

DALLE ARMONIE CELESTI ALLE RISONANZE PLANETARIE

ANNA MARIA LOMBARDI*, ALESSANDRO MANARA**

* Università di Padova, ** Osservatorio Astronomico di Brera

Sin dall'antichità sono testimoniate ricerche sui rapporti semplici che si ottengono mettendo in relazione tra loro le distanze e i moti medi dei pianeti. In questo lavoro, dopo aver presentato una breve rassegna dei modelli che dall'antichità fino a Keplero tentavano di scorgere in questa regolarità l'armonia del cosmo, prendiamo in considerazione modelli più recenti, in cui il ritrovamento di semplici frazioni è considerato utile per la comprensione del meccanismo di formazione del Sistema Solare. In particolare la nostra analisi si sofferma su un lavoro di Percival Lowell, per concludersi con una breve panoramica sulle ricerche contemporanee in questo settore.

Introduzione

La ricerca di regolarità tra i parametri dei fenomeni naturali è senz'altro una delle caratteristiche fondamentali del fare scienza dei periodi storici più diversi. Il nostro lavoro si propone di esaminare un ambito scientifico ben determinato, relativo ai tentativi di evidenziare l'esistenza di rapporti semplici tra i raggi delle orbite dei pianeti e/o tra i loro periodi.

I modelli sono stati raggruppati in quattro paragrafi, rispettivamente relativi ai sistemi pre-copernicani, al significato di armonia nei modelli di Copernico e Keplero, alle ricerche di Lowell, e infine ai risultati e ai dibattiti più recenti.

È stato così possibile riflettere da un lato sui comuni denominatori, dall'altro sulle differenze esistenti in contesti storici tra loro lontani, come pure sulle modalità con cui le regolarità tra i parametri vengono rintracciate, e sulle implicazioni da esse dedotte. Come prima osservazione, viene evidenziato come nel quadro pre-copernicano i raggi orbitali dei pianeti non erano misurati, bensì dedotti con l'ausilio di ipotesi a priori, tra cui spesso la convinzione che dovessero sussistere delle relazioni armoniche (cioè dei rapporti semplici, corrispondenti a intervalli musicali consonanti). Al contrario, in seguito la commensurabilità tra le orbite o tra i periodi dei pianeti viene ricercata a partire dalle misure sperimentali; l'abilità del ricercatore consiste allora nel far emergere le regolarità ipotizzate, ovvero nello scrivere l'effetto finale (non perfettamente regolare) come somma di più contributi, i quali individualmente presentano delle regolarità.

Anche il significato attribuito al rinvenimento di una commensurabilità nei parametri celesti muta nei diversi contesti. Se fino a Keplero una regolarità tra parametri naturali sottende una armonia progettuale divina, in seguito essa manifesta la

presenza di forze ancora da individuare; effetti gravitazionali, dovuti a un pianeta ancora da scoprire; oppure conseguenze della particolare storia del nostro sistema solare.

Gli antichi

In questo paragrafo forniremo una rassegna di modelli astronomici in cui l'Armonia, intesa come concordanza musicale espressa da regolarità matematiche, è elemento chiave. A partire dalle testimonianze più antiche considereremo vari sistemi pre-copernicani, i quali privilegeranno come parametri di volta in volta le distanze dei pianeti dal centro del cosmo, piuttosto che la loro velocità angolare o le posizioni relative da essi assunte¹. In particolare evidenzieremo gli sforzi volti a sostituire valori dedotti da ipotesi a priori (per esempio la stessa esistenza di Armonia dei cieli) con risultati ottenuti da misure indirette.

Le prime informazioni sui valori attribuiti alle distanze dei pianeti dalla Terra risalgono al VI secolo a.C. fu Aristotele (nel IV secolo) a stendere per primo un resoconto dei modelli degli antichi, anche se le informazioni che sembrano risalire più addietro ci arrivano da Simplicio, che scrive nel II secolo d.C. e la cui testimonianza dobbiamo quindi considerare con una certa cautela. È questa la fonte che ci informa sul sistema utilizzato da Anassimandro, in cui i pianeti, non distinti dalle altre stelle, si trovano a una distanza dalla Terra che è pari a 9 volte il raggio della Terra, la Luna a 18, il Sole a 27.

È poi possibile confrontare diverse fonti a riguardo del modello costruito da Pitagora e in seguito adottato dai suoi seguaci, in quanto esso viene descritto per esempio da Plinio il vecchio, da Marziano Capella e da Censorino. I Pitagorici avrebbero cercato di ricavare le distanze dei pianeti dall'ipotesi che esse dovessero manifestare proporzioni armoniche, ovvero proprio quei rapporti numerici semplici che si era scoperto caratterizzare gli intervalli musicali fondamentali (2:1, 3:2, 4:3). Attraverso questi rapporti essi arrivarono a individuare il rapporto che caratterizzava le due unità fondamentali per la costruzione della scala musicale, il tono e il semitono: ecco che il Sistema Solare nelle sue distanze presentava le stesse proporzioni di una scala musicale! Secondo le testimonianze dei suddetti storici, l'unità fondamentale di misura, pari a 126.000 stadi, sarebbe stata ricavata da calcoli e misure, anche se non viene rivelato come. Molti furono coloro che si richiamarono in seguito al sistema pitagorico, tra cui Teone, Achille Petavio e altri.

