercurio ottenuto da Schiaparelli da osservazioni di forme e strisce sul pianeta.

L'ombra f e la cuspidè b sono mostrate talvolta piÙ forti delle altre, ma piÙ di tutte la macchia q, di cui si è giÀ parlato. Schiaparelli comunque affermò di credere che la indeterminazione di contorni nelle macchie di Mercurio fosse nella maggior parte dei casi dovuta a pura apparenza, cagionata da insufficiente potere ottico dello strumento. A questo punto si azzardò però a supporre, molto erroneamente, che le macchie in prossimità del lembo spariscono per il fatto che nel pianeta ci sarebbe un'atmosfera di notevole densità e di imperfetta trasparenza. Riguardo all'apparente troncatura del corno sud (Fig.4) Schiaparelli lo collegò a un diverso splendore delle regioni polari, mentre Schroeter credeva, come abbiamo detto, di dover supporre su Mercurio la presenza di altissime montagne.

Del resto piÙ volte Schiaparelli (Schiaparelli, G., 1889, b) si preoccupa di farci sapere le difficoltà che si hanno nell'osservazione di Mercurio, specialmente nel periodo crepuscolare prima o dopo il tramonto del Sole; infatti in tali circostanze il pianeta presenta ad occhio nudo una forte scintillazione (per la qual ragione gli antichi lo chiamavano Stilbon, cioè il scintillante), mentre al telescopio appare incerto e fiammeggiante.

Comunque con il nuovo grande Rifrattore Equatoriale, potuto avere grazie all'Accademia dei Lincei e a Quintino Sella, riuscì ad ottenere risultati "più importanti e più pregevoli, che con esso siansi finora ottenuti".

Sulla presenza dell'atmosfera su Mercurio Schiaparelli insiste a lungo, anzi afferma finalmente di avere prove di essa "molto prossime alla certezza". Tale atmosfera sarebbe meno trasparente di quella di Marte e più simile a quella della Terra. Schiaparelli fa una riflessione sulla sua (errata) scoperta che Mercurio rivolge sempre la stessa faccia verso il Sole: fin dall'antichità si sa che la Luna ha sempre mostrato alla Terra il medesimo emisfero ed è testimoniato da Dante "quando parla di Caino e le spine" e da Plutarco nel suo opuscolo intitolato "Della faccia che si vede nel disco della Luna". Inoltre sappiamo, continua Schiaparelli, che anche per gli altri satelliti del Sistema Solare questo fatto è norma generale mentre per Mercurio è eccezione fra i pianeti. Tale eccezione è probabilmente connessa al fatto della gran vicinanza di Mercurio al Sole.

Schiaparelli tornò a scrivere su Mercurio un paio di decenni più tardi (Schiaparelli G., 1909) in seguito ad alcune macchie osservate sul pianeta da Deloges (Deloges, J., 1908). Egli fece il confronto di questa osservazione (Fig.5) con la carta di Mercurio da lui stessa disegnata servendosi delle osservazioni fatte con i due telescopi di Brera ed interamente fondata sul fatto che Mercurio compisse la sua rotazione in un periodo esattamente uguale a quello della rivoluzione siderea con moto angolare uniforme. La verifica di un tale fatto era per Schiaparelli di fondamentale importanza per la cosmogonia planetaria e per lo studio degli effetti delle maree. Questo confronto venne fatto da Schiaparelli in modo geometrico e cercando di tenere conto di tutti i minimi particolari; io mi limiterò ai risultati.

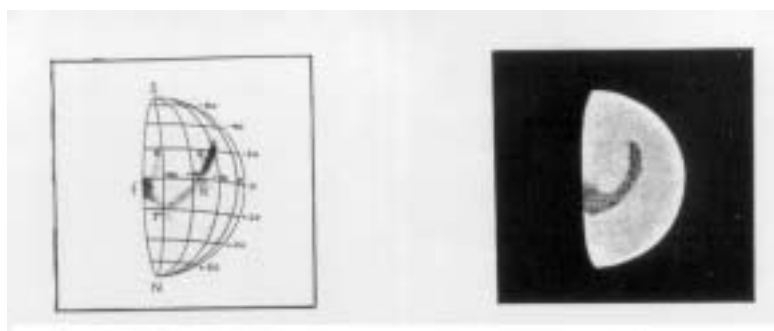


Fig. 5 – Osservazioni di Mercurio effettuate da Desloges nel 1908.

