GABRIO PIOLA E LA MECCANICA ITALIANA AGLI INIZI DELL'OTTOCENTO

DANILO CAPECCHI

Università di Napoli

1. Introduzione

In Italia, a cavallo tra il Settecento e l'Ottocento la situazione della meccanica teorica, come anche della scienza in generale, non è particolarmente brillante. Le cose non migliorano durante la Restaurazione e solo dopo la metà dell'Ottocento si assiste a una ripresa, anche se più per le matematiche che per le discipline scientifiche propriamente dette. Sebbene non esista ancora una specializzazione spinta come si verifica oggi e gran parte degli scienziati si occupino di matematica, meccanica, fisica teorica e sperimentale, cominciano ad affiorare i primi sintomi della differenziazione specialistica, specialmente in conseguenza dello sviluppo delle scienze baconiane. Le discipline meno differenziate tra loro sono la matematica e la meccanica (con l'astronomia). Gli studiosi più interessanti in entrambi i settori, dopo Lagrange, sono Lorenzo Mascheroni (1750-1800) e Vittorio Fossombroni (1754-1844).

Con la generazione immediatamente successiva la situazione non si presenta molto più soddisfacente, seppure forse un po' meno deprimente di quanto si dica spesso[1]. Un esame della produzione dell'epoca mostra una carenza creativa molto preoccupante e un certo isolamento culturale, se si escludono alcuni contatti degli scienziati del nord con la scuola francese. Le riviste più significative del periodo sono probabilmente le *Memorie di matematica e fisica* (Verona e Modena) e le *Memorie dell'Istituto nazionale italiano* (divenuto successivamente Reale istituto e poi Imperiale regio istituto del regno Lombardo-Veneto). Anche i lavori migliori rivelano un ritardo culturale notevole. Per esempio Girolamo Saladini (1740-1813), matematico abbastanza quotato anche se anziano, in una sua memoria del 1808 (*Sul principio delle velocità virtuali*) si rifà a Vittorio Fossombroni e addirittura a Vincenzo Angiulli. La sua «dimostrazione» del principio delle velocità virtuali, elude le difficoltà principali, tra cui quelle dovute alla presenza dei vincoli. Di livello analogo è una memoria di Araldi (1740-1813) (*Tentativo di una nuova rigorosa dimostrazione del principio dell'equipollenza*), più o meno dello stesso periodo, in cui si riportano le

[1] Una rassegna della situazione della matematica italiana agli inizi dell'Ottocento si può trovare nel libro di Umberto Bottazini, *Va pensiero. Immagini della matematica nell'Italia dell'Ottocento*, insieme a una vasta bibliografia. All'inizio del libro, a p. 23, viene riportato un deprimente commento del 1794 di Pietro Paoli, professore dello studio Pisano: «fra tutti quelli che in Italia si danno allo studio delle matematiche, se qualche genio si esclude, [...] pochi altri si contano che giungono alla mediocrità [...] al primo leggere dei libri degli Euler, dei d'Alembert, dei Lagrange, si abbatte in difficoltà insormontabili».

«dimostrazioni» della regola del parallelogramma delle forze e del principio delle velocità virtuali. La prima è una rivisitazione della famosa dimostrazione di Daniel Bernoulli, la seconda utilizza ragionamenti che si possono trovare in lavori precedenti degli scienziati dell'École polytechnique.

La situazione italiana riflette quella internazionale, esasperandola. Dopo la sintesi di Lagrange, la meccanica si è trovata ormai a un bivio e in una fase di stanca. Questo è vero in particolare per la statica, disciplina fondamentale per la tecnologia delle costruzioni. Il modello di corpo rigido usato dai meccanici settecenteschi ha ormai esaurito il suo compito; con esso si possono ancora risolvere nuovi problemi, ma questi o sono troppo complessi (si pensi ad esempio ai problemi degli *n* corpi) o non sono importanti. In una situazione diversa si trova l'idraulica per la quale il modello del fluido indeformabile non ha ancora esaurito il suo ruolo[2]. Comunque, nonostante la stasi degli aspetti più propriamente creativi, in Francia e nel resto dell'Europa è in corso un vivace ed estremamente interessante dibattito sui fondamenti. Dibattito originato in gran parte dalle discussioni seguite alla pubblicazione della *Mécanique analytique* di Lagrange del 1788, la quale aveva assunto quale principio fondante la meccanica il principio bernoulliano delle velocità virtuali, opportunamente generalizzato e integrato dal calcolo delle variazioni. L'Italia si introduce in qualche modo in questo dibattito ma con un contributo marginale, come testimoniano i lavori di Saladini e Araldi, citati poco sopra.