Il primo modello che possiamo conoscere da fonte diretta è quello platonico, risalente al IV secolo a.C. per fissare le distanze dei pianeti dalla Terra, Platone considerò le prime due serie geometriche: 1, 2, 4, 8 e 1, 3, 9, 27. Ordinandole ottenne una successione di distanze (relative) per cui, se la Luna dista 1 dalla Terra, il Sole dista 2, Venere 3, Mercurio 4, Marte 8, Giove 9, Saturno 27. Platone stesso sottolinea come (escludendo il 27) si tratti degli stessi numeri che caratterizzano gli intervalli musicali consonanti.

¹ Vedi anche Tannery [1893] e Dreyer [1953].

Di pochi anni successivo è il sistema di Eudosso di Cnido, che introduce però una grossa novità: la proporzione che egli presenta tra le distanze Terra-Luna e Terra-Sole (pari a 1:9, ovvero al rapporto esistente tra un tono e la sua quinta, come osserva l'astronomo greco) viene ricavata dall'osservazione delle eclissi supportata da un ragionamento geometrico, e non presupposto a priori. La prima misurazione della distanza Terra-Luna nota risaliva ad Aristarco (II sec. a.C.); essa era una misura relativa – Luna-Terra in rapporto a Terra-Sole – e sfruttava la posizione di Luna perfettamente semipiena (era stato dedotto un rapporto di 1:19, mentre oggi sappiamo che tale rapporto è inferiore a 1:400). Eudosso riuscì a trasformare il dato relativo in assoluto, sfruttando una eclissi lunare di massima durata². In seguito il modello di Eudosso venne mal interpretato (per esempio da Plinio) partendo dal fatto che le distanze dovevano formare un intervallo di quinta, e attribuendo quindi a loro un valore relativo di 3:2.

Sottolineiamo come fino a questo momento nei diversi modelli si trova sempre che la Luna, considerato allora come il pianeta più interno, è associato alla nota più grave (un altro esempio famoso si trova anche in Cicerone); questa interpretazione deriva dall'osservazione che corpi in moto più lento producono suoni più gravi.

In seguito a questi si affiancano sistemi in cui il pianeta più interno, a una distanza minore, è associato alla nota più acuta, come se la distanza del pianeta dal centro del cosmo fosse proporzionale alla lunghezza di una ideale corda sonora, che tanto più corta produce un suono più acuto. Si tratta di un modello in cui le distanze sono poste in diretta analogia con le lunghezze delle corde di una astratta lira greca, il quale, esplicitato tra i primi da Nicomaco Neo-pitagorico, si troverà ancora nei trattati di astronomia e di teoria musicale del XVI secolo. Molto simile a questo sono i modelli in cui il Sistema Solare è messo in analogia con un monocordo; in quel caso (di cui famoso esempio è il Monocordo del Mondo presentato da Robert Fludd nel suo *Utriusque Cosmi*) non abbiamo un set di più corde, ma un'unica corda sulla quale i pianeti sono posizionati come ideali capotasti.

L'armonia musicale viene cercata non solo utilizzando i raggi delle orbite dei pianeti, ma anche in altri parametri come per esempio in quelli tipici degli aspetti, quelle particolari posizioni reciproche degli astri che assumevano un ruolo fondamentale in astrologia. Proprio il rintracciare armonia in queste disposizioni celesti sembrava giustificare il fatto che in quelle precise posizioni gli astri influissero sull'animo e sul carattere dell'uomo: il fatto che esistano dei rapporti armonici tra gli astri spiega perché noi «risuoniamo», siamo «in risonanza» con particolari configurazioni celesti. In pratica in quel caso la nostra anima riconosce la stessa musica che poi apprezza sulla Terra quando è suonata da una voce o da uno strumento [Kassler 1982].

Per esempio Tolomeo nel II secolo d.C. studiava i rapporti tra gli angoli caratteristici dei diversi aspetti (opposizione, trigono, quartile, sestile), ricavandone quelle semplici frazioni che nella musica antica rappresentavano gli intervalli consonanti (vedi fig.1). Più sottile l'analisi di Nicola Oresme, lo studioso francese del XIV secolo. Egli rintracciava l'armonia nei lati dei poligoni tipici degli aspetti, anziché

² Per una descrizione del metodo utilizzato vedi Kuhn [2002, pp. 352-356].

negli angoli corrispondenti. Ancora una volta si trovavano i rapporti caratteristici delle consonanze, ma questa volta i rapporti erano sotto radice quadrata (per esempio al posto di 3:2, rapporto che rappresenta una quinta, si trovava $\sqrt{3:2}$). Si trattava quindi di un'armonia «celata» da una radice, che la trasformava in un numero irrazionale. Proprio nella natura di questi numeri sembrava indicata l'inafferrabilità da parte dell'astrologia degli umani destini, così come era impossibile conoscere quei numeri in maniera esatta. A queste riflessioni egli dedicò il *Tractatus de commensurabilitate vel incommensurabilitate motuum coeli*.

