LA MECCANICA NELLA FORMULAZIONE DI LAGRANGE: UN ESAME STORICO-CRITICO

Antonino Drago

Univesità di Napoli

1. La prima discussione sui fondamenti di una teoria scientifica già formata

Per molti, a cominciare da Mach (1883, p. 457) la formulazione di Lagrange (1788) rappresenta il culmine della storia della meccanica; Hamilton (1940, p. 104) ci vide addirittura «una specie di poema scientifico»; Hankins (1970, p. 29) ha scritto che Lagrange «ha portato la meccanica razionale alla massima generalità e astrazione che era da raggiungere nell'Illuminismo».

Già Maupertuis e d'Alembert avevano proposto di fondare la teoria meccanica in una maniera nuova rispetto alla teoria newtoniana; ma solo Lagrange propose una riformulazione completa e precisa, dichiarandola alternativa a quella di Newton (p. 220). Si noti che per la prima volta non si trattava di costruire una nuova teoria, ma di rifondare una teoria già completata (e già gloriosa per le sue applicazioni). Questa fu la prima crisi fondazionale, sia pure di tipo propositivo, della meccanica. La domanda cruciale, del tutto nuova, era: «Che significa cambiare i fondamenti di una formulazione già realizzata?».

Una prima risposta venne da Lagrange stesso: aumentare la capacità matematica della teoria. Egli inventò un nuovo potente metodo di calcolo (quello delle variazioni) e portò a risolvere i problemi fisici in maniera apparentemente automatica (pp. I e 14). Il che ha dato «eleganza», facilitazione nei calcoli, capacità di trovare nuove soluzioni (Fraser 1983; Galletto 1991; Capriglione e Drago 1998; Grattan-Guinness 1990, par. 5.2; Capecchi 2002). Però il problema rinasceva quando ci si riferiva alla organizzazione sistematica delle leggi della teoria. Come cambiare un principio basilare senza sconvolgere il complesso sistema delle leggi già acquisite? Fu questo il problema che portò a una vera e propria crisi: come minimo, una «crisi dei principi» (Bailhache 1975, p. 7).

La teoria di Lagrange elenca indicativamente dei principi, senza metterli in ordine logico (pt. I, I); Lagrange afferma che i precedenti principi vengono da lui raccolti assieme per essere unificati sotto un nuovo «unico punto di vista» (p. I); il che non significa un nuovo principio. Né dà importanza ai concetti (spazio e tempo assoluti e forza-causa) che in Newton sono iniziali e fondamentali. Quindi è chiaro che Lagrange non cerca una teoria dedotta dai principi usuali. Lagrange piuttosto dichiara di basarsi sul principio dei lavori virtuali (PLV). Ma a Lagrange il PLV non sembrò abbastanza «evidente» (pt. I, I, 1.18), benché lo si potesse considerare «come una specie di assioma della Meccanica» (p. 12). Secondo la concezione dominante, una teoria scientifica doveva essere organizzata in maniera deduttiva da principi autoevidenti. Allora pensò che occorreva «dedurlo» da altri principi, più semplici e più generali (giustamente Lindt 1904, p. 150, nota il contrasto tra «principio» e «deduzione»). Lagrange poi diede la sua brava dimostrazione (quella delle pulegge; incorporata nella seconda edizione); che però non faceva capire a che cosa di più «evidente» fosse stato ricondotto il PLV (se non alla diminuzione delle variabili in gioco). Al suo seguito, ci furono dimostrazioni del PLV per 50 anni (Poinsot 1975). In realtà la dimostrazione del PLV non riuscì, né a lui né ad altri (Drago 1993). Alla fine, chi si aspettava una nuova organizzazione deduttiva, ebbe la sensazione che questa formulazione portasse a un vuoto teorico, sia pure tecnicamente molto sofisticato ed efficiente; che in definitiva, rappresentasse un salto dalla concretezza della fisica empirica alla astrazione formale.

Nonostante questa insufficiente chiarezza nei fondamenti, da un secolo a questa parte la lagrangiana ha assunto un ruolo dominante nella fisica teorica; tanto da essere proposta come schema teorico per quasi tutte le teorie fisiche (Bunge 1959, pp. 153-172); inoltre col teorema di Noether[1] ha fornito un preciso collegamento con le simmetrie, cioè quella tecnica matematica che, da alcuni decenni a questa parte, è la più importante della fisica teorica.

Ma tuttora restano da chiarire i suoi fondamenti, la natura della sua capacità risolutiva, la sua grande rilevanza teorica.

2. La letteratura sulla lagrangiana e i problemi sollevati

Ci si potrebbe aspettare che la letteratura relativa ai contenuti concettuali e fisici della Lagrangiana sia ampia e che essa sia aumentata di molto da quando questa formulazione è stata usata intensivamente. Invece i commenti sono pochi e dilazionati nel tempo; inoltre sono spesso estemporanei, senza essere collocati in un quadro di riferimento (salvo quello di Mach 1883)[2]. Un lavoro precedente li ha elencati e riassunti in una tabella (Capriglione e Drago 1998, p. 90).

Essi sono disparati e non rispondono che ad alcuni dei molti problemi che la formulazione lagrangiana solleva: 1) la sua astrazione sin dal suo sorgere, e addirittura la poca chiarezza della derivazione per ottenerla; per Grattan-Guinness (1990, p. 325) è «un esercizio più che ambizioso». 2) Il reale significato del metodo dei moltiplicatori; Gaskill e Arestein (1969, p. 93) dicono: «Molte presentazioni attuali dei moltiplicatori [...] sono [...] spesso 'quasi analitiche', non rigorose e lontane dal

[1] E. Goldstein, *Analytical Mechanics*, Addison Wesley, New York 1980, pp. 588 e ss.

