UN'INTERPRETAZIONE MULTIMEDIALE DEL PENDOLO

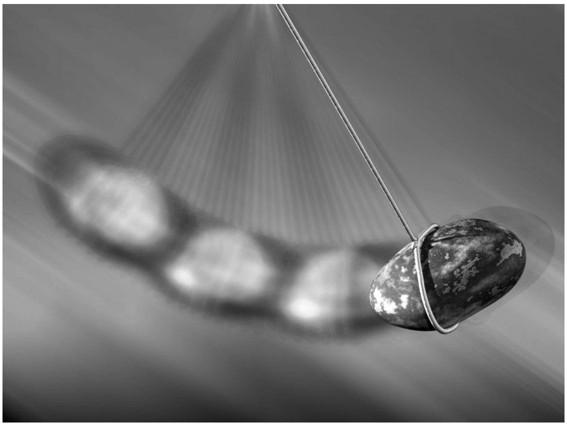
Fabio Bevilacqua, Lidia Falomo, Lucio Fregonese,
Enrico Giannetto, Franco Giudice, Paolo Mascheretti

Università di Pavia

1. Un corpo oscillante e un riorientamento gestaltico: caduta vincolata e isocronismo

Nella *Struttura delle rivoluzioni scientifiche* di Thomas Kuhn si legge:

Fin dalla remota antichità molti avevano visto che un qualunque corpo pesante, appeso a una corda o a una catena, oscilla avanti e indietro fino a raggiungere alla fine uno stato di quiete[1].



Ma «vedevano» tutti la medesima «cosa»?

Per gli aristotelici, che credevano che un corpo pesante si muovesse per sua natura da una posizione più elevata verso uno stato di riposo naturale in una posizione più bassa, un corpo oscillante era semplicemente un corpo che cadeva con difficoltà. Vincolato dalla catena, esso poteva raggiungere lo stato di riposo nel suo punto più basso dopo un movimento tortuoso e un periodo di tempo considerevole. Galileo, invece, quando guardò un corpo oscillante, vide un pendolo, ossia un corpo che quasi riusciva a ripetere lo stesso movimento più e più volte all'infinito[2].

[1] S. Thomas e T. Kuhn, *La struttura delle rivoluzioni scientifiche* (1970), trad. it., Einaudi, Torino 1978, pp. 147-148.

[2] Ivi, p. 148.

Sono possibili qui due interpretazioni e l'attenzione concerne il riorientamento gestaltico che si rende disponibile a diversi importanti scienziati, i protagonisti della nostra storia, che osservano un corpo oscillante: tra chi vede cioè una caduta vincolata e chi vede invece l'isocronismo delle oscillazioni.

Sebbene, di primo acchito, Kuhn sembri attribuire la prima interpretazione agli aristotelici e la seconda a Galileo, è ormai ben noto che il «corpo oscillante» giocò un ruolo centrale nell'interpretazione galileiana (e newtoniana) della caduta dei corpi.

Quello che proponiamo è di vedere nelle opere di Galileo, Huygens e Daniel Bernoulli questa capacità di «oscillazione» entro le due interpretazioni relative a che cosa s'intende, da Galileo in avanti, per «pendolo».

Confidando che insegnanti e studenti possano fare altrettanto, racconteremo una storia che riguarda la meno nota, ma più antica, interpretazione del corpo oscillante: quella che lo vede ancora come una caduta vincolata (benché nel vuoto). Essa fornirà un numero di vantaggi inaspettati e ci introdurrà al concetto di «potenziale» e infine all'interazione tra «energia potenziale» ed «energia attuale» secondo il principio di conservazione dell'energia. Non deve destare meraviglia che questa tradizione si origini con Aristotele (continuando poi, in epoca moderna, con Leibniz).

2. Galileo: altezze di salita e di discesa; la legge di caduta libera

L'assunzione fondamentale che Galileo fa osservando un corpo oscillante appare già nel primissimo stadio della sua attività scientifica. Studiando infatti la caduta vincolata su un piano inclinato, Galileo nei suoi *De motu*, scritti tra il 1589 e il 1592, afferma che: «un corpo pesante tende verso il basso con tanta forza quanta ne occorrerebbe per trascinarlo verso l'alto»[3].