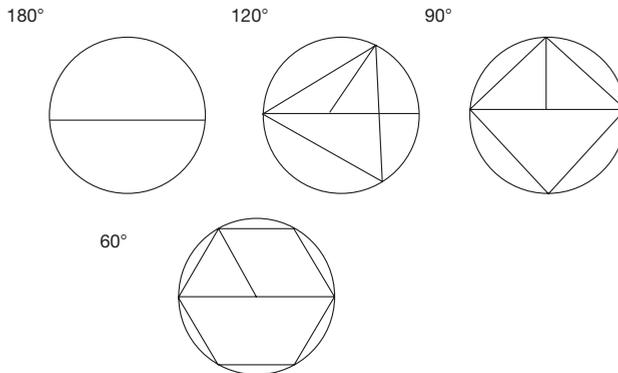


Fig. 1 Tolomeo mostra che gli angoli sottesi nelle configurazioni da sempre prese in considerazione dall'astrologia (opposizione, trigono etc.) danno origine a rapporti corrispondenti agli intervalli fondamentali della musica di quei tempi (ottava, quinta e quarta). Qui le Armonie (intervalli musicali) si trovano nei rapporti tra gli angoli. Per esempio il rapporto tra gli angoli al centro individuati da una retta e da un triangolo equilatero danno origine a un intervallo sesquialtero, o di quinta: $180^\circ:120^\circ = 3:2$.

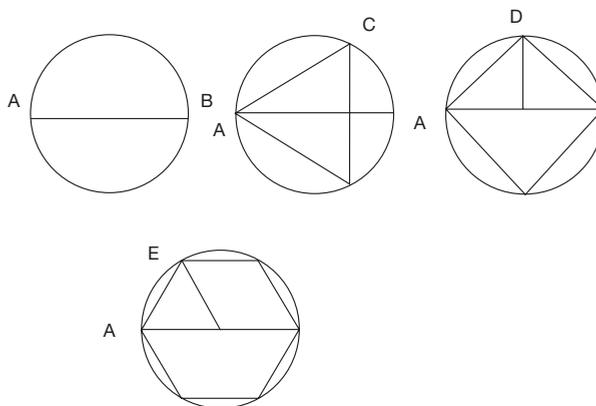


Fig. 2. Nel modello di Nicolas Oresme le Armonie (intervalli musicali) sono «celate» alla ragione dalla radice quadrata, ragione per cui l'Astrologia non può predire completamente il futuro dell'individuo e del Mondo. Ad esempio il rapporto conosciuto come «medietas sesquialtera» risulta essere: $AC:AD = \sqrt{3:2}$.

Riportiamo infine il sistema tramandato da Marziano Capella, il quale – rifacendosi a fonti romane risalenti al I secolo a.C. – attribuiva una proporzione diretta tra le distanze e i periodi dei pianeti. I rapporti tra le distanze sarebbero quindi gli stessi che si osservano tra i periodi, ovvero i seguenti:

Terra		Luna		Sole		Marte	Giove	Saturno
	↙	Luna		↗				
	↙	$1/12$	↗		↙	2	↗	
				↙		12	↗	
				↙		28		↗

Si deve sottolineare che adottando il sistema tolemaico è impossibile dare una stima delle distanze planetarie, mentre è possibile fornire per ciascun pianeta il rapporto relativo tra epiciclo, deferente ed eccentrico.

Una stima delle dimensioni dell'Universo e della distanza dei pianeti dalla Terra veniva fatta assumendo l'ipotesi del *plenum*, ovvero l'idea aristotelica che non potesse esistere uno spazio vuoto. Su questa asserzione era stato costruito un modello di universo come successione di sfere materiali, ciascuna della larghezza necessaria a contenere il moto non esattamente circolare di un pianeta. Ogni sfera aveva il bordo interno di raggio pari alla minima distanza a cui quel dato pianeta poteva essere osservato, e il bordo esterno di raggio pari alla distanza massima, il suo spessore essendo definito dal diametro dell'epiciclo. Conoscendo – dalle misure di Aristarco – il valore delle distanze dalla Terra di Sole e Luna, e i valori relativi di deferenti ed eccentrici per i diversi pianeti, era possibile ottenere la misura delle dimensioni delle sfere planetarie, nonché dare una stima del raggio dell'Universo. Questo modo di calcolare le distanze è tipico in tutto il periodo compreso fra Tolomeo e Copernico.

Grazie all'introduzione del sistema Copernicano è invece possibile realmente calcolare le distanze dei vari pianeti dal Sole.

Da Copernico a Keplero: l'armonia riscoperta, l'armonia misurata

Che l'attenzione ai risvolti «armonici», musicali in senso matematico, dei modelli astronomici sia ancora viva alle soglie della Rivoluzione scientifica è testimoniato dalle parole dello stesso Copernico, che nel *De Revolutionibus* sostiene come un grosso successo del proprio sistema il fatto che, se si considerano i periodi dei pianeti ordinati secondo la loro distanza dal Sole, si ritrova finalmente una successione monotona: «Troviamo dunque in questa disposizione una ammirevole simmetria del

mondo e un rapporto armonico preciso tra movimento e grandezza delle sfere, quale non è possibile rinvenire in altro modo»³. Sono così poste le basi per rintracciare quella relazione tra distanze e periodi che era stata supposta sin dall'antichità, e che sarà formalizzata in quella che è nota come Terza legge di Keplero. In effetti l'astronomo tedesco dedicò molti anni alla ricerca di un'armonia celeste, dove il termine armonia è ancora inteso in senso tecnico, e strettamente connesso alla teoria musicale: per almeno 23 anni egli provò a determinare tra quali parametri del Sistema Solare esistessero dei semplici rapporti commensurabili. Questi non sarebbero dovuti essere casuali, ma coincidenti con quelle semplici frazioni che in quegli anni rappresentavano gli intervalli consonanti, ammessi dalla teoria musicale.