[2] Occorre aggiungere una valutazione sulla meccanica analitica, di cui la lagrangiana è il primo esempio: quella di Lanczos (1968). Pur essendo ben appropriata e incontrovertibile, è raramente tenuta presente, quasi che non abbiano importanza le differenze, qui messe in luce, tra le varie formulazioni della meccanica. Le innovazioni della meccanica analitica, rispetto a quella newtoniana sono: 1) studiare un sistema nel suo complesso, invece che il punto-massa individuale; 2) considerare invece di una forza motrice separata per ogni particella in moto, una funzione (la funzione lavoro o l'energia potenziale); 3) non considerare le forze vincolari; 4) sviluppare l'intero insieme di equazioni del moto da un principio unitario, che minimizza una certa grandezza, la 'azione' (p. 6), la quale può essere espressa in coordinate generalizzate (p. 12); 5) la grandezza di primaria importanza non è la forza, ma il *lavoro* compiuto dalle forze impresse su spostamenti infinitesimi arbitrari. (p. 31).

problema fisico [...]. Si sono persi i ragionamenti geometrici usati in origine da Lagrange e da altri». 3) Se la funzione lagrangiana, L = T-V, sia una grandezza fisica; il segno -, invece del +, la rende essenzialmente astratta dal punto di vista fisico; a molti questa «piccola» differenza sembra una sfida per trovarne un significato fisico (ad esempio, la si definisce come «l'eccesso di energia cinetica su quella potenziale»); però, dopo due secoli, ormai vari autori sottolineano che la lagrangiana non ha a che fare con l'energia, anche se ha le dimensioni di una energia. 4) Se la formulazione lagrangiana sia equivalente o no alla formulazione newtoniana (ne discute Truesdell 1968; 5) se no, da che derivi la sua novità. 6) Il significato dell'innovazione del calcolo variazionale. 7) Il significato dell'aver eliminato la geometria dalla meccanica. 8) Da dove derivi la sua capacità di ridurre la meccanica a una branca dell'analisi infinitesimale (secondo Brunschvigc 1949, p. 322, Lagrange volle «fare della meccanica ciò che Cartesio aveva fatto della Geometria, una serie di operazioni analitiche»). 9) Il significato dell'introduzione dell'energia potenziale. 10) La sua sorprendente capacità di risolvere facilmente una miriade di problemi; a proposito Scott (1988, p. 451) parla di «una bacchetta magica»; 11) e di risolvere anche i problemi al di fuori della meccanica (qui c'è una discussione importante di M. Bunge 1959; in particolare, il brano di p. 170). 12) Perché essa sia la formulazione più adatta alle simmetrie nella fisica teorica. 13) Quali siano i limiti dell'applicazione della lagrangiana.

3. Le insufficienti valutazioni

Proseguiamo indicando, a mo' d'esempio, la letteratura sul primo problema. Rispetto al lavoro precedente (Capriglione Drago 1998), una novità è data dal recente articolo di Pulte (1998), che ha riscoperto le osservazioni critiche di Jacobi (1845). Questi in un primo tempo era stato entusiasta per la lagrangiana, poi scrisse:

> La *Meccanica Analitica* è un libro con il quale bisogna avere attenzione, poiché alcuni suoi risultati sono soprannaturali, piuttosto che basati su dimostrazioni rigorose. Ma bisogna essere prudenti, se non si vuole essere delusi e finire nella convinzione ingannevole di avere dimostrato qualcosa che in realtà non è dimostrabile. Ci sono solo pochi punti che non nascondono gravi difficoltà; ho avuto degli studenti che hanno capito la *Meccanica Analitica* meglio di me, ma a volte non è un buon segno aver capito qualcosa» (Pulte 1997, p. 48).

> qui si vede una pura operazione matematica come un perfetto parallelo delle cose che avvengono nella natura, [ma] questo è stato sempre il compito usuale della matematica applicata [...]. Qui chiaramente la meccanica analitica non ha nessuna giustificazione [empirica]; anzi essa abbandona l'idea della sua giustificazione, per rimanere una scienza matematica pura (Pulte 1998, p. 178).

L'origine concettuale della formulazione lagrangiana è poi rimasta un problema anche per Mach (1872, pp. 32 e 35) che la commenta a lungo e ci vede il principio dell'impossibilità del moto perpetuo; ma senza spiegare a sufficienza la derivazione da esso, anche perché non sa decidersi sulla natura del PLV: se questo sia un principio di teoria deduttiva, o che.

Oggi i fisici teorici (si veda ad esempio Boudri 2002, pp. 224-225) tendono a vedere le equazioni di Lagrange come costituenti un principio posto *a priori*; perché essi riducono la formulazione alla sua sola parte applicativa, quella dalle equazioni di Lagrange in poi. Ma la derivazione delle equazioni lagrangiane fa parte essenziale della sua formulazione; perciò essi forzano Lagrange a una concezione che non aveva, quella assiomatica sviluppata da una equazione data a priori.

D'altronde si ammette (Scott 1988) di non capire il percorso concettuale che porta alla lagrangiana. La sua derivazione non ha una spiegazione secondo degli obiettivi chiari, posti sin dall'inizio; ci si incammina in un percorso matematico che si chiarisce solo alla fine, quando si applica il risultato (le equazioni di Lagrange) a un problema; infatti il risultato funziona meravigliosamente; ma da dove provenga questa capacità meravigliosa non si sa bene (una «bacchetta magica»!)[3].

4. Critica alle osservazioni critiche

A mio parere, il ritardo e la insufficienza della letteratura in proposito sono causati da una serie di punti basilari nella fisica teorica che restano oscuri agli studiosi:

1) I principi della formulazione di Newton non sono criticati con precisione; a mio parere la letteratura sull'argomento ha un punto di eccellenza (più che nel valoroso testo pionieristico di Mach 1883) nel lavoro di Hanson (1985); che però non è molto citato.

2) Secondo un diffuso pregiudizio (anche di Mach 1883, pp. 291-300), le diverse formulazioni di una teoria fisica sono tutte equivalenti, salvo differenze tecniche; con ciò, da una parte si riduce la matematica a un semplice strumento, privo di valore culturale; e dall'altra si assume che la organizzazione di ogni teoria sia necessariamente deduttiva. In realtà, vedremo in seguito che esistono alternative, sia nella matematica che nella organizzazione della teoria.

3) Non si sa come valutare il punto di partenza della Lagrangiana, che è il principio di d'Alembert (la cui formula per di più, è stata stravolta da Lagrange). Su di esso i pochi commenti in letteratura sono o equivoci, o perplessi (Truesdell 1960, pp. 186-192). In realtà quel principio ha senso solo se inteso come PLV. (Drago 1999).