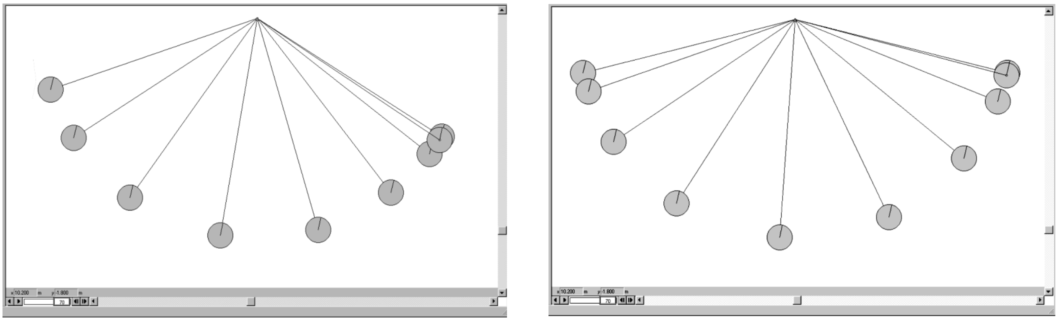
Si tratta di un vero e proprio spostamento di attenzione, dal movimento effettivo e dalla traiettoria effettiva del corpo all'altezza di salita e di discesa. Nella concettualizzazione più matura di questa assunzione, quella cioè consegnata alla prima giornata dei *Discorsi* (1638), viene sostenuto:

> come chiaramente si vede in un pendolo assai grave, che slargato cinquanta o sessanta gradi dal perpendicolo, guadagna quella velocità e virtù che basta precisamente a sospignerlo ad altrettanta elevazione, trattone però quel poco che gli vien tolto dall'impedimento dell'aria[4].

Questo spostamento di attenzione verso l'altezza di discesa e di salita nella caduta vincolata non era un passo semplice. E non era, di certo, ricavato dall'osservazione: il pendolo, in condizioni normali, non si solleva verso la medesima altezza di discesa, come si può facilmente osservare mediante una simulazione al computer:

[3] G. Galilei, *Opere*, vol. I, Edizione Nazionale a cura di A. Favaro, Giunti e Barbera, Firenze 1964, p. 297.

[4] Ivi, vol. VIII, p. 138.



Simulazione del moto del pendolo nell'aria e nel vuoto

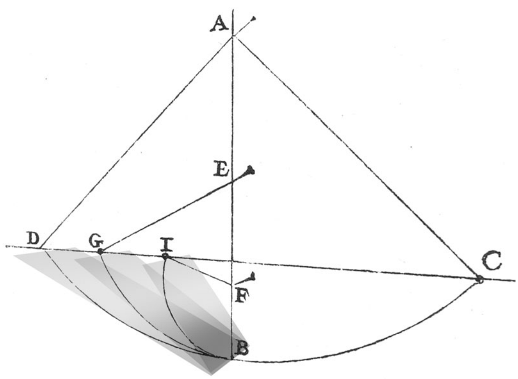
È tuttavia facile, oggi, mostrare quello che Galileo aveva in mente: eliminando gli «impedimenti», come la resistenza dell'aria, il pendolo infatti oscilla in accordo con l'assunzione galileiana.

La principale assunzione della terza giornata dei *Discorsi* è che:

i gradi di velocità, acquistati da un medesimo mobile su piani diversamente inclinati, sono uguali allorché sono uguali le elevazioni di quei medesimi piani[5].

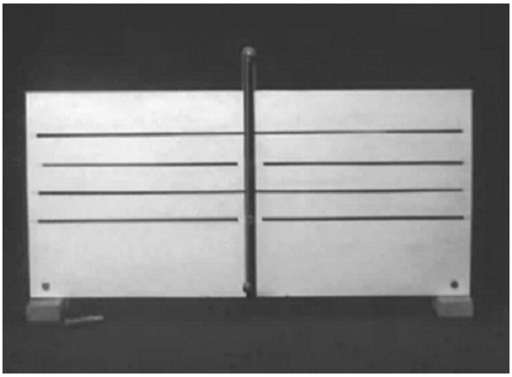
Questo significa che la velocità finale di caduta dipende dall'altezza verticale di discesa (l'elevazione) e non dalle traiettorie effettivamente seguite (i piani inclinati). Viene così stabilita una corrispondenza fra le traiettorie del pendolo e piani diversamente inclinati. Adesso, infatti, è il moto del pendolo «vincolato» a «stabilire» l'assunzione: l'accento non è sulle traiettorie, bensì sulle altezze iniziali e finali.