La maggior parte degli studiosi italiani, in assenza di una vena creativa, dirige i propri sforzi verso la critica e la ricerca di approcci rigorosi dei lavori della letteratura internazionale. Rifacendosi però non alle nuove istanze epistemologiche ma cercando di riportare il tutto nell'ambito di una tradizione settecentesca. Ma, nonostante le resistenze e la mancanza di una conoscenza precisa degli sviluppi internazionali, la nuova matematica, e con essa la nuova meccanica, comincia a imporsi.

In molti matematici e meccanici italiani la modernità è rappresentata da Lagrange. In parte perché Lagrange aveva mantenuto i contatti con il mondo scientifico italiano anche dopo la sua partenza da Torino, in parte perché questi veniva sentito come italiano e il richiamo al celebre compatriota non poteva essere ignorato quando cominciavano a sorgere le prime istanze nazionalistiche. A questo proposito è interessante lo scritto di Araldi in una memoria del 1810 (*Discorso e osservazioni intorno i progressi recenti dovuti agli italiani delle scienze matematiche e fisiche*), pubblicata dall'Istituto Nazionale Italiano di cui Araldi era segretario.

Vincenzo Brunacci (1768-1818) professore di matematica sublime a Pavia ritiene che l'approccio di Lagrange, sviluppato nella *Théorie des fonctions analytiques,* sia

[2] La meccanica uscirà dalla sua fase di stagnazione muovendosi secondo due direttrici. Da un lato allargando lo spettro dei fenomeni da studiare; ciò avviene abbandonando il modello di corpo rigido (agli inizi degli anni Venti dell'Ottocento nascerà per merito di Navier e Cauchy la meccanica dei continui elastici) e rivolgendo l'attenzione ai fenomeni dissipativi (con la valorizzazione dell'idea di lavoro e con l'accostamento della meccanica alla nascente termodinamica). Da un altro lato perfezionando la teoria; ciò avviene introducendo una formulazione più generale (vedi i contributi di Hamilton e Jacobi nella prima metà dell'Ottocento) e (re)introducendo il linguaggio geometrico, che nella forma rinnovatasi presenta come uno strumento formidabile di razionalizzazione. Per una panoramica generale di questi aspetti si può far riferimento a R. Dugas, *Histoire de la mécanique.*

quello giusto e che il concetto di infinitesimo sia da bandire dall'analisi e dalla meccanica. Nell'università di Brunacci insegnare il calcolo sublime in modo difforme dai dettami di Lagrange è addirittura proibito per regolamento. Brunacci trasmette la sua concezione dell'analisi agli allievi, tra cui Fabrizio Ottaviano Mossotti (1791-1863), Gabrio Piola (1794-1850) e Antonio Bordoni (1788-1860). Come esempio dello spirito che anima la scuola vanno considerate le note di Bordoni e Piola al bel libro di Giuseppe Venturoli centrato sull'idraulica (*Elementi di meccanica e d'idraulica*). In queste note (*Annotazioni agli elementi di meccanica e d'idraulica del professore Giuseppe Venturoli*), le dimostrazioni che Venturoli aveva fatto utilizzando gli infinitesimi vengono rifatte con l'impiego del metodo delle funzioni derivate di Lagrange. E Piola, nei suoi lavori di meccanica successivi, dedicherà ampio spazio ed energia al problema della eliminazione degli infinitesimi, riformulando il principio delle velocità virtuali proposto da Lagrange. Egli si propone di «razionalizzare» la *Mécanique* da due punti di vista; dal punto di vista matematico eliminando il concetto degli infinitesimi e dal punto di vista fisico facendo chiarezza sui principi. Anche Giovanni Battista Magistrini (*Osservazioni varie sopra alcuni punti principali di matematica superiore*) sposa le idee di Brunacci e precorre Piola nel riformulare il principio delle velocità virtuali senza l'uso degli infinitesimi.

Gabrio Piola è con Ottaviano Fabrizio Mossotti tra i matematici italiani più interessanti dei primi anni dell'Ottocento; tra i primi a cogliere l'importanza dei nuovi sviluppi della matematica e della meccanica, o perlomeno tra i primi ad accettarli. Piola è anche il punto di riferimento di Augustin Cauchy nel suo soggiorno italiano dal 1831 al 1833, con il quale condivideva anche una fede cattolica integralista. Fino allora fedele seguace di Lagrange, Piola subisce l'influenza di Cauchy in meccanica; ma non altrettanto in matematica per la quale egli mantiene Lagrange come costante riferimento e tra i francesi segue Poisson e Fourier.