Nelle sue ricerche, iniziate già dai tempi del *Mysterium Cosmographicum*, e quindi dalla fine del XVI secolo, tentò di rintracciare tali rapporti dapprima tra le distanze dei pianeti dalla Terra o dal Sole, poi tra i moti medi, senza peraltro riscontrare un risultato armonico preciso. Eppure, se l'armonia delle sfere doveva rispecchiare l'armonia della creazione, non era possibile accontentarsi di una semplice approssimazione: perciò la ricerca dello scienziato tedesco non si arrestò, raggiungendo una precisione assai maggiore considerando non la velocità media dei pianeti, bensì le due velocità estreme dei singoli pianeti, quelle misurate all'afelio e al perielio di ciascuno. Nella tavola (traduzione di quella realizzata dallo stesso Keplero nell'*Harmonice Mundi*) è possibile osservare i rapporti rintracciati, e a fianco l'intervallo musicale a essi relativo. I valori delle velocità si riferiscono alle velocità angolari all'afelio e al perielio.

Intervallo Convergente	Intervallo Divergente	Pianeta	Distanze angolari percorse in 24h	Intervallo Musicale
a/d=1/3	b/c=1/2	Saturno	Afelio 1'46" = a	4/5 terza maggiore
			Perielio 2'15" = b	
c/f=1/8	d/e=5/24	Giove	Afelio 4'30" = c	5/6 terza minore
			Perielio 5'30" = d	
e/h=5/12	f/g=2/3	Marte	Afelio 26'14" = e	2/3 quinta
			Perielio 38'01" = f	
g/k=3/5	h/i=5/8	Terra	Afelio 57'03" = g	15/16 semitono
			Perielio 61'18" = h	
i/m=1/4	k/l=3/5	Venere	Afelio 94'59" = i	24/25 semitono cromatico
			Perielio 97'37" = k	
		Mercurio	Afelio 164'00" = l	5/12 ottava +terza minore
			Perielio 394'00" = m	

³ Copernico [1979, p. 213].

In seguito, il tentativo di rintracciare semplici frazioni, o relazioni numeriche ricorrenti, perde il carattere metafisico che apparteneva ai secoli precedenti, pur senza sminuire l'importanza di questo tipo di attività di ricerca. Lo scopo non è più quello di leggere nell'armonia l'impronta di un creatore, quanto quella di scorgere nelle regolarità dei parametri planetari la presenza di forze non ancora rivelate osservativamente. Senza la pretesa di esaminare in profondità le ricerche fatte lungo i secoli in questo ambito, citiamo come esempio significativo la legge di Titius-Bode, scoperta nel 1766 da Johann Titius e in seguito formulata matematicamente e divulgata da Johann Bode (1778). Essa fornisce per il semiasse maggiore a dell'orbita di un qualunque pianeta del Sistema Solare il valore:

$$a = 0.4 + 0.3 \times 2^n$$

Come noto, la legge ebbe una risonanza clamorosa nel 1781, quando William Herschel scoprì il pianeta Urano proprio alla distanza prevista dalla legge.

Non sempre la regolarità può essere espressa in maniera semplice, e lo sforzo dello scienziato è allora rivolto a svelarla, scomponendo i contributi di più effetti.

Se già Keplero adottava il concetto di composizione di forze per spiegare come una azione a simmetria sferica o circolare, come immaginava essere quella del Sole, potesse dare luogo a un'orbita ellittica (egli non immaginava che la forma ellittica potesse essere una soluzione per le forze proporzionali all'inverso del quadrato della distanza), con l'adozione della meccanica di Newton quello di riuscire a districare un fenomeno apparentemente complesso nella somma di più componenti semplici e simmetriche diviene uno sforzo diffuso, che ha il suo culmine nel successo dello sviluppo di Fourier. Il sistema solare diviene una palestra in cui dimostrare la grandezza dell'edificio fondato da Newton e ogni discrepanza diviene origine non di una crisi, bensì di una nuova ipotesi. Sarà così che Adams e Leverrier, con il metodo delle perturbazioni gravitazionali, consentiranno la scoperta di Nettuno, e che sull'impulso dato dalla teoria delle risonanze di Lowell, i suoi allievi scopriranno Plutone.

In realtà gli studi intrapresi da Lowell sono ai nostri occhi particolarmente interessanti, in quanto egli non si limitò a sfruttare una ipotesi di risonanza per individuare l'eventuale presenza di nuovi pianeti, ma la utilizzò per scegliere un modello di formazione del Sistema Solare. Come vedremo più avanti, questo tipo di analisi sarà poi proprio della ricerca del XX secolo, e in questo senso si può ammirare nell'astronomo americano un pioniere di questo ambito di studi.

Dalle risonanze un modello di genesi del Sistema Solare: le ricerche di Percival Lowell

Lowell desidera sfruttare le risonanze tra i periodi dei pianeti per indagare l'origine del Sistema Solare. Come nel caso delle armonie kepleriane, della legge di Titius, e come vedremo di ben più recenti lavori, le sue ricerche furono al centro di critiche, fondate sul dubbio che si tratti di un vero e proprio modello scientifico, o piuttosto di una mera coincidenza numerologica. L'ipotesi sulla formazione dei

pianeti sostenuta nel lavoro di Lowell riprendeva i lavori di Chamberlin e Moulton, secondo i quali i pianeti si erano formati da materiale espulso dal Sole in occasione di una violenta collisione con una stella vicina. Egli cita inoltre come opera di riferimento un testo di Tisserand, quel *Traité de mécanique céleste* in quattro volumi pubblicato tra il 1889 e il 1896.