Ancora una volta, una ricostruzione e un'animazione può aiutarci a «vedere» che quando la caduta del pendolo è vincolata da chiodi sulla verticale, tutte le volte che è possibile il peso si risolleva alla medesima altezza, anche se non in una posizione simmetrica, e quando anche ciò diventa impossibile (essendo il chiodo in una posizione tale che la lunghezza della stringa rimasta libera è troppo corta) esso mostra ancora di avere una capacità di movimento che lo fa ruotare intorno all'«impedimento».



Ma che cosa c'è dietro l'assunzione di Galileo? Il principio, già espresso parecchio tempo prima da Leonardo, che i corpi non possono essere sollevati a un livello più alto soltanto in virtù

[5] Ivi, p. 205.



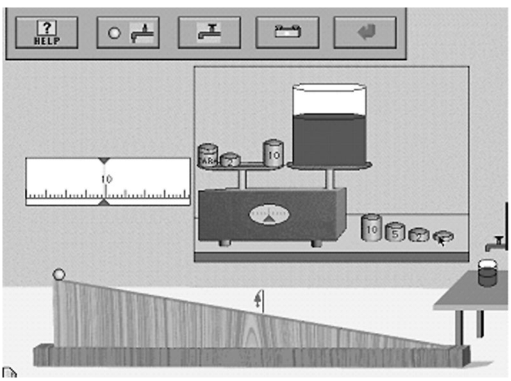
del loro peso, ossia una primitiva formulazione del principio dell'impossibilità del moto perpetuo. Il peso terminale del pendolo nel suo moto periodico idealizzato non può risollevarsi a un livello più alto o più basso di quello della prima discesa, altrimenti si produrrebbe del lavoro dal nulla.

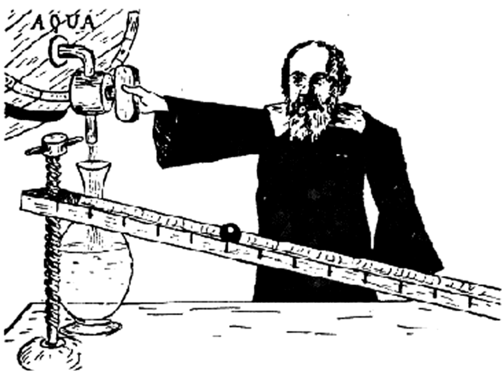
L'importante quantità connessa all'altezza iniziale e finale è così la velocità acquisita durante la caduta. A ogni altezza di caduta corrisponde una velocità finale acquisita durante la caduta. Viene quindi evidenziato un legame tra una quantità (altezza) statica, di posizione, e una (velocità) cinematica.

Qual è la relazione matematica che connette le due quantità?

Una simulazione può semplificare la comprensione dei procedimenti di Galileo nel famoso passaggio dei *Discorsi*.

L'altezza di caduta gioca qui un duplice ruolo, nella posizione iniziale della palla sul piano inclinato e nel livello dell'acqua nel recipiente d'acqua: il recipiente d'acqua è grande e il tubo, che conduce al rubinetto, è sottile, così che l'altezza di caduta dell'acqua è essenzialmente costante. Assumendo una relazione tra l'altezza del livello dell'acqua nel recipiente e la velocità dell'acqua che esce attraverso il rubinetto, ciò rende possibile un flusso costante dell'acqua e quindi la precisione della misurazione del tempo.





I risultati degli sforzi di Galileo possono essere sintetizzati in termini moderni come segue (g è l'accelerazione dovuta alla gravità, $a = g\ sin\theta$ è l'accelerazione che varia con l'inclinazione, $s = h/g\ sin\theta$ è la lunghezza del piano inclinato, h la sua altezza):

– la velocità istantanea è proporzionale al tempo trascorso: $v = at$
– la distanza è proporzionale al quadrato dei tempi: $s = at^2/2$
– da queste due relazioni si ha: $s = v^2/2°$

ossia:

– la velocità finale è proporzionale alla radice quadrata dell'altezza $v_f = \sqrt{2gh}$

Si tratta di una legge fondamentale poiché connette, forse per la prima volta, la posizione e le velocità, la statica e la cinematica. Una delle più straordinarie caratteristiche di questa legge, assente nei moderni libri di testo, è che le due quantità, la posizione e la velocità, non sono prese allo stesso istante. La velocità è quella che il corpo acquisisce cadendo dall'altezza, ossia è la velocità «virtuale» o «potenziale» che esso acquisirebbe se cadesse da quell'altezza. Rovesciando le due quantità, possiamo anche dire che un corpo con una tale velocità può sollevarsi a una tale posizione. Il pendolo, in questo modo, acquista un nuovo significato: nel primo quarto del periodo il peso che cade acquisisce una velocità che, senza attrito e altri impedimenti, lo solleverà sul lato simmetrico nel secondo quarto alla medesima altezza di discesa. E lo stesso accade nella terza e nella quarta parte del periodo fino a che il peso riacquista la sua posizione originaria.