In questo articolo mi soffermo su due lavori di Piola, *Sull'applicazione della meccanica analitica del Lagrange ai principali problemi* del 1825 e *La meccanica dei corpi naturalmente estesi trattata col calcolo delle variazioni* del 1833. Del primo evidenzierò i principi della meccanica di Piola, nel secondo cercherò di mettere in evidenza il contributo specifico dato alla meccanica del continuo.

2. L'applicazione della meccanica analitica

Nel seguente brano in cui Piola esprime le proprie concezioni sulla meccanica, si possono riconoscere gli stessi sentimenti che Lagrange esprime all'inizio della *Mécanique*; Piola, come Lagrange, è essenzialmente un matematico e più di Lagrange ha la tendenza a sottomettere la fisica all'analisi, imponendo a quella gli strumenti di questa.

> È importante pel matematico solamente di sapere se la quantità ch'egli contempla è veramente quantità suscettibile di misura: intorno a tutto il resto spettante all'essere e al modo d'essere di essa egli può tenersi poco altrimenti che indifferente. Così mentre si tormentano alcuni metafisici per dirci qualche cosa sulla natura del tempo, senza potercene mai dare una definizione, [...] l'astronomo ne misura le minime parti, piccole fin sotto i limiti dell'immaginazione. Così mentre un filosofo crede impossibile ogni moto, un altro

non sa persuadersi la quiete [...] il matematico si ride, o piuttosto sente compassione perché si abusi della ragione volendola condurre oltre i confini che le furono segnati; e intanto egli calcola i moti, egli misura i corpi (Piola, *Sull'applicazione della meccanica analitica del Lagrange*, p. XI e p. XV).

2.1 *I principi della meccanica del punto materiale*

Per qualche ragione ancora non ben chiarita dagli storici della scienza, in Italia c'è ancora una elevata resistenza ad accettare il concetto newtoniano di forza. L'approccio di d'Alembert, che privilegia la cinematica, è più vicino alla mentalità dei nostri scienziati ancora influenzati dalle idee di Galilei e Descartes. Piola si trova d'accordo con questa posizione e, con d'Alembert, ritiene che si debba sviluppare una meccanica partendo dalle idee di spazio e di tempo. A differenza di d'Alembert che considerava la meccanica una scienza razionale, della stessa natura della matematica, ritiene però che la meccanica sia una scienza fondata su principi di carattere empirico. Nella presentazione dei principi Piola si riallaccia al lavoro di Magistrini del 1816, in cui l'autore sostiene la preminenza della dinamica sulla statica.

La pratica stessa dei ragionamenti che impiegasi nel premettere la statica alla dinamica ci fa sentire questa verità [e cioè che si dovrebbe fare il contrario] coll'irregolarità e con la contraddizione [...]. Perciocché vedesi costretta a mettere in campo il ripiego di certo meccanico movimento infinitesimale (Magistrini, *Osservazioni varie sopra alcuni punti principali di matematica superiore*, p. 450).

Per dar forza alla sua concezione empirista, Piola si riallaccia anche a Newton, nonostante di esso non accetti il concetto fondamentale, la forza:

Ma appunto il conoscere la non assoluta necessità per rendere ragione dei fenomeni del moto può servire a condurci nel pensiero del gran geometra inglese [Newton], il quale ci esortava con parole di cui farò appresso menzione a pensare alle forze formandosene un solo concetto matematico, [...] parole che o non furono conosciute o non furono intese da coloro i quali, senza confrontare i propri lumi con quelli del grand'uomo gridarono irriverenti al peripatetico che riconduceva le qualità occulte (Piola, *Sull'applicazione della meccanica analitica del Lagrange*, pp. XIII-XIV).

È dunque necessario abbandonare alquanto le nostre pretese, e, seguendo il gran precetto di Newton, cercare nella natura que' principi con che spiegare gli altri fenomeni naturali [...].Queste riflessioni persuadono che sarebbe un cattivo filosofo chi si ostinasse a volere conoscere la verità del principio fondamentale della meccanica in quella maniera che gli riesce manifesta l'evidenza degli assiomi. Però dovrà necessariamente mancare di questa evidenza il principio che assumerò [...] il quale è lo stesso assunto da Lagrange nella parte terza della teorica delle funzioni.
Ma se il principio fondamentale della meccanica non può essere evidente, dovrà essere non di meno una verità facile a intendersi e a persuadersi» [corsivo mio] (Piola, *Sull'applicazione della meccanica analitica del Lagrange*, p. XVI).