4) Ma i testi di meccanica razionale sono manifestamente in disaccordo sulla definizione precisa e sullo stato logico del PLV (Capriglione e Drago 1994); «Il PLV è uno dei più oscuri postulati della meccanica» (Casey 1994, p. 836). Per molti studiosi esso è un teorema; ma già Jacobi sosteneva che il PLV è «una proposizione senza dimostrazione», perché «nessuna dimostrazione è possibile» (Pulte 1988, p. 165); e anche per Duhem (1905, pp. 62-63) il 2° principio di Newton «diventa

[3] Nella recente letteratura un autore (Casey 1994, p. 836) ha distinto quattro maniere di derivare la lagrangiana (dalla seconda legge di Newton, dal principio di d'Alembert e il principio dei lavori virtuali, dai principi variazionali, mediante la geometria differenziale e il calcolo tensoriale). In realtà la prima derivazione (Whittaker 1904, vol. II, p. 26), usando poche parole dette di corsa, seleziona le sole forze utili; il che è una operazione tipicamente d'alembertiana. La stessa operazione fanno le altre derivazioni. Quindi tutte usano il concetto di reazione vincolare e sono basate sul Principio di d'Alembert (PdA); o meglio, sul PLV. Quindi sono delle varianti, o di tipo matematico o verbali, di un'unica linea di ragionamento. Quindi la indicazione di Casey, di quattro distinte derivazioni, è deviante.

insufficiente se si vuole, con Lagrange, trattare i corpi con dimensioni finite, contigui gli uni agli altri e sottoposti a vincoli vari»; non è un teorema per Levi Civita e Amaldi (1971, p. 309), né per Sommerfeld (1961, p. 55). A mio parere, il PLV è un principio indipendente dai principi di Newton (perché esprime la impossibilità del moto perpetuo nel caso dei vincoli); come tale è il principio metodologico di una teoria problematica (Drago 1993)[4].

5) Non si sanno indicare i fondamenti di una teoria fisica. In precedenza li ho individuati in due opzioni (Drago 1991). Con essi procederò a interpretare la formulazione lagrangiana.

5. Le due scelte fondamentali della meccanica di Lagrange

Una delle opzioni fondamentali riguarda il tipo di matematica: o quella delle equazioni differenziali (come in Newton e in Lagrange) o quella algebrica (come in L. Carnot e in termodinamica); più precisamente, o la matematica classica, che usa concetti con l'infinito in atto (IA); cioè: gli infinitesimi, la precisione assoluta nel determinare il limite di una serie, l'assioma di Zermelo; oppure la matematica costruttiva, che si limita a ciò che è costruibile e operativo, cioè al solo infinito potenziale (IP) (Bishop 1967, De Martino e Drago 2002). L'altra opzione fondamentale è sul tipo di organizzazione: o interamente deduttiva da principi-assiomi (OA), come è nella meccanica di Newton; oppure basata su un problema fondamentale (OP), di cui si cerca un nuovo metodo scientifico di soluzione (come è nella termodinamica di L. Carnot, che cerca un nuovo metodo per determinare la efficacia nelle trasformazioni calore-lavoro).

Newton aveva scelto di organizzare la sua teoria deducendola dai famosi tre principi; lo dichiarò sin dal titolo del suo libro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*; inoltre usò l'analisi infinitesimale degli infinitesimi in atto. Quindi le sue scelte sulle opzioni sono OA e IA. Esse furono culturalmente così forti sui fisici teorici, da costituire un vero e proprio paradigma, che ha dominato nel sec. XVIII e oltre (Drago 1987).

La teoria di Lagrange invece ha affrontato una situazione del tutto nuova; i vincoli delimitano i campi di variabilità delle coordinate cartesiane e lasciano ipotizzare ulteriori forze, le loro reazioni, tutte da precisare. Quindi la teoria di Lagrange si sviluppa attorno a un nuovo problema generale: come teorizzare sui sistemi vincolati (Lagrange 1788, p. 220); perciò cerca un nuovo metodo scientifico rispetto a quelli fino allora noti.

Di fatto, Lagrange fornisce il metodo cercato. Egli affronta la prima difficoltà: siccome le variazioni delle coordinate cartesiane sono limitate dai vincoli, rendono difficile l'uso dell'analisi infinitesimale. Allora egli sviluppa un metodo matematico (moltiplicatori) per individuare nuove coordinate, quelle generalizzate, che non hanno più limitazioni. Poi egli formula in modo nuovo la versione matematica del

[4] Un'ulteriore prova di ciò è il fatto che il PLV, a differenza di $f=ma$, è indipendente dal 5° postulato di Euclide; nel caso particolare dell'urto, lo è perché i vettori delle forze o delle variazioni delle quantità di moto sono applicati nello stesso punto (Adler 1966, pp. 228 e ss.); de Tilly ha dimostrato il caso generale (1870, par. 5.1).

PLV, in modo da ottenere una nuova capacità teorica, tale da poter risolvere il problema generalissimo: risolvere ogni problema meccanico in maniera uniforme.

In totale, Lagrange conferma la scelta IA e la fa avanzare con il calcolo variazionale. Ma introduce una scelta nuova che cambia radicalmente il punto di vista newtoniano; la OP invece della OA. Questa coppia di scelte costituisce un modello di teoria scientifica (MTS) nuovo, del quale la sua teoria è rimasto l'esempio più importante. Quindi Lagrange ha effettivamente cambiato i precedenti fondamenti della teoria meccanica della fisica teorica.

Un autore recente (Pulte 1998, pp. 155 e ss.) discute a lungo la teoria lagrangiana per caratterizzarla come un «mathematical instrumentalism». Questa formula approssima le due scelte fondamentali di Lagrange, ma in maniera confusa; infatti il «mathematical» dovrebbe indicare in più una particolare matematica, quella dell'IA; inoltre la valutazione di «instrumentalism» è una semplice allusione a una OP, lasciando aperta la possibilità a molte altre interpretazioni. Comunque l'autore si riscatta con le considerazioni finali (p. 180) che esprimono bene la sua intuizione del passaggio da OA a OP, effettuato da Lagrange e apprezzato da Jacobi.

Ma in quel tempo il cambiamento nei fondamenti era totale. Qualche anno prima era nata la formulazione di L. Carnot (1783, Drago, Manno e Mauriello 2001; Drago in press), fondata (come la sua geometria e la sua analisi) sulle scelte OP e IP. Infatti questa teoria è basata sul PLV e questo principio è tipico di una teoria OP, perché risponde al problema universale di come teorizzare in presenza di vincoli. Carnot deriva dal PLV le due equazioni fondamentali, e ne ricava le leggi di conservazione, che poi sono risolte solo nelle velocità; il tutto all'interno di una matematica che è solo algebrico-trigonometrica, senza le equazioni differenziali; quindi la sua matematica è IP.