Dei quattro gruppi principali da individuati da Schiaparelli, Desloges

vide quei due che riuscivano allora visibili nelle date condizioni d'illuminazione e di fase; di queste poi notò solo i nuclei più oscuri, ma non le ramificazioni più pallide ed incerte. Era evidentissima la macchia principale designata con qh sul planisfero (Fig.4); questa è certamente una delle cose più visibili del pianeta; anche Desloges la chiama *très foncée*. In un punto solo il disegno di Desloges discordava in modo sensibile dalla carta: la distanza della macchia q dalla parte più vicina del lembo circolare del pianeta.



Fig. 6 – L'importanza data alla scoperta di Schiaparelli sul valore del periodo di rotazione di Mercurio uguale a quello di rivoluzione è messo in evidenza da molti giornali internazionali dell'epoca. A titolo di esempio un giornale tedesco.

4. Dopo Schiaparelli

Dopo che Schiaparelli concluse definitivamente che la rotazione di Mercurio era uniforme con un periodo uguale a quello orbitale di 88 giorni, scoperta che provocò grande risonanza in tutto il mondo (Fig.6), fino alla primavera del 1965 tutte le osservazioni furono interpretate in modo che la rotazione del pianeta fosse di 88 giorni. Danjon (Danjon, A., 1924) affermò inequivocabilmente, ma in maniera del tutto illogica, senza uno studio accurato delle proprie osservazioni, che il periodo di rotazione di Mercurio era 88 giorni. Dieci anni più tardi Antoniadi (Antoniadi, E.M., 1934) affermò ancora più decisamente che il valore di questo periodo era fuori discussione. Tuttavia Antoniadi trascurò nelle sue dimostrazioni i dettagli dei suoi disegni mettendo a disposizione solamente una tavola indicante il numero di volte che egli aveva osservato le numerose strutture di riferimento

sulla superficie.

Più recentemente Dollfus (Dollfus, A., 1953), confrontando i disegni di Schiaparelli con i propri, concluse che il periodo di rotazione di Mercurio uguagliava il suo periodo orbitale "*con una precisione maggiore di una parte su diecimila*" dal momento che le strutture di ciascun disegno coincidevano "*dentro 10 gradi della longitudine hermocentrica*", essendo i disegni stessi separati da "*53 anni o 220 rivoluzioni di Mercurio*". È difficile appurare il significato di questa asserzione per due ragioni: (1) la zona delle strutture sui disegni, almeno nel caso di Schiaparelli, presuppone un periodo di rotazione di 88 giorni; e (2) mentre le mappe di Dollfus erano basate sulle osservazioni visuali e fotografiche di Lyot del 1942, quelle di Schiaparelli erano basate su osservazioni di diversi anni nei primi anni 1880 (sebbene i suoi disegni furono pubblicati nel 1889, cioè 53 anni prima delle osservazioni di Lyot). Inoltre Dollfus non considerò le più recenti carte di Rudaux (Rudaux, L., 1928) ed Antoniadi (Antoniadi, E.M., 1934) come indipendenti da quelle di Schiaparelli.

5. G.Colombo e le successive verifiche sperimentali

Le errate supposizioni di Schiaparelli durarono addirittura fino alla fine degli anni sessanta; fino ad allora infatti Mercurio figurava erroneamente nell'elenco degli oggetti in risonanza 1/1, poichè si riteneva che durante il suo cammino orbitale il pianeta mostrasse sempre lo stesso emisfero verso il Sole. Ma se fosse stato così un emisfero avrebbe dovuto essere continuamente esposto ai raggi solari, quindi con temperatura superficiale molto elevata, mentre l'altro emisfero, avvolto da una notte perenne, con temperatura estremamente bassa. È invece stato possibile rilevare, grazie alle osservazioni radio, un eccesso di temperatura nella regione immaginata al buio. D'altronde la convinzione che Mercurio fosse in risonanza singola era così radicata che molti arrivarono persino ad ipotizzare la presenza di una tenue atmosfera in grado di diffondere il calore nell'emisfero oscuro del pianeta. Ma le sempre più accurate osservazioni da terra e l'esplorazione diretta del pianeta effettuate dalle missioni Mariner hanno risolto una volta per tutte la questione: Mercurio è intrappolato nella risonanza spin-orbita 3/2. Più precisamente, poichè $T_{riv} = 87.97$ giorni e $T_{rot} = 58.65$ giorni, segue che $T_{riv}/T_{rot} = 1.4999$ e la risonanza è soddisfatta in maniera accurata ($3/2 = 1.5$). Dunque dopo due rivoluzioni attorno al Sole, Mercurio compie tre rotazioni intorno al proprio asse e tutto il suo globo viene esposto periodicamente al Sole (Fig.7). È interessante notare che, pur essendo conosciuto da migliaia di anni, Mercurio è il pianeta terrestre meno

conosciuto per la difficoltà di osservazione dovuta alla sua vicinanza al Sole (Fig.8).