3. Huygens: dal centro di oscillazione di un pendolo composto alla conservazione della vis viva in una data posizione

Nel 1673, Christiaan Huygens nel suo *Orologium Oscillatorium* dà un contributo rilevante alla nostra storia, risolvendo un difficile e importante problema. In natura i pendoli non sono oggetti ideali, bensì oggetti reali con pesi che non sono concentrati in un punto all'estremità di un filo senza peso. Entro il contesto dei suoi tentativi di misurare il tempo, Huygens cercava una risposta al seguente problema: qual è il centro di oscillazione di un pendolo composto? Vale a dire: qual è la lunghezza di un pendolo semplice che oscilla con lo stesso periodo di un determinato pendolo composto? La ricerca di una soluzione a questo problema, forse la più importante tra i suoi principali risultati, produsse anche dei risultati per la nostra storia della caduta vincolata. I primi tentativi di Huygens risalgono al 1661-1664, ma noi faremo qui riferimento alla spiegazione fornita nel 1673.

Generalizzando l'approccio di Galileo, Huygens formula due assunzioni fondamentali e un certo numero di proposizioni. Mentre Galileo era interessato a un corpo singolo, Huygens tratta con molti corpi, ossia con un sistema di corpi connessi, e così il suo interesse è per il loro centro di gravità. La prima ipotesi afferma che:

Se quanti si vogliano oggetti pesanti, in virtù della loro gravità, cominciassero a muoversi, il centro di gravità da essi composto non potrebbe salire più in alto di quanto si trovava all'inizio del moto[6].

Questa affermazione, pur nella sua apparente semplicità, avrà conseguenze straordinarie. Non meraviglia quindi che Huygens faccia qualche sforzo per spiegarne il significato. Egli, in realtà, afferma qui, e diverse volte in seguito, che il contenuto effettivo dell'ipotesi è semplicemente che i corpi non possono, soltanto «in virtù della loro gravità», risollevarsi a un'altezza maggiore di quella di caduta, un'affermazione che, egli ribadisce, è ampiamente condivisa.

Ma ora Huygens introduce un commento che era implicito nei *Discorsi* di Galileo:

infatti, se quei costruttori di nuove macchine, i quali con inutili sforzi si danno da fare per ottenere il moto perpetuo, avessero conosciuto come usare questa ipotesi, avrebbero facilmente scoperto i loro errori e avrebbero compreso che quella cosa non è affatto possibile con mezzi meccanici[7].

In termini moderni ciò equivale a dire che: una quantità di lavoro non può essere prodotta senza una corrispondente compensazione, il moto perpetuo è impossibile.

Segue una seconda ipotesi:

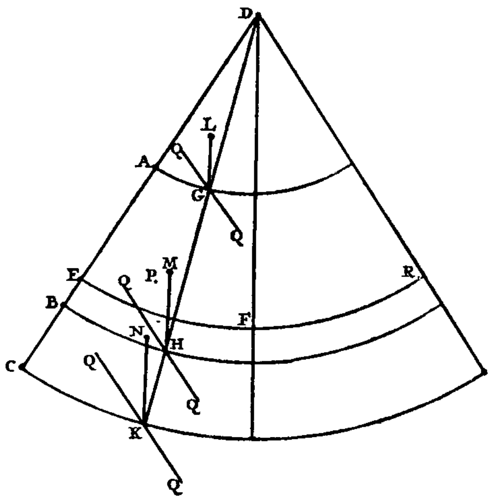
se vengono rimossi l'aria o qualsiasi altro impedimento, come desideriamo che sia nelle successive dimostrazioni, il centro di gravità di un pendolo che oscilla descrive archi uguali nello scendere e nel salire.

Infatti, non è possibile immaginare un pendolo che dopo ogni due quarti del periodo si risollevi soltanto «in virtù della sua gravità» a una posizione più alta! Ma il grande risultato di Huygens qui consiste nell'applicare questo principio al centro di gravità del pendolo composto. Da questa estensione di una linea di pensiero galileana seguiranno straordinarie conseguenze.