In sostanza Lowell parte dalla considerazione che, in prima approssimazione, gli assi maggiori delle orbite dei pianeti sono tali che il moto medio di un pianeta sia multiplo di quello di uno dei due pianeti a lui adiacenti, secondo i rapporti: $1/2$, $2/5$, $1/3$ (nel caso particolare Venere-Terra il rapporto è pari a $3/5$). Questa regolarità secondo l'astronomo esprime il meccanismo per il quale avrebbe avuto genesi il nostro Sistema Solare: i pianeti si sarebbero formati in successione, dal più interno al più esterno, e la posizione del pianeta che si andava formando era necessariamente prossima a un punto tale da dar luogo a rapporti commensurabili, a causa delle interazioni con il sistema formato dal Sole e dagli altri pianeti più interni, che si erano formati precedentemente.

In effetti, come già Keplero aveva sottolineato nell'*Harmonice Mundi*, i rapporti tra i semplici moti medi non danno luogo a rapporti semplici precisi. Se Keplero aveva scelto di considerare le velocità all'afelio e al perielio, con cui si affinava notevolmente l'approssimazione, Lowell decide di interpretare lo scostamento come l'impronta di un ulteriore effetto, dovuto all'attrazione gravitazionale da parte del Sole e dei pianeti interni. Questa sarebbe la causa per cui i pianeti (come mostra la fig. 3) si trovano tutti spostati verso il Sole, rispetto alla posizione che permetterebbe rapporti esattamente commensurabili.

La sua ipotesi lo portò a cercare un eventuale nuovo pianeta in posizioni corrispondenti ai summenzionati rapporti semplici. Egli dedicò così, con la collaborazione di Carl Otto Lampland, incaricato di fotografare il cielo nelle regioni opportune, gli anni compresi dal 1905 alla fine della propria vita, senza riuscire nell'intento. Dopo la sua morte l'osservatorio da lui fondato continuò, quasi come dovuto omaggio, quelle ricerche, finché nel 1930 Clyde William Tombaugh scoprì un pianeta che orbitava effettivamente alla distanza prevista dalla teoria di Percival Lowell, a cui fu dato il nome di Plutone.

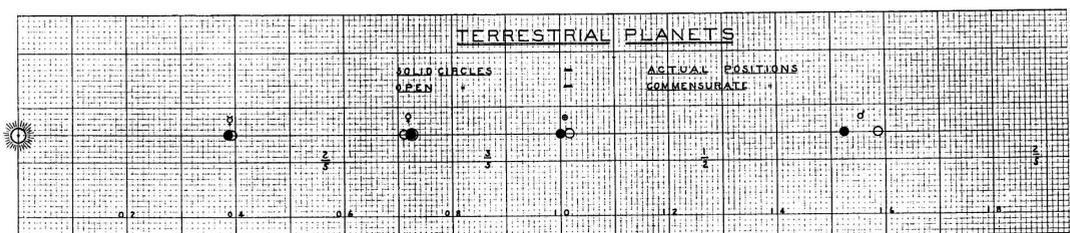


Fig. 3 Le posizioni che darebbero luogo a periodi esattamente commensurabili sono segnate con i cerchietti bianchi, in scuro le posizioni reali dei pianeti. N.B. Per motivi di spazio la figura riporta soltanto i pianeti interni.

Una panoramica sulla situazione contemporanea

Concludiamo con una panoramica sulle ricerche contemporanee in questo settore, tralasciando naturalmente le numerose risonanze tra i pianeti e i loro satelliti e quella tra Nettuno e Plutone, del tutto particolare e che richiederebbe una lunga discussione. In particolare osserveremo due approcci ben differenti: da un lato gli studi di coloro che ricavano relazioni dai dati osservativi, e cercano di assegnare a queste un significato fisico; dall'altro le ricerche di chi, a partire da ipotesi fisiche, cerca di ottenere equazioni valide in un sistema planetario.

Tra i ricercatori moderni che hanno cercato di trovare delle risonanze a due corpi tra i pianeti del Sistema Solare ricordiamo Albert Molchanov, che dimostrò che le relazioni esistenti nelle serie delle distanze planetarie sono il risultato di più semplici ed esatte relazioni nelle serie delle loro frequenze. La struttura del Sistema Solare è determinata da una tavola di relazioni risonanti. La struttura risonante, nello stadio finale, è inevitabile se un sistema dinamico come il Sistema Solare ha una evoluzione che avviene sotto l'azione di forze dissipative (cioè che fanno perdere energia orbitale). Nel Sistema Solare attuale il campo potenziale (conservativo) è dominante. Tuttavia il sistema esiste da quasi 5 miliardi di anni per cui anche forze dissipative molto piccole, che hanno causato perdita di energia orbitale a scapito di energia termica, hanno avuto sufficiente tempo per esercitare la loro influenza. Molchanov dimostra che questi piccoli termini dissipativi hanno tendenza a creare configurazioni stabili. Dal momento che le zone di risonanza sono determinate da serie di numeri interi, emerge un discreto numero di possibili stati stazionari, e il Sistema Solare si trova esso stesso in uno di tali stati.