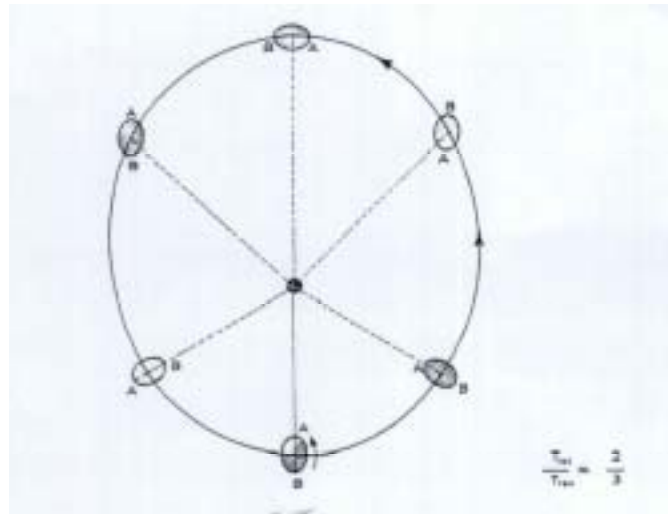


Fig. 7 – Mercurio è intrappolato nella risonanza spin-orbita 3/2. Cioè in due rivoluzioni intorno al Sole, Mercurio compie tre rotazioni intorno al proprio asse.

Tale risonanza però, come vedremo, fu prevista nel 1965-1966, prima della sua verifica osservativa, da uno dei più brillanti meccanici celesti del nostro secolo, Giuseppe Colombo, docente all'Università di Padova, deceduto nel 1984 (Colombo, G., 1965; Colombo, G., 1966; Colombo, G. and Shapiro, I., 1966).

Innanzitutto Colombo studiò i disegni di Schiaparelli, Rudaux, Antoniadi, Dollfus e Lowell per vedere se potevano essere consistenti con un periodo di rotazione di 59 giorni, già approssimativamente (± 5 giorni) trovato per mezzo di osservazioni radar (Pettengill, G.H. and Dyce, R.B., 1965).



Fig. 8 – Mercurio, sebbene conosciuto fin dagli antichi Egizi, è rimasto il meno conosciuto dei pianeti terrestri per la difficoltà delle osservazioni telescopiche (Da G. Flammarion, *Astronomie Populaire*, 1881).

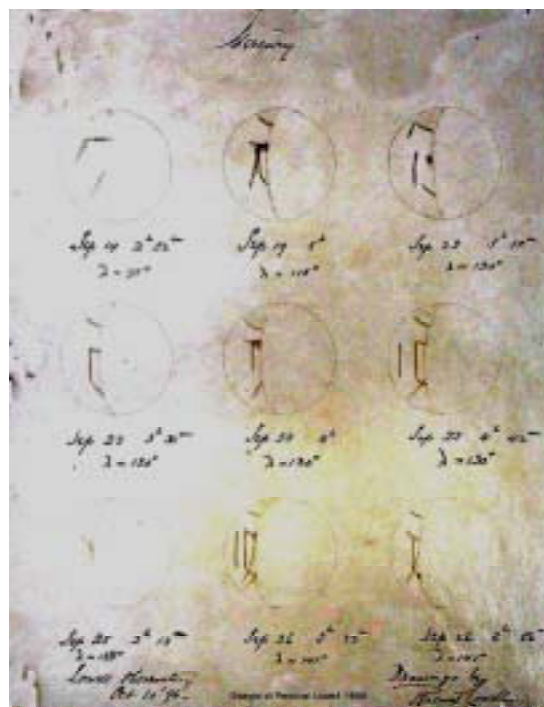


Fig. 9 – Uno dei numerosi disegni di Mercurio eseguiti da P. Lowell dalle sue osservazioni (Archivio Osservatorio Astronomico di Brera).