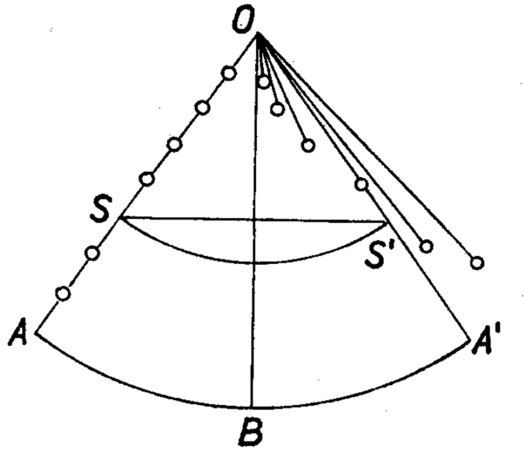
Nella proposizione terza, Huygens specifica che $H = \Sigma m_i r_i / \Sigma m_i$ (dove H è l'altezza di salita/discesa del centro di gravità, m_i sono i pesi e r_i le loro altezze di salita/discesa), e nella quarta afferma che la rimozione dei vincoli tra i corpi o parti dei corpi non influenza l'equivalenza tra l'altezza di salita e di discesa. In termini moderni: questi vincoli non effettuano lavoro.

Assumiamo che un pendolo sia composto da più corpi pesanti e, partendo dalla quiete, abbia effettuato una parte qualsiasi dell'oscillazione completa, e successivamente si verifichi che i suoi singoli pesi, abbandonato il vincolo comune, invertano verso l'alto le velocità acquisite e si sollevino tanto in alto quanto possono salire. Concesso ciò, il centro di gravità composto da tutti sarà ritornato alla medesima altezza in cui si trovava all'inizio dell'oscillazione[8].

[6] C. Huygens, *Orologium Oscillatorium*, 1673, parte IV, ipotesi I.
[7] *Ibidem*.
[8] Ivi, Prop. IV.



Huygens



Mach

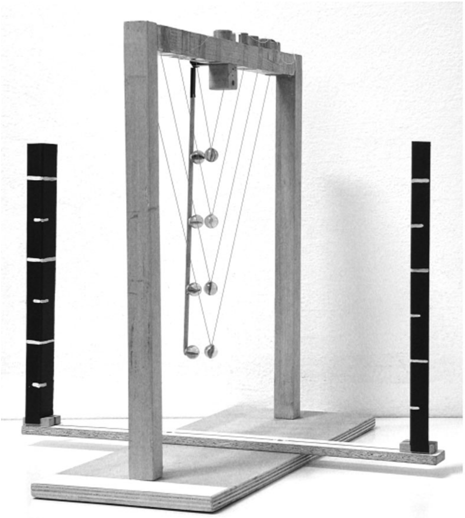
4. La versione di Mach

Per motivi didattici, seguiamo qui la versione di Mach di questa importante formulazione: il centro di gravità riacquista la sua altezza iniziale non solo dopo una caduta libera e una salita libera, non solo dopo una caduta vincolata e una salita vincolata, ma anche dopo una caduta vincolata e una discesa libera.

Se vengono eliminati i vincoli all'estremità del primo quarto del periodo sulla linea verticale, i pesi del pendolo possono muoversi liberamente nel secondo quarto con le velocità iniziali uguali alle velocità finali acquisite della caduta vincolata. Alcuni dei pesi si solleveranno a un livello più basso rispetto al caso della caduta libera e alcuni a un livello più alto. Se riusciamo a registrare l'altezza massima di salita dei singoli pesi (dovuta alle diverse lunghezze dei pendoli che saranno raggiunte in tempi diversi), possiamo calcolare la posizione del centro di gravità e comprendere che le ipotesi di Huygens sono corrette.

Ma come si possono eliminare i vincoli senza perturbare i moti?

Immaginiamo che sulla linea verticale all'estremità del primo quarto del periodo un pendolo composto fatto di pesi (palle di ferro o di marmo) connessi mediante un vincolo privo di peso (legno di balsa) colpisca un numero uguale di pesi uguali individualmente sospesi e sia quindi libero di muoversi. Assumendo la conservazione della quantità di moto durante l'impatto, vediamo che i pesi si sollevano a diverse altezze, più in alto o più in basso, in accordo con le affermazioni di Huygens. Possiamo altresì renderci conto della difficoltà di una precisa valutazione sperimentale dell'ipotesi.