Molchanov procede creando equazioni lineari tra le frequenze (definite come l'inverso del periodo) dei pianeti. Indicando con M_e la frequenza orbitale di Mercurio, V quella di Venere e così via, si hanno le seguenti equazioni lineari, prendendo la frequenza di Giove uguale a 1:

$$\begin{array}{rcccccccc}
 m_e & -V & -2E & -M & & & & = & 0 \\
 & V & & -3M & -S & & & = & 0 \\
 & & E & -2M & +J & -S & +U & = & 0 \\
 & & & M & -6J & & -2U & = & 0 \\
 & & & & 2J & -5S & & = & 0 \\
 & & & & J & & -7U & = & 0 \\
 & & & & & & U & -2N & = & 0 \\
 & & & & & & U & & -3P & = & 0
 \end{array}$$

Il modello ottenuto risolvendo queste equazioni fornisce frequenze abbastanza vicine a quelle reali, come si può vedere in tavola M, ma non proprio coincidenti con le risonanze. Il punto debole del lavoro è il fatto che con lo stesso procedimento è possibile trovare equazioni analoghe alle precedenti che danno residui ancora minori. Infatti Michel Henon [1969] fa notare che le frequenze reali hanno un errore relativo dell'ordine di 0.005. Facendo degli esempi esplicativi dimostra che

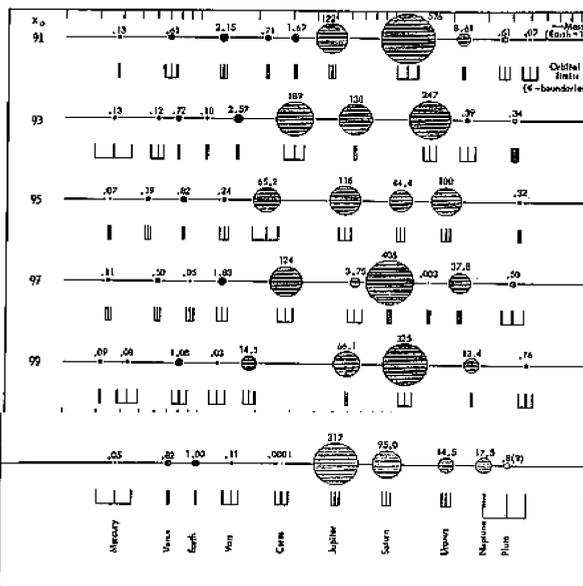
le equazioni (1) possono essere pienamente soddisfatte da effetti casuali, e pertanto non possedere alcun significato fisico.

Anche Backus [1969] fa notare (come si può anche vedere dalla tabella) che le otto relazioni di risonanza per le frequenze orbitali dei nove pianeti non sono pienamente soddisfatte ma hanno un errore piuttosto evidente, la cui grandezza fa pensare che quelle relazioni possano essere soddisfatte anche da una serie di nove numeri scelti a caso.

Frequenze orbitali nel modello di Molchanov

Pianeta	Modello	Reale	Diff. %
Me	49.20	49.22	0.04
V	19.26	19.29	0.15
E	11.83	11.86	0.31
M	6.287	6.306	0.31
J	1.000	1.000	—
S	0.4000	0.4027	0.68
U	0.1429	0.1412	- 1.18
N	0.07143	0.07197	0.75
P	0.04762	0.04750	- 0.25

Con argomenti non molto diversi dai precedenti Stanley F. Dermott [1969] demolisce le teorie di Molchanov, che però risponde alle feroci critiche con due lavori [1969] pubblicati sempre sulla prestigiosa rivista «Icarus». In uno di questi spiega perché non accetta i «very crude statistical model» dei detrattori delle sue teorie e propone un modello più preciso che migliora i risultati precedenti.



In un secondo lavoro Molchanov cerca di dare una valutazione quantitativa di una data struttura risonante e dimostra, tramite un nuovo e complicato sistema di equazioni applicato anche ai sistemi dei satelliti di Giove, Saturno e Urano, che una «buona» struttura risonante casuale non è assolutamente possibile.

Sebbene, come vedremo più avanti, si osservino realmente delle risonanze nel Sistema Solare, pur se soltanto per coppie di pianeti o satelliti, le teorie di Molchanov vennero abbandonate per il loro essere non risonanze vere e proprie, ma semplicemente valori vicino alle risonanze.

Proseguendo la rassegna sulla ricerca di risonanze nei pianeti del Sistema Solare ricordiamo i calcoli di simulazione numerica mediante computer sviluppati da Dole [1970], Hills [1970], William e Galley [1971] e Dormand e Woolfson [1971]. Tra questi esporremo, a titolo di esempio, la simulazione della formazione del Sistema Solare realizzata da Dole con il metodo Monte Carlo. Partendo dall'ipotesi che i pianeti si siano formati per aggregazione di materia dentro una nube di polveri e gas che circondano il Sole appena formato, Dole inietta nella nube stessa uno alla volta nuclei massivi che si muovono lungo orbite ellittiche. Le dimensioni del semiasse maggiore e dell'eccentricità dell'orbita di ciascun nucleo sono determinati da una successione random. Quando i nuclei orbitano dentro la nube crescono per aggregazione e gradualmente spazzano la polvere libera. Il processo di immettere nuove masse continua fino a che tutta la polvere è stata spazzata via; qualcuna delle masse si unisce l'una con l'altra a formare pianeti maggiori, che a loro volta spazzano lontano quei pianeti minori che si avvicinano troppo. Il risultato finale dei calcoli di Dole è una serie di pianeti che in massa, numero e spaziatura sono piuttosto simili al Sistema Solare. La fig. 4 mostra quattro dei venti modelli di sistemi planetari ottenuti da Dole; il quinto è il nostro sistema planetario che può considerarsi come membro della serie.