Colombo si accorse abbastanza presto che i disegni di Lowell (Fig.9) (Lowell, P., 1894), quasi universalmente considerati più come prodotto della sua immaginazione che la reale superficie di Mercurio, non potevano fare parte della sua ricerca. Si soffermò invece molto sui disegni originali a partire da quelli di Schiaparelli pubblicati nel 1899. La rotazione di Mercurio in 88 giorni, scrive Colombo, era basata principalmente sulle osservazioni di una particolare struttura sulla superficie del pianeta, chiamata "q". Tali osservazioni furono fatte durante sei serie di intervalli nel 1882 e 1883. I risultati riassuntivi ottenuti dai dati di Schiaparelli non si accordano sicuramente con un periodo di 59 giorni. Le serie delle sue osservazioni di "q" erano separate approssimativamente di un periodo sinodico (116 giorni). Quindi, se q fosse stato visibile alla fine di questo intervallo, sulla base di un periodo rotazionale di 88 giorni, non avrebbe potuto essere visto al posto "corretto" se il periodo fosse stato di 59 giorni; la differenza angolare delle due posizioni è di circa 125 gradi dopo un periodo sinodico. Quindi Colombo giunge alla conclusione che Schiaparelli abbia erroneamente identificato una stessa struttura vista altre volte. Comunque a Schiaparelli deve essere dato pieno merito per avere con successo infranto il mito del rapido moto di rotazione del pianeta.

Colombo analizzò poi i disegni di Antoniadi, Danjon e Dollfus, facendo speciale attenzione alle serie di disegni fatti a brevi periodi di tempo; però risultò difficile l'identificazione di due strutture separate da più di 10 giorni. Comunque da questo studio preliminare Colombo trovò un periodo di circa 70 ± 15 giorni. Analisi ancora più precise sui dati a sua disposizione lo portarono ad una rotazione di 58.65 giorni. A questo punto però Colombo volle trovare un modello che spiegasse anche dal punto di vista teorico i suoi risultati preliminari. Vedrò di illustrare brevemente il lavoro dello scienziato padovano.

Sebbene non si conoscessero adeguatamente la costituzione e la forma di Mercurio per Colombo fu possibile con un modello dimostrare la stabilità di un periodo rotazionale di Mercurio uguale a $2/3$ del periodo orbitale. Facendo delle semplificazioni al problema (riducendolo a bidimensionale) Colombo descrisse il momento della forza totale esercitata su Mercurio dal Sole come la somma di due parti: un momento di forza mareale ed un momento di forza causato dalla mancanza di simmetria dell'asse di Mercurio. Il primo può essere rappresentato dalla relazione

$$T_t = - \eta/r^6 \operatorname{sgn} (d\theta/dt - dv/dt) \quad (1)$$

dove $d\theta/dt$ è la velocità angolare inerziale diretta di Mercurio intorno al suo centro di massa, dv/dt è la velocità angolare orbitale, \mathbf{k} è un vettore unitario perpendicolare al piano orbitale e diretto in genere verso nord, η è una costante positiva e r è la distanza Mercurio-Sole. Riguardo al secondo termine Colombo trattò per semplicità la simmetria triassiale permanente di Mercurio come un dipolo nel piano equatoriale, sovrapposto ad un pianeta sfericamente simmetrico. Se il dipolo consiste di due punti ciascuno di massa m e ciascuno di distanza d dal centro di massa del pianeta, allora il momento di forza solare risultante è:

$$T_{pq} = - \frac{3GM (B-A) \sin 2(\theta - v)}{2r^3} [1 + O(d/r)] \mathbf{k}$$

dove G è la costante gravitazionale, M la massa del Sole, θ l'orientazione del dipolo rispetto alla linea apsidale dell'orbita, v l'anomalia vera e $B-A=2md^2$ la differenza tra il massimo ed il minimo dei momenti di inerzia che giacciono nel piano equatoriale del pianeta. Con altre semplificazioni Colombo (Colombo et al., 1965) trovò la seguente equazione di moto per il moto di rotazione:

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = - \eta/r^6 \operatorname{sgn}(d\theta/dt - dv/dt) - \frac{3GM (B-A)}{2r^3} \sin 2(\theta - v) \quad (3)$$

dove I è il momento di inerzia attorno all'asse \mathbf{k} . Perché il moto rotazionale sia costante, è richiesto che la media totale del momento di forza svanisca e che, se l'orientazione e la frequenza di rotazione di Mercurio sono perturbate, allora il risultante momento di forza tenda ad opporsi alle perturbazioni. Dopo laboriosi calcoli, dallo stesso Colombo definiti semplici e noiosi, lo scienziato padovano trovò che il secondo termine della (3) si annulla per $(d\theta/dt)/n=3/2$, dove $n = \mu^{1/2}/a^{3/2}$ è il moto medio di Mercurio e $\mu = GM$. Ciò risultava anche dall'integrazione numerica dell'equazione (3) (Fig.10).