Allora è utile tenere presente ambedue le nuove formulazioni per notare che il cambiamento delle scelte newtoniane è stato iniziato radicalmente da L. Carnot; poi è stato confermato da Lagrange, con la sola scelta dell'OP. Quindi la natura della crisi della meccanica di quel tempo è ben più profonda che una «crisi dei principi». Di questa sono naturali conseguenze i cambiamenti concettuali che gli storici moderni conoscono bene, apportate dalla lagrangiana e soprattutto dalla formulazione di L. Carnot; ad esempio, il concetto di forza-causa è trascurato da Lagrange ed è criticato ed escluso da L. Carnot.

Alla luce di ciò, la storia della meccanica dei secoli XVII e XVIII non è più unidimensionale, ma ora è articolata in tre linee, corrispondenti ai tre MTS suddetti e già individuate intuitivamente da Drago e Manno che le hanno rappresentate con una tabella (1994, p. x). La linea in basso rappresenta la tradizione IA e OA; la prima e la seconda linea rappresentano la tradizione IP e OP; che viene mantenuta dalla sintesi compiuta da L. Carnot su queste due tradizioni; mentre invece Lagrange con le scelte OP e IA media tra le due tradizioni della seconda e della terza linea.

6. La meccanica di Lagrange interpretata con le frasi alla Koyré

Precedenti lavori hanno confrontato la formulazione di Lagrange con quella di Newton (Capriglione e Drago 1998; Drago, Manno e Mauriello 2001): più potente matematicamente, ma con concetti basilari sostanzialmente ambigui.

Nei secoli passati i fisici, in mancanza di meglio, hanno concepito i fondamenti di una teoria fisica mediante aspetti sintetici e intuitivi, espressi tramite dei concetti intuitivi e di immediata apprensione (ad esempio la forza-causa; Drago 1991); i quali in realtà traducevano e sintetizzavano le scelte fondamentali (ad esempio nella meccanica OA la forza è il concetto teorico cruciale). A questo stesso livello si è collocata la storiografia di Koyré (1966), il quale ha interpretato la nascita della scienza moderna mediante cinque concetti, che formano le sue categorie interpretative: «Dissoluzione del cosmo finito e geometrizzazione dello spazio».

Altrove (Drago 2001) ho mostrato che queste categorie traducono le quattro possibili scelte fondamentali, due in un rifiuto del passato e due in una proposta programmatica. Infatti le prime tre parole possono ben rappresentare la negazione delle due scelte tipiche dei Greci; la loro volontaria limitazione al finito, e quindi la scelta IP, espressa dal «cosmo finito», con riferimento al principale ente fisico; la loro tradizionale organizzazione della scienza della realtà, che era basata sui grandi «Perché?» (e quindi sulla scelta OP) è rifiutata dalla parola «dissoluzione», che è l'inverso di una organizzazione. Le altre due parole di Koyré costituiscono un programma: operare nello spazio cartesiano, inteso come il contenitore-organizzatore di tutti i fenomeni fisici; quindi la scelta OA. In più, usare intensivamente la matematica per spiegare i fenomeni; qui Koyré parla della geometria, che effettivamente fece nascere la prima teoria fisica, l'ottica geometrica; ma dopo di essa, Newton stabilì la teoria che fece epoca, la meccanica, mediante l'analisi degli infinitesimi in atto, che da allora creò una tradizione matematica dominante; quindi in realtà la scelta è IA.

Riassumendo, possiamo formalizzare il legame tra le categorie di Koyré e le scelte fondamentali mediante la espressione seguente:

«Dissoluzione (-OP) del cosmo finito (-IP) e geometrizzazione (IA) dello spazio (OA).» (a)

Alla fine del precedente paragrafo ho ricordato che le due scelte alternative a quelle di Newton nascono con la meccanica di L. Carnot. Ripetendo su di esse la traduzione di Koyré (Drago 1994), si trovano le categorie seguenti, valide per le teorie alternative:

«Evanescenza (-IA) della forza-causa (-OA) e discretizzazione (IP) della materia (OP)» (b)

Passiamo a Lagrange. Delle due sue scelte, una, l'IA, ripete una scelta di Newton; l'altra, l'OP, ripete una scelta di L. Carnot. Allora cerchiamo se le precedenti categorie *(a)* e *(b)* si applichino alla meccanica di Lagrange. Si vede subito che la prima parte delle *(a)* non corrisponde alla lagrangiana; mentre invece la seconda parte sì; purché le due parole siano espresse con più precisione. Non «geometrizzazione», perché Lagrange ha escluso la geometria; ma l'analisi, che lui ha usato molto e ha fatto avanzare; allora qui occorre dire proprio «analisizzazione» (anche se la parola è brutta). Inoltre lo «spazio» non è quello geometrico, ma lo «spazio» astratto di tutta la fisica teorica, ormai composta da più teorie, tutte sussumibili nella lagrangiana.

Passando alle categorie *(b),* notiamo che la seconda parte non corrisponde alla Lagrangiana; mentre invece, la prima parte sì: il concetto centrale della OA di Newton, la forza-causa; ma non ha rilevanza in Lagrange, in quanto non è il concetto introduttivo a una organizzazione deduttiva; non svanisce, perché resta come una funzione delle coordinate, cioè come un concetto utile alla matematica IA.

In conclusione, possiamo allora proporre per Lagrange una espressione che prende metà delle categorie *(a)* e metà delle categorie *(b)*; e le riunisce in nuove categorie, riqualificandone le parole a un livello superiore:

«Trascuratezza (-IP) per la forza-causa (-OA)
e analisizzazione (IA) della fisica teorica (OP)» (c)

Esse risultano ben adeguate all'atteggiamento teorico di Lagrange. Che, proprio per aver cavalcato due atteggiamenti opposti, differenti anche storicamente, alle volte appare ambiguo. Anche perché la sua scelta forte per la matematica IA, nella *Mécanique* è in qualche modo ambigua; contrasta con il suo tentativo (*Fonctions analytiques*, 1797) di rifondare il calcolo infinitesimale senza infinitesimi, sulla sola algebra. Nella prefazione della seconda edizione (p. IV) si esprime su questo punto, ma con un periodo ambiguo: basta avere «familiarità» col suo calcolo per passare a quello solito; il che svaluta la sua riformulazione.