Ciascun sistema planetario prodotto usando una differente sequenza di numeri casuali è unico, ma tutti i sistemi così prodotti rispecchiano le maggiori strutture regolari del Sistema Solare.

Gli spazi tra le orbite mostrano la suggestiva regolarità della legge di Bode. I pianeti interni sono piccoli corpi rocciosi; quelli medi sono larghi corpi gassosi, quelli esterni sono generalmente piccoli; anche la distribuzione delle masse è simile a quella del Sistema Solare con masse che vanno dal piccolo Mercurio al maggiore Giove.

Laskar, più recentemente [1988], si serve per le integrazioni numeriche dei più potenti computer di quegli anni (super computer CRAY-1). I calcoli sono svolti per la soluzione di sistemi differenziali che danno la variazione secolare del Sistema Solare considerando gli otto maggiori pianeti tenendo conto anche degli effetti lunari e relativistici. Laskar trova, dopo una integrazione del sistema secolare per un periodo di 30 milioni di anni, che le soluzioni per il Sistema Solare esterno sono più stabili di quelle del Sistema Solare interno, dove molte quasi-risonanze nelle frequenze a lungo periodo mostrano una buona convergenza di soluzioni, in particolare le soluzioni per Mercurio e Marte sono le maggiori suscettibili di variabilità.

Ancora Laskar l'anno successivo [1989] presenta una integrazione numerica, per un periodo d'integrazione di 200 milioni di anni, di un grande sistema analitico di equazioni differenziali mediate contenenti l'evoluzione secolare delle orbite

degli otto maggiori pianeti. La soluzione è caotica, con un massimo esponente di Lyapounov che raggiunge il sorprendente enorme valore di circa 1.5 milione di anni. Il moto del Sistema Solare è così dimostrato essere caotico, non quasi periodico. In particolare, la predicibilità delle orbite dei pianeti interni, incluso la Terra, cessa dopo poche decine di milioni di anni. La situazione evolve, pur su tempi astronomici, ma comunque mantenendo posizioni in risonanza.

Moto caotico. Coefficienti di Lyapounov.

Per moto caotico si intende un moto il cui risultato finale è così sensibile a piccoli cambiamenti delle condizioni iniziali e delle forze che influenzano la traiettoria che la previsione dello stato del sistema in un futuro lontano diventa praticamente impossibile. Nel caso del moto caotico la divergenza tra orbite che partono da condizioni iniziali vicine avviene molto rapidamente, seguendo una legge esponenziale, cioè con una velocità che aumenta progressivamente nel tempo. La rapidità con cui tale divergenza si manifesta è misurata da un parametro detto «tempo di Lyapounov», che rappresenta il tempo necessario perché la distanza tra orbite vicine aumenti di un fattore e (la base dei logaritmi naturali); così dopo un periodo pari a due tempi di Lyapounov la distanza iniziale delle orbite sarà cresciuta di un fattore e^2 , cioè di circa 7,39 volte il valore iniziale, e così via.

L'insorgere del caos è strettamente legato al fenomeno delle risonanze, cioè alla presenza di rapporti semplici tra i periodi di rivoluzione o di precessione dei corpi celesti considerati. Ad esempio se un corpo celeste si trova su un'orbita avente un semiasse maggiore pari a 0,62996 volte quello di Giove, per la terza legge di Keplero il suo periodo orbitale sarà uguale a 0,5 volte quello di Giove. Cioè nell'intervallo di tempo in cui Giove esegue un giro completo intorno al Sole il corpo celeste ne compirà esattamente due: si parla in questo caso di risonanza 2:1 con Giove. In generale lo stato di risonanza comporta la ripetizione periodica delle stesse configurazioni reciproche tra i due corpi celesti coinvolti; in tal caso una parte delle perturbazioni gravitazionali non si compensano nel corso del tempo, come avviene normalmente, ma si accumulano progressivamente, generando effetti particolarmente intensi sull'eccentricità ed inclinazione del corpo celeste. La grandezza di tali perturbazioni dipende in modo critico dal verificarsi in modo esatto della condizione di commensurabilità; si verifica quindi quella estrema sensibilità dalle condizioni iniziali che è tipica del moto caotico. La risonanza secolare possiamo definirla come uno stato dinamico in cui il periodo di precessione della linea dei nodi o dell'argomento del perielio di un corpo celeste viene a coincidere con l'analogo periodo di precessione del corpo maggiore. Tale situazione dà origine in generale a fenomeni di caos dinamico.

Pochi anni dopo (1992) Jacques Laskar, Thomas Quinn, e Scott Tremaine, confermano l'esistenza di risonanze secolari tra i moti di precessione della Terra e di Marte.