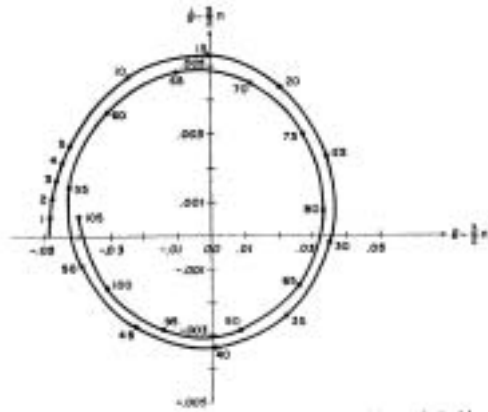


Fig.10 – Un'indicazione della stabilità della rotazione di Mercurio per $(d\theta/dt)/n = 3/2$ ottenuta da un'integrazione numerica dell'equazione (3). I punti indicano le coordinate nello spazio delle fasi dell'asse di minimo momento d'inerzia al particolare passaggio al perielio indicato dal numero che lo accompagna. È stata disegnata una curva continua attraverso questi punti solamente per mettere in evidenza il trend della convergenza.

Nei suoi lavori successivi (Colombo, G. 1971 e Colombo et al., 1976) Colombo allargò i suoi studi scoprendo che la frequenza con cui si incontrano leggi di semplice commensurabilità tra i periodi orbitali e tra i periodi di rotazione e di rivoluzione dei corpi del Sistema Solare era troppo elevata per essere attribuita al caso e che nel caso della grande eccentricità ed inclinazione dell'orbita di Mercurio bisognava tenere presenti anche le risonanze secolari.

6. Bibliografia

- Schroeter, G. J. (1803): Rotation u. Beschaffenh. d. Merkurs usw. *Bode's Jahrb. f.* 1803
 Bessel F. W., 1813: *Berl Astr. Jahrb.*, p. 253
 De Ball, L., 1882: *Astron. Nachr.*, 2479
 Lowell, P., 1894: *Mem. Amer. Acad. Arts Sci.* **12**, 431.
 Schiaparelli, G.V., 1889: Sulla rotazione di Mercurio, *Astron. Nach.*, 2944, p. 243-250
 Schiaparelli, G. V., 1889: *Atti della Reale Accademia dei Lincei, Serie Quarta. Rendiconti. Vol. V, secondo semestre.* Discorso letto nell'adunanza del giorno 8 Dicembre 1889.
 Desloges, J., 1908: *Observations sur les surfaces planétaires*, Vol. 1, Paris, Gauthier-Villars, pg. 113 e pg. 110
 Schiaparelli, G. V., 1909: *Rivista di Astronomia e Scienze Affini*, Anno III, N. 5, Maggio

- 1909, Torino.
- Danjon, A., 1924: *Bull. Soc. Astr. France*, **38**, 91.
- Rudaux, L., 1928, *Bull. Soc. Astr. France*, **42**, 190.
- Antoniadi, E. M., 1934: *La planète Mercure et la rotation des satellites*. Paris Gauthier-Villars
- Dollfus, A., 1953, *Bull. Soc. Astr. France*, 67, 61.
- Colombo, G., 1965: *Nature*, **208**, 574.
- Pettengill, G.H., and Dyce, R.B., 1965: *Nature*, **206**, 1240.
- Colombo, G., 1966: *Amer. Astron. Soc.* N 1, p. 143.
- Colombo, G., Shapiro Irwin I., 1966: The rotation of the Planet Mercury, *Astroph. Journal*, Vol. 145, pg. 296.
- Colombo, G., 1971: *Mem. Soc Astr. It.* Vol. XLII N. 3 pg. 279.
- Ward, W.R., Colombo, G., Franklin, F.A., 1976: Secular resonance, solar spin down and the orbit of Mercury. *Icarus* Vol. 28 pg. 441-452.