Animation

Una visualizzazione può essere ottenuta mediante un'animazione al computer.

La rimozione automatica dei vincoli, l'allineamento che mostrano le diverse altezze massime di salita, e il calcolo automatico della posizione del centro di gravità sono di grande aiuto non nel dimostrare le ipotesi (il software è programmato sulle leggi meccaniche che stiamo trattando), bensì nel comprenderle.

Per quanto concerne la discesa libera, in base al risultato di Galileo, la distanza verticale coperta da un corpo pesante in caduta libera a partire dalla quiete è proporzionale al quadrato della velocità acquisita durante la caduta, velocità con la quale esso potrebbe risollevarsi alla medesima altezza. Applicando la relazione $v_f = \sqrt{2gh}$ a ogni peso in caduta libera:

$$\Sigma m_i r_i = \Sigma m_i v_i^2/2g$$

Nel caso della discesa vincolata possiamo trovare le singole velocità soltanto attraverso le singole altezze della salita libera (trovata sperimentalmente) nel secondo quarto del periodo. Ma ora possiamo applicare la relazione galileiana alle altezze di salita ed esprimere le velocità finali della caduta vincolata con la medesima legge (la lettera u è impiegata per indicare le velocità acquisite nella caduta vincolata):

$$\Sigma m_i r_i = \Sigma m_i u_i^2/2g$$

In questo modo il risultato dell'equivalenza dell'altezza di salita e di discesa del centro di gravità è:

$$\Sigma m_i v_i^2/2g\Sigma m_i = \Sigma m_i u_i^2/2g\Sigma m_i$$

E quindi:

$$\Sigma m_i v_i^2 = ?m_i u_i^2$$

Il risultato di Huygens così consiste in ciò: per un sistema di corpi sotto l'effetto della gravità, la somma dei prodotti delle masse moltiplicata per i quadrati delle velocità finali è la stessa, sia che i corpi si muovano vincolati insieme sia che si muovano liberamente dalla stessa altezza verticale. Appare da questo risultato che $\Sigma m_i v_i^2$ è una quantità significativa, che è caratteristica della posizione del sistema (la sua altezza verticale) e non dipende dalle traiettorie seguite per raggiungere quella posizione, sotto le condizioni assunte. Ancora una volta, dobbiamo tenere in mente che in questa quantità, tipica di un sistema in una posizione data, le velocità, sia vincolate sia libere, sono le velocità della caduta «virtuale» o «potenziale».

In questo modo, il pendolo (composto) otteneva un risultato davvero molto importante: aiutava a identificare una significativa quantità fisica, chiamata «vis viva», la moderna capacità di un corpo di produrre «lavoro», la sua indipendenza dalla posizione del sistema dei corpi e la sua indipendenza da quei vincoli che non producono «lavoro». Ritornando alla posizione iniziale (che completa una traiettoria chiusa) il valore della vis viva non muta, poiché non dipende dalle traiettorie effettive: essa è una costante del sistema per una posizione data. Tale è il significato, in questo contesto, della «conservazione della vis viva». Durante il moto, infatti, la «vis viva» varia in ogni istante, data la variazione delle velocità effettive.

5. Bernoulli e la nascita del potenziale

Nella sua *Hydrodinamica* del 1738, Daniel Bernoulli (il primo a introdurre la funzione di potenziale) analizza ampiamente la relazione tra «descensus actualis» e «ascensus potentialis».

Nel suo approccio del 1748 all'argomento qui in oggetto, il punto di partenza è la conservazione della vis viva derivata dai risultati di Huygens:

$$mv^2 + m'v'^2 + m''v''^2 + \ldots = mu^2 + m'u'^2 + m''u''^2 + \ldots$$

Come può essere utilizzata questa legge per connettere le velocità e le forze esterne? Attraverso il teorema di Galileo: infatti, nel caso della gravità uniforme e parallela, il quadrato della velocità ottenuta è proporzionale allo spostamento e pertanto questa è indipendente dalla traiettoria del corpo: «c'è sempre conservazione della vis viva in riferimento all'altezza da cui la caduta avviene».