I contemporanei non apprezzarono la teoria di L. Carnot perché questa aveva concetti (macchine!) molto diversi da quelli newtoniani; la svalutarono come «fisica tecnica» (di cui in effetti è stata sempre riconosciuta come la teoria iniziale). Né considerarono la lagrangiana al di fuori dal paradigma concettuale newtoniano. Per farlo, avrebbero dovuto riflettere sulla organizzazione della teoria: un aspetto della fisica che può apparire solo filosofico. Chi l'aveva studiato, d'Alembert (1754, p. 411), aveva proposto come alternativa alla OA una organizzazione «empirica»; ma nulla più della teoria di Lagrange era lontano da una teoria empirica.

Poi Mach (1883, p. 487) la esalta come massima rappresentazione teorica della sua idea interpretativa della storia della fisica: la «economia del pensiero»; la quale idea è una risposta al problema di come lavori la mente (scientifica) umana; cioè esprime soggettivamente una OP.

Cosicché si è realizzata una convergenza equivoca, tra chi apprezzava la lagrangiana solo per l'uso nuovo e intensivo della matematica, e chi, come Mach, noto scienziato alternativo al paradigma newtoniano, lo apprezzava per una sua filosofia. La convergenza ha rappresentato un tacito accordo di non belligeranza tra le due percezioni contrapposte di allora (meccanicisti ed energetisti) sui fondamenti della fisica; accordo che perdurerà anche durante le contrapposizioni avvenute nella fisica teorica del XX secolo.

7. Lagrangiana e cicli di ragionamento

Lazare Carnot ha saputo individuare la genialità dell'analisi infinitesimale nel fatto che essa compie un ciclo di ragionamento, secondo un metodo che consiste nell'aggiungere delle variabili ausiliarie (i cosiddetti infinitesimi) a un sistema da risolvere. Secondo L. Carnot, nel metodo analitico queste variabili sono idealizzate (il piccolissimo *dx*); ma, anche il vecchio metodo sintetico, legato alle costruzioni, può includere la suddetta genialità; purché le variabili siano operative (e di solito sono espresse con delle doppie negazioni).

In realtà questo ciclo di ragionamento nel metodo sintetico avviene in ogni teoria OP; questa si sviluppa mediante un *ciclo di ragionamento* (Drago e Pisano 2000):

davanti a un problema universale, un principio metodologico indica la direzione, su cui argomentare col porre una aggiunta, che secondo il metodo sintetico è una variabile ausiliaria; per arrivare, con un ragionamento per assurdo, a concludere una proposizione universale; la quale, per aver raggiunto la massima evidenza possibile sul problema iniziale, allora può essere considerata sostanzialmente sicura; tanto che l'autore la può considerare, a questo punto, un principio-assioma, da cui poi dopo procede per via deduttiva; cioè, l'organizzazione della parte successiva è come se fosse in una teoria deduttiva OA. Tutto ciò ha un esempio nella termodinamica di S. Carnot.

Allora sorge il nuovo problema: se è vero che la teoria di Lagrange ha scelto la OP, essa dovrebbe svilupparsi secondo il metodo sintetico. Esiste tutto ciò nell'opera di Lagrange? Inoltre, se le scelte di questa teoria sono OP assieme a IA, come può essa conciliare la operatività del metodo sintetico con l'idealizzazione della matematica, IA?

Uno studio dettagliato dell'opera di Lagrange (Fucci 2003; par. 6.2) ha notato che di fronte a ogni grande problema, Lagrange procede con un ciclo di ragionamento, ma inteso diversamente da quello che è usuale in OP; perché innanzitutto Lagrange formalizza sia il problema che il sistema di conoscenze di riferimento all'interno di uno schema matematico globale; poi risolve il problema mediante una ipotesi formale, di solito basata sulla potenza illimitata dell'analisi; quindi in IA. Ovvia conseguenza: la formulazione di Lagrange si discosta dalla geometria (l'antica garante del rapporto fisica-matematica), perché ne abbandona le caratteristiche tradizionali: il fondarsi su strumenti operativi (riga e compasso), il ragionare deduttivo in OA e la sua capacità di rappresentare i processi fisici, sia intuitivamente sia con la geometria analitica.

Alla luce di questo gioco teorico ora illustro due procedimenti di Lagrange.

8. Il ciclo dei moltiplicatori

I vincoli confinano in regioni ristrette dello spazio sia il movimento dei corpi che la variabilità delle coordinate cartesiane. Questo è il primo problema che Lagrange affronta (Ricordo che L. Carnot ha risolto lo stesso problema con un ciclo di ragionamento: egli aggiunge i moti geometrici (che sono definiti in modo tale da poter avvenire, data la configurazione dei vincoli, avanti e indietro) nella sua seconda equazione fondamentale; i calcoli sui moti geometrici danno gli invarianti del moto). Per ottenere delle nuove variabili che siano senza limitazioni, Lagrange inventa la tecnica dei moltiplicatori; cioè segue un ciclo di ragionamento: aggiunge la variabile ausiliaria λ (il moltiplicatore), mediante il quale è più facile ricavare la soluzione del problema; poi il calcolo di massimizzazione elimina il moltiplicatore e così si torna al sistema originario con la soluzione delle nuove coordinate.

Il calcolo di un massimo (utilizzato per eliminare il λ) è compiuto dall'analisi infinitesimale; ovviamente Lagrange lo intende secondo la sua sola via di ragionamento, l'analisi infinitesimale, dove l'aggiunta è dx (cioè in IA). In effetti questo calcolo può essere inteso, a sua volta, come un ulteriore ciclo di ragionamento, ma sviluppato nel metodo analitico.