Ancora Laskar [1997] facendo integrazioni di equazioni del Sistema Solare in un periodo di miliardi di anni, ha dimostrato che gli spazi dei pianeti interni possono essere la conseguenza della presenza di caos in grande scala nelle loro orbite, i cui intervalli di variazioni sono solamente limitati da qualche mancanza di conservazione del loro momento angolare, cioè la parte del loro momento angolare risultante dal moto non circolare e non planare.

Norman Murray e Matthew Holman [1999] hanno sviluppato una nuova teoria analitica che dimostra che il caos tra i pianeti gioviani risulta dalla sovrapposizione delle componenti di una risonanza di moto medio a tre corpi, Giove, Saturno e Urano. Gli stessi ricercatori danno un valore approssimato del tempo di Liapunov (10^7 anni); i pianeti gioviani devono essere entrati in risonanza dopo che tutti i gas e la maggior parte dei planetesimi nel disco protoplanetario furono rimossi.

Gli ultimi che si sono interessati all'argomento che ci riguarda sono stati T.A. Michtchenko e S. Ferraz-Mello, i quali hanno studiato le risonanze del Sistema Solare esterno nelle vicinanze dei pianeti. La stabilità di questa zona è analizzata usando un nuovo metodo numerico per scoprire la caoticità del moto planetario; questi ricercatori esplorano una gran parte dello spazio delle fasi dove il Sistema Solare esterno evolve e costruiscono mappe dinamiche delle regioni intorno ai pianeti gioviani. Le regioni studiate sono densamente riempite da risonanze di moto medio a due e tre pianeti che generano instabilità nel moto planetario. Inoltre Michtchenko e Ferraz-Mello hanno dimostrato quanto siano vicine le reali posizioni dei pianeti a queste instabilità.

Conclusioni

Nell'articolo che King-Hele dedica agli studi sui fenomeni di risonanza, egli si chiede (e si risponde): «*Are they significant, or mere numerology?*». *The quick answer is: "Yes, yes"* [King-Hele 1972].

Bibliografia

- Backus, G.E.
1969 *Critique of 'the resonant structure of the Solar System'*, by A.M. Molchanov, in «Icarus», 11, pp. 88-92.
- Copernico, N.
1979 *De Revolutionibus*, in *Opere di N. Copernico*, Utet, Torino.
- Dole, S.H.
1970 *Computer simulation of the formation of Planetary System*, in «Icarus», 13, pp. 494-508.
- Dermott, S.F.
1969 *On the origin of commensurabilities in the Solar System - III The resonant structure of the Solar System*, in «Mon. Not. R. Astr. Soc.», 142, p. 307.
- Dormand, J.R. e Woolfson, M.M.
1971 *The capture theory and planetary condensation*, in «Mon. Not. R. Astr. Soc.», 151, p. 307.
- Dreyer, J.L.E.
1953 *History of Astronomy from Thales to Kepler*, Dover.
- Gingerich, O.
1969 *Kepler and the resonant structure of the Solar System*, in «Icarus», 11, pp. 111-113.
- Henon, M.
1969 *A comment on 'the resonant structure of the Solar System'*, by A.M. Molchanov, in «Icarus», 11, pp. 93-94.
- Hills, J.G.
1970 *Dynamic relaxation of planetary system and Bodes' law*, in «Nature», 225, p. 840.

- Kassler, J.C.
1982 *Music as a model in early science*, in «History of Science», 20, pp. 103-139.
- King-Hele, D.G.
1972 *Heavenly Harmony and Earthly Harmonics*, in «Q. Jl. R. Astr. Soc.», 13, pp. 374-395.
- Kuhn, T. S.
2002 *La rivoluzione copernicana*, Einaudi, Torino.
- Laskar, J.
1988 *Secular evolution of the solar system over 10 million years*, «Astron. & Astrophys», 198, pp. 341-362.
1989 *A numerical experiment on the chaotic behaviour of the Solar System*, in «Nature», 338, pp. 237-238.
1997 *Large scale chaos and the spacing of the inner planets*, in «Astron. & Astrophys», 317L, p. 75.
- Laskar, J., Quinn, T. e Tremaine, S.
1992 *Confirmation of resonant structure in the Solar System*, in «Icarus», 95, pp. 148-152.
- Lowell, P.
1913 *The origin of the planets*, in «Mem. Amer. Academy», XIV,
1916 *The Genesis of the Planets*
- Michtchenko, T. A. e Ferraz-Mello, S.
2001 *Resonant structure of the outer Solar System in the neighborhood of the planets*, in «Astron. J.», 122, pp. 474-481.
- Molchanov, A.M.
1968 *The resonant structure of the Solar System*, in «Icarus», 8, pp. 203-215.
1969 *Resonances in complex systems: a replay to critiques*, in «Icarus», 11, pp. 95-103.
- Murray, N. e Holman, M.
1999 *The origin of chaos in the outer Solar System*, in «Science», 283, pp. 1877-1881.
- Tannery, P.
1893 *Sur les opinions conjecturales des anciens concernant les distances des planètes à la terre*, in Id., *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, Gauthier-Villars et fils, Paris, pp. 323-336.
- Tisserand, F.
1889-96 *Traité de mécanique celeste*, 4 voll., Gauthier-Villars et fils, Paris.
- Williams, I. P. e Galley, S.J.
1971 *Planetary formation*, in «Mon. Not. R. Astr. Soc.», 151, p. 207.