Assumendo l'accelerazione di gravità come uguale all'unità e le distanze di caduta verticale uguali a x, x' e così via:

$$u^2 = 2x,\ u'^2 = 2x',\ u''^2 = 2x'',\ldots$$

l'espressione della conservazione della vis viva diventa

$$mv^2 + m'v'^2 + m''v''^2 + \ldots = mx + m'x' + m''x'' + \ldots$$

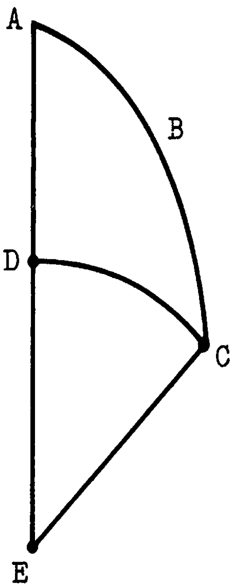
e così «la vis viva totale è uguale al prodotto della massa totale del sistema per il doppio della distanza verticale di caduta del centro di gravità».

Da un punto di vista moderno, il secondo membro esprime il doppio del «lavoro» fatto dalle forze agenti sul sistema (in questo caso le forze centrali e l'unità di accelerazione): la forza (la massa per l'accelerazione) per la distanza. La vis viva del sistema in una data posizione (le velocità sono qui ancora le velocità finali di una caduta potenziale) equivale al «lavoro» fatto per raggiungere quella posizione ossia la capacità di produrre «lavoro» che *proviene* da quella posizione.

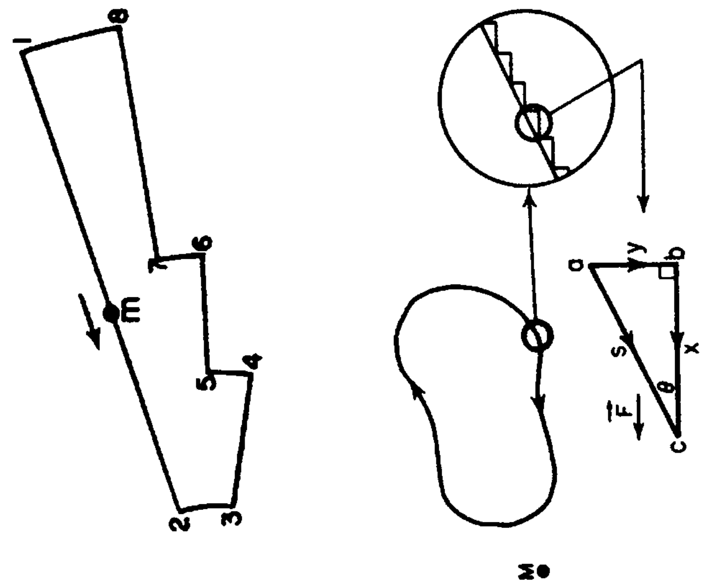
La variazione della vis viva dipende dalla distanza e non dalla traiettoria: la vis viva in D e in C è la stessa, muovendosi da C verso D non c'è alcun cambiamento nella vis viva (nessun lavoro viene prodotto lungo le traiettorie perpendicolari alla forza, la differenza nella vis viva tra A e D così non dipende dalla traiettoria seguita, in linea retta verso il basso da a A a D o attraverso C). La vis viva in D dipende soltanto dalla distanza rispetto al centro di attrazione, è adesso una quantità di posizione. Nella traiettoria chiusa DACD non c'è guadagno o perdita di «lavoro». La differenza nel «lavoro» dipende soltanto dalle posizioni iniziali o finali e non dalla traiettoria. La vis viva «di posizione» è così un'indicazione del «lavoro» potenziale, quella che in seguito sarà chiamata energia potenziale. La variazione della vis viva è uguale alla variazione del «lavoro» potenziale.

6. I moderni libri di testo utilizzano ancora l'approccio di Bernoulli

Le *Lectures on Physics* di Feynman sono un esempio lampante. Nell'analizzare il lavoro fatto dalla gravità, Feynman intende mostrare che il lavoro totale fatto entro un ciclo completo è zero, in accordo con l'impossibilità del moto perpetuo.



D. Bernoulli


R. Feynman

Egli analizza così una traiettoria chiusa in un campo gravitazionale e mostra che sulle traiettorie circolari il lavoro è zero, poiché la forza è ad angoli retti rispetto alla curva, e sulle traiettorie radiali il lavoro totale è zero, poiché è la somma della stessa quantità di lavoro fatta una volta nella direzione del centro di attrazione e una seconda volta in direzione opposta.