Interi brani dell'opera di Lagrange (p. 69 e ss.) indicano questo tipo di operazioni (non userò la notazione di Lagrange). Lagrange scrive le equazioni dei vincoli $\varphi_l(\vec{r_i}) = 0$ ($l = 1, ..., L$ e $i = 1, ..., N$). Le φ_l sono funzioni delle coordinate; differenziandole, Lagrange scrive poi: $d\varphi_l(\vec{r_i}) = 0$, e, puntando all'obiettivo finale, indica come si deve impostare la tecnica:

Ces équations *ne* doivent servir *qu*'à [quindi l'operazione di introduzione dei moltiplicatori è espressa con una doppia negazione] éliminer un pareil nombre de différentielles dans la formule générale de l'équilibre, après quoi les coefficient des différentielles *doivent* être égales chacune à zéro; il n'est pas difficile de prouver, par la théorie de l'élimination des équations linéaires, qu'on aura le même résultat si l'on ajoute [si noti questa parola] simplement à la formule dont il s'agit les différentes équations de condition: $d\varphi_l(\vec{r_i}) = 0$, multipliées chacune par un coefficient indéterminé; qu'ensuite on égale à zéro la somme de tous les termes qui se trouvent multipliés par une même différentielle, ce qui donnera autant d'équations particulières qu'il y a de différentielles; qu'enfin on élimine de ces dernières équations les coefficients indéterminés par lesquels on a multiplié les équations de condition.

La struttura di ciclo di ragionamento in queste operazioni è piuttosto evidente; il primo passo è definire il sistema dei vincoli con le $\varphi_l(\vec{r_i})$ e quindi passare a $d\varphi_l(\vec{r_i}) = 0$; le aggiunte dei moltiplicatori alle equazioni della statica semplificano la ricerca della soluzione del problema; ricercandola come studio di un massimo, i moltiplicatori sono eliminati. Mostriamo, sempre citando brani di Lagrange, come questa operazione di eliminazione sia effettivamente un ciclo a sua volta.

On prendra la somme des *moments* [cioè, a meno del segno, dei lavori virtuali] de toutes les puissances qui doivent être en équilibre I et l'on ajoutera les différentes fonctions différentielles qui doivent être nulles par les conditions du problème, après avoir multiplié chacune de ces fonctions par un coefficient indéterminé II; on égalera le tout à zéro, et l'on aura ainsi une équation différentielle qu'on traitera comme une équation ordinaire *de maximis et minimis*, III et d'où l'on tirera autant d'équations particulières finies qu'il y aura de variables. Ces équations, étant debarrées par l'élimination, des coefficients indéterminés, donneront toutes les conditions nécessaires pour l'équilibre IV.

I numeri romani indicano i quattro passi del ciclo. In formule, il primo passo consiste nello scrivere il principio dei lavori virtuali: $\sum_i \vec{F_i}\,\delta P_i = 0$

Il secondo passo consiste nell'introdurre i moltiplicatori; si ottiene un'equazione della forma: $\sum_i \vec{F_i}\,\delta P_i + \lambda d\varphi_l = 0$

Per le diverse coordinate, e per ogni corpo del sistema, si può poi scrivere un'equazione di questa forma: $\sum_i \vec{F_i}\,\frac{\delta P_i}{\delta x} + \sum_l \lambda \frac{d\varphi_l}{\delta x} = 0$

Inoltre, Lagrange afferma che i termini «peuvent être regardés comme représentant les moments [o lavori virtuali] de certaines forces appliquées au système». E infatti egli esprime questi termini come somme di diverse componenti, ognuna applicata in un punto del sistema; dopodiché conclude:

Il résulte de là que chaque équation de condition est équivalente à une ou plusieurs forces appliquées au système, suivant des directions donnée, en sorte que l'état d'équilibre du système sera le même, soit qu'on emploie la considération de ces forces, ou qu'on ait égard aux équations de condition.

Réciproquement, ces forces peuvent tenir lieu des équations de condition résultantes de la nature du système donné; de manière qu'en employant ces forces on pourra regarder les corps comme entièrement libres et sans aucune liaison. Et de là on voit la raison métaphysique [sic!], pourquoi l'introduction des termes $\lambda d\varphi$ dans l'équation générale de l'équilibre fait qu'on peut ensuite traiter cette équation comme si tous les corps du système étaient entièrement libres.

Nella dinamica [pp. 229-230] i passi sono sostanzialmente gli stessi.

Ma in quali casi è risolubile il problema matematico di massimo, posto da Lagrange? Egli ipotizza la risolubilità a priori della teoria dei moltiplicatori, anche se sappiamo bene che la soluzione non c'è appena ci sia una discontinuità anche nella derivata della funzione del vincolo. Poi la sua teoria prosegue in generale, senza tenere conto che ha ipotizzato qualcosa di astratto, che la confinerebbe a casi molto ristretti. Da qui la astrattezza, non tanto dei singoli concetti o del calcolo variazionale; cose alle quali tutti i fisici di allora erano già abituati; ma del ragionamento; il che non ha precedenti nella teoria fisica; e che, essendo stato ignorato dagli storici tradizionali, ha reso difficili le valutazioni su questa formulazione.

Si noti che in questo problema occorre trovare la soluzione esatta; quella approssimata non è sufficiente a risolvere il problema. Questo significa che in matematica costruttiva (IP) non ci può essere una versione della tecnica dei moltiplicatori di Lagrange e in definitiva della formulazione lagrangiana; solo l'analisi degli infinitesimi (non standard) o quella rigorosa possono risolvere esattamente il problema. Non sembra allora casuale il fatto che Lagrange, il quale aveva sostenuto in analisi una fondazione costruttiva attraverso l'ipotesi di analiticità di ogni funzione, poi dichiari ambiguamente che in meccanica è più «comodo» usare la vecchia analisi degli infinitesimi.

A questo punto Lagrange si è riportato a variabili continue su tutto lo spazio e si è essenzialmente legato all'analisi infinitesimale idealistica dell'IA.

9. Il ciclo del PLV

Nel prosieguo ci sarà di aiuto il confrontare la lagrangiana con il metodo di Lazare Carnot. Ambedue sono delle generalizzazioni del PLV, il quale vuole risolvere il problema di come teorizzare su un sistema vincolato.

Notiamo che il PLV rappresenta un ciclo di ragionamento in maniera esemplare. Da secoli, per risolvere il problema suddetto si utilizzano le reazioni vincolari. Di fatto, esse non sono state mai misurate direttamente (perciò le loro definizioni sono vere doppie negazioni: le reazioni vincolari *non* sono enti *ir*reali; o anche: *non* è vero che le reazioni vincolari *non* siano forze); sono nostre invenzioni, allo scopo di pareggiare i conti sulle forze quando i corpi incontrano dei vincoli; ma debbono anche essere tali da non produrre lavoro positivo, altrimenti (ragionamento per assurdo) degli atti del nostro pensiero (le reazioni vincolari) creerebbero lavoro gratis e ci sarebbe il moto *perpetuo* (= *senza* fine); il che è *impossibile*; quindi $\Sigma R_i \delta s_i$ = 0. Esse in effetti sono delle variabili ausiliarie aggiunte al sistema iniziale, per generalizzare il sistema, e così facilitare il calcolo della soluzione; la quale diventa quella finale, quando riusciamo a eliminare queste reazioni. Esse, secondo il metodo sintetico, sono enti come gli altri; secondo il metodo analitico invece esse sono enti ideali astratti, da manipolare formalmente in matematica.

Ma come eliminare le reazioni vincolari dai calcoli finali? Lagrange non parla di impossibilità del moto perpetuo, né dei lavori delle reazioni vincolari. Invece si appella a quello che chiama «principio di d'Alembert» (PdA). D'Alembert ha respinto le forze newtoniane come «enti oscuri e metafisici», e ha formulato il suo principio con le quantità di moto perdute; Lagrange invece traduce il PdA nelle forze matematicamente intese, quelle che entrano nelle equazioni differenziali successive. Allora le forze possono essere intese nuovamente come forze-causa, cioè metafisicamente. Infatti adesso il PdA non inizia più una OP, ma è diventato una verità generalissima. Affidandosi a un principio posto a priori, qui Lagrange sembra abbandonare l'OP del PLV a favore di una OA.

Scomponendo con esso ogni forza agente, questa dà una reazione vincolare, e, nel complesso, si annullano: $\sum_i \overrightarrow{R_i} = 0$(p. 27, p. 233); cioè $f_i - m_i a_i = 0$. Qui c'è la nostra sorpresa per la curiosa interpretazione di Lagrange, che promuove formalmente $m_i a_i$ a «forze d'inerzia»; e c'è la nostra meraviglia per il fatto che Lagrange pretenda di ottenere dei nuovi risultati fisici da un passaggio che sembrerebbe solo formale: il semplice spostare $m_i a_i$ dal membro destro a quello sinistro di $f_i = m_i a_i$ (lasciando anche intendere che tutto è ottenibile per via newtoniana, senza far uso del principio dei lavori virtuali). Tutto ciò corrisponde molto bene all'astrattezza del metodo analitico, che manipola in maniera formale le reazioni vincolari.

Ma in realtà ciò è basato su una interpretazione erronea del PdA. Questo principio è smentito da semplici esempi: un corpo su un tavolo, e l'urto di un corpo su una parete rigida. Piuttosto, deve annullarsi il totale delle reazioni vincolari moltiplicate per i rispettivi spostamenti; cioè il totale dei lavori delle reazioni vincolari. Quindi Lagrange invoca il PdA ma in effetti usa il PLV. Inoltre, con la metafisica delle forze interpreta idealisticamente quello che è un ciclo del metodo sintetico; non lo riconosce e lo spiana formalmente con il PdA, tradotto in una formula sulle forze.

10. Conclusioni

Si noti che pure la introduzione del potenziale V è un ciclo di ragionamento, dove V è una variabile ausiliaria. Il ciclo non appare tale perché viene compiuto sotto l'ipotesi formale che ogni forza sia conservativa; perché, dice Lagrange, ogni forza in natura è «propriamente» centrale (p. 229; pp. 289-290).

È da notare inoltre la novità di Lagrange rispetto al ciclo di ragionamento di L. Carnot: egli ne usa più d'uno, giusto il fatto che li tratta in maniera formale, senza più aderenza alla realtà operativa. Chiudendo questo studio iniziale, si ipotizza che tutti i cicli di ragionamento di cui si compone la teoria OP di Lagrange vengono spianati allo stesso modo, mediante un certo numero di ipotesi idealistiche (in particolare di IA). Quindi i problemi affrontati da Lagrange sono gli stessi di Lazare Carnot (riportarsi a variabili senza limitazioni e generalizzare il PLV, ma le tecniche matematiche sono radicalmente differenti; intuitiva e geometrica quella di Carnot, di analisi infinitesimale quella di Lagrange. Il metodo di ragionamento è lo stesso (un ciclo); ma nel secondo caso è effettivo, nel primo è essenzialmente legato a operazioni matematiche idealistiche, se non altro perché dalla matematica si pretende sempre una soluzione, la quale invece non esiste sempre; in questo modo si perde di vista lo stesso problema iniziale, che alla luce dell'ipotesi idealistica viene a questo punto svalutato come semplice passo di una dimostrazione.

Poiché le presentazioni della meccanica di Lagrange non valutano che cosa tutto il complesso di queste ipotesi comporti, ogni ipotesi dà allo studioso un senso di astrattezza; alla fine egli ha la sensazione di stare maneggiando una «bacchetta magica». Con ciò viene sostanziata e articolata la intuizione di Truesdell (1968, p. 133): «L'astrazione della formulazione [di Lagrange] cancella i principali problemi concettuali della meccanica».

Con questa impostazione astratta dai fondamenti, a causa di IA, si può ben comprendere come la lagrangiana abbia sollevato la fisica-matematica a vette mai viste fino ad allora; ma nello stesso tempo abbia spianato la strada a una profonda crisi, quella dell'etere e dei quanti, che ha riportato duramente alla realtà la fisica teorica.

Con tutto ciò è stata data una risposta ai problemi precedentemente elencati: 1), 2), 4), 5), 7), 8), 10).

Bibliografia

P. Bailache, in L. Poinsot, 1975.

E. Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, Mc Graw-Hill, New York 1967.

J.C. Boudri, *What Was Mechanical about Mechanics?*, in «BSPS», 224, Kluwer, Dordrecht 2002.

L. Brunschvigc, *L'éxperience humaine et la causalité physique*, PUF, Paris 1949.

M. Bunge, *Metascientific Queries*, C.C. Thomas P., 1959, pp. 153-172.

D. Capecchi, *Storia del principio dei lavori virtuali*, Hevelius, Benevento 2002, pp. 77-123.

M. Capriglione e A. Drago, *Lo stato logico del principio dei lavori virtuali*, in C. Cellucci *et al.* (a cura di), *Logica e Filosofia della Scienza. Problemi e Prospettive*, ETS, Pisa 1994, pp. 331-348.