Nel caso di una curva reale, la situazione è diversa? No, perché possiamo far riferimento alla stessa analisi: il lavoro fatto nell'andare da *a* a *b* e da *b* a *c* su un triangolo è lo stesso del lavoro fatto nell'andare direttamente da *a* a *c*. Nel medesimo capitolo, Feynman, trattando il moto planetario, afferma che:

> Finché torniamo alla stessa distanza (posizione), l'energia cinetica sarà la stessa. Così, sia che il moto è quello reale, indisturbato, oppure che gli venga mutata la direzione mediante guide, mediante vincoli privi di attrito, l'energia cinetica con la quale il pianeta arriva in un punto sarà la stessa[9].

Un chiaro, benché implicito e forse inconsapevole, riferimento ai risultati di Daniel Bernoulli (attraverso la mediazione della tradizione della meccanica razionale): il lavoro dipende soltanto dalle posizioni iniziali e finali (la differenza di potenziale) e non dai percorsi effettivi (la traiettoria).

In questo modo, l'intuizione che i pendoli senza impedimenti possono soltanto risalire alle altezze originarie ha prodotto, attraverso un numero di risultati, un davvero importante e duraturo risultato storico: dalla conservazione della vis viva in posizioni particolari, un considerevole riorientamento gestaltico rispetto all'isocronismo e un grande passo verso quella che è adesso la conservazione dell'energia.

Bibliografia

Bernoulli D.
1738 *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*, Argentorati.
1748 *Remarques sur le principe de la conservation des forces vives pris dans un sens général*, in Lindsay 1975, pp. 143-148.
Camerota M.
1992 *Gli scritti De motu antiquiora di Galileo Galilei: il Ms Gal 7*, CUEC, Cagliari.
Drake S.
1976 *The Evolution of De Motu*, in «Physis», 14, pp. 321-348.
1995 *Galileo at Work*, ristampa, Dover Publication, New York.
Erlichson H.
1996 *Christiaan Huygens' Discovery of the Center of Oscillation Formula*, in «American Journal of Physics», 64, pp. 571-574.
Feynman R.
1975 *The Feynman Lectures on Physics*, Inter European Editions, Amsterdam.

[9] R. Feynman, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. I, Part 1, Inter European Editions, Amsterdam, pp. 13-25.

Gabbey A.
1980 *Huygens and Mechanics*, in *Studies on Christiaan Huygens*, a cura di H.J.M. Bos, M.J.S. Rudwick e R.P.W. Visser, Swets and Zeitlinger, Lisse, pp. 166-199.
Galilei G.
1890-1909a *De Motu*, in *Le opere di Galileo Galilei, Edizione Nazionale*, Vol. 1, Barbera, Firenze.
1890-1909b *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, in *Le opere di Galileo Galilei, Edizione Nazionale*, Vol. 8, Barbera, Firenze.
1890-1909c *Mecaniche*, in *Le opere di Galileo Galilei, Edizione Nazionale*, Vol. 2, Barbera, Firenze.
Galluzzi P.
1979 *Momento: studi galileiani,* Edizioni dell'Ateneo e Bizzarri, Roma.
Huygens C.
1888-1950 *Orologium oscillatorium*, in *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*, Vol. 18, M. Nijhoff, La Haye.
1986 *The Pendulum Clock or Geometrical Demonstrations Concerning the Motion of Pendula as Applied to Clocks*, trad. di R.J. Blackwell, The Iowa State University Press, Ames.
Koyré A.
1978 *Galileo Studies,* Mepham, Hassocks.
Kuhn T.
1970 *The Structure of Scientific Revolutions*, 2 ed., University of Chicago Press, Chicago.
Lindsay R.B.
1975 *Energy: Historical Developement of the Concept*, Dowden, Hutchinson and Ross, Stroudsburg.
MacCurdy E. (a cura di)
1941 *The Notebooks of Leonardo da Vinci,* Garden City Publishing Co., New York.
Mach E.
1974 *The Science of Mechanics: A Critical and Historical Account of Its Development,* The Open Court Publishing Company, La Salle.
Matthews M.
2000 *Times for Science Education,* Kluwer, New York.
Naylor R.
1974 *Galileo and the Problem of Free Fall*, in «British Journal for the History of Science», 7, pp. 105-134.
Wisan W.L.
1974 *The New Science of Motion: A Study of Galileo's De Motu locali*, in «Archive for History of Exact Sciences», 13, pp. 103-306.
Yoder J.G.
1988 *Unrolling Time: Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature,* Cambridge University Press, Cambridge.