M. Capriglione e A. Drago, *La meccanica analitica di Lagrange: le sue diverse versioni e le valutazioni critiche*, in «Giornale di Fisica», 39, 1998, pp. 83-99.

L. Carnot, *Essai sur les machines en général*, Defay, Dijion 1783.

J. Casey, *Geometrical Derivation of Lagrange's Equations of a System of Particles*, in «Am. J. Phys.», 62, 1994, pp. 836-847.

J. d'Alembert, *Éléments*, in J. d'Alembert e D. Diderot, *Encyclopédie Française*, Paris, vol. 17.

P. De Martino e A. Drago, *Introduzione alla matematica costruttiva*, in «Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli»(4), 69, 2002, pp. 37-49.

J.M. de Tilly, *Études de Mécanique abstraite*, in «Mémoires Acad. Roy. Belg.», 21, 1870, pp. 1-99.

A. Drago, *A Characterization of Newtonian Paradigm*, in P.B. Scheurer e G. Debrock (a cura di), *Newton's Scientific and Philosophical Legacy*, Kluwer Acad. P., Dordrecht 1988, pp. 239-252.

A. Drago, *Le due opzioni*, La Meridiana, Molfetta 1991.
A. Drago, *The Principle of Virtual Works as a Source of Two Traditions in 18th Century Mechanics*, in F. Bevilacqua (a cura di), *History of Physics in Europe in 19th and 20th Centuries*, SIF, Bologna 1993, pp. 69-80.
A. Drago, *Interpretazione delle frasi caratteristiche di Koyré e loro estensione alla storia della fisica dell'Ottocento*», in C. Vinti (a cura di), *Alexandre Koyré. L'avventura intellettuale*, ESI, Napoli 1994, pp. 657-691.
A. Drago, *La nascita del principio d'inerzia in Cavalieri e Torricelli secondo la matematica elementare di Weyl*, in P. Tucci (a cura di), *Atti del XVII Congr. Naz. Storia della Fisica e dell'Astronomia*, Univ. Milano, Milano 1997, pp. 181-198.
A. Drago, *Il principio di d'Alembert non è un principio. Sua relazione col principio dei lavori virtuali*, in P. Tucci (a cura di): *Atti XIX Congr. Naz. St. Fisica*, Como 1999, pp. 185-209.
A. Drago, *A revaluation of old formulations of mechanics*, «Am., J. Phys.», 2004 (in press).
A. Drago e G. De Martino, *Introduzione alla matematica costruttiva*, «Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli» (4), 69, 2002, pp. 37-49.
A. Drago e D.S. Manno, Introduzione, in L. Carnot, *Saggio sulle Macchine*, CUEN, Napoli 1994.
A. Drago, S.D. Manno e G. Mauriello, *Una presentazione concettuale della meccanica di Lazare Carnot*, «Giornale di Fisica», 42, 2001, pp. 131-156.
A. Drago e R. Pisano, *Interpretazione e ricostruzione delle «Réflexions» di Sadi Carnot mediante la logica non classica*, «Giornale di Fisica», 41, 2000, pp. 195-215.
R. Dugas, *Histoire de la Mécanique*, Griffon, Neuchatel 1950.
P. Duhem, *L'Evolution de la mécanique*, Hermann, Paris 1905.
C.G. Fraser, *J.L. Lagrange's Early Contribution to the Principles and Methodus of Mechanics*, in «AHES», 28, 1983, pp. 197-241.
R. Fucci, *Le simmetrie in cristallografia e in fisica classica*, Tesi di laurea in Fisica, Università Federico II di Napoli 2002-2003.
D. Galletto, *Lagrange e le origini della Mécanique analytique*, «Giornale di Fisica», 32, 1991, pp. 83-126.
J.R. Gaskin e M. Arestein, *Geometrical Basis of Lagrange's Multipliers and System Constraints in Mechanics*, «Am. J. Phys.», 37, 1969, pp. 93-100.
E. Goldstein, *Rational Mechanics*, Addison Wesley, New York 1980.
I. Grattan-Guinness, *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840*, Birkhaueser, Boston 1990.
W.R. Hamilton, *The Mathematical Papers, vol. II, Dynamics*, Conway & McConnell, Cambridge 1940.
T.L. Hankins,*Jean d'Alembert. Science and Enlightenment*, Clarendon, Oxford 1970.
N.R. Hanson, *Newton's First Law: A Philosopher's Door in Natural Philosophy*, in R.G. Colodny (a cura di), *Beyond the Edge of Certainty*, Prentice-Hall, Englewood Cliff 1985, pp. 6-28.
J.-L. Lagrange, *Mécanique analytique* (1788), Blanchard, Paris 1965.
C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, Dover, New York 1968.
T. Levi Civita e U. Amaldi, *Lezioni di Meccanica Razionale* (1918), Zanichelli, Bologna 1971.
R Lindt, *Das Prinzip der Virtuelle Gleichwiedigkeiten*, «Abh. Gesch. Math.», 18, 1904, pp. 115-195.
E. Mach, *Conservation of Energy* (1872), Open Court, Chicago 1911.
E. Mach, *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico* (1883), Boringhieri, Torino 1968.
L. Poinsot, *La Théorie de l'équilibre et du mouvement des systèmes*, Vrin, Paris 1975.
H. Pulte, *After 150 Years: News from Jacobi about Lagrange's Analytical Mechanics*, «Math. Intelligencer», 19 (3), 1997, pp. 48-54.

H. Pulte, *Jacobi's Criticism of Lagrange's*, «Historia Mathematica», 25, 1998, pp. 154-185.
L.D. Scott, *Can a Projection Mathematically Obtaining Equations of Motion Compete with Lagrange's Equations?*, «Am. J. Phys.», 56, 1988, pp. 451-456.
A. Sommerfeld, *Meccanica*, Sansoni, Firenze 1961.
C. Truesdell, *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies 1638-1788*, Introduction a L. Euler, *Opera omnia*, Fussli Turici 1960.
C. Truesdell, *Essays in the History of Mechanics*, Springer-Verlag, New York 1968.
E.T. Whittaker, *Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge University Press, Cambridge 1927.