Per lo studio del moto del punto materiale Piola ritiene che l'unico principio necessario sia quello di sovrapposizione dei moti (spostamenti). Il principio è di carattere empirico; ciò non di meno esso appare assolutamente evidente perché fa riferimento all'evidenza di tutti i giorni; lo stesso non si può dire del principio delle velocità virtuali: «Lagrange stesso ne convenne quando disse: quant a la nature du principe des vitesses virtuelles il faut convenir qu'il n'est pas assez évident» (Piola, *Sull'applicazione della meccanica analitica del Lagrange*, p. XVII).

Secondo il principio di sovrapposizione dei moti (spostamenti), se si hanno due moti dovuti a due «cause» diverse, il moto risultante è pari alla somma vettoriale dei due moti. Piola è ben conscio che ci sono dei casi in cui tale principio non vale: «se un corpo attratto verso un punto fino a passare in linea retta nel tempo t lo spazio $\varphi(t)$, qualora gli venga impresso un altro moto [...] $\alpha\ t$ [...] per l'azione simultanea dei due moti non percorre uno spazio espresso da $\varphi(t)+\alpha\ t$ ma da un'altra funzione del tempo» (Piola, *Sull'applicazione della meccanica analitica del Lagrange*, p. 5). Rimprovera a Lagrange la poca chiarezza dell'affermazione della *Théorie des fonctions analytique* (Parte III, cap. 2), dove sembra che la composizione dei moti sia una legge puramente geometrica, un teorema. Ciò è vero per la decomposizione ideale dei moti non per quella reale.

Nonostante che la componibilità dei moti ammetta esplicitamente delle eccezioni non banali, Piola la assume quale principio. Così sembra che il suo problema sia quello di capire quanta meccanica si riuscirà a spiegare ammettendo la composizione dei moti. Proprio per l'incertezza della validità generale del principio da lui assunto, Piola evita di dare alla sua meccanica una struttura assiomatica. I vari concetti vengono introdotti mano a mano che servono, senza tentare di ridurre gli uni agli altri.

Nello spirito della *Théorie* Piola dà per scontato che il generico moto possa svilupparsi in serie:

$$x\ (t) = a\theta + \frac{1}{2} b\theta^2 + \text{ecc.} \tag{1}$$

ove $\theta = t - t_o$ è la differenza tra un tempo di riferimento t_o, supposto variabile, e il tempo corrente t. Il coefficiente a dell'espansione è detto velocità o forza impressa, il coefficiente b è detto forza acceleratrice. Si noti la caratterizzazione dinamica della velocità, che con un linguaggio «cartesiano» viene assimilata a una forza, perché all'inizio del moto la velocità può essere dovuta all'azione di «forze» agenti continuamente prima del moto oppure a forze impulsive.

Con il principio della composizione dei moti si risolve non solo il problema del moto ma anche quello dell'equilibrio. Un punto materiale è in equilibrio se e solo se i moti componenti si annullano tra loro, cioè se si ha per ogni θ:

$$(V_1 + V_2 + \text{ecc.})\ \theta + \frac{1}{2}(X_1 + X_2 + \text{ecc.})\ \theta^2 + \text{ecc.} = 0 \tag{2}$$

Dalla (2) appare chiaro che condizione necessaria per l'equilibrio è che, per ogni istante t_O, si abbia:

$$\begin{aligned} &V_1 + V_2 + \text{ecc.} = 0 \\ &X_1 + X_2 + \text{ecc.} = 0 \\ &\text{ecc.} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

La condizione sufficiente è meno restrittiva se il moto è continuo. In questo caso, ad esempio, l'annullarsi in ogni momento della somma delle velocità implica l'annullarsi di tutti i termini della serie e quindi l'equilibrio. L'annullarsi della somma delle forze implica solo il moto uniforme. Sembrerebbe quindi che per Piola la legge fondamentale dell'equilibrio non sia quella dell'annullarsi delle forze ma piuttosto quella dell'annullarsi delle velocità. Questo approccio, interessante e controcorrente, è però complicato e di fatto Piola lo abbandona, limitandosi a verificare l'annullarsi della somma delle forze. Lo studio del moto di un punto materiale libero viene così ricondotto alla forma classica:

$$(\ddot{x} - X) = 0,\ (\ddot{y} - Y) = 0,\ (\ddot{z} - Z) = 0, \tag{4}$$

ove X, Y e Z sono le forze acceleratrici mentre x, y e z sono le componenti del moto che risultano definite solo se si forniscono i valori iniziali della velocità.

2.2 *Sistemi di punti materiali uguali*

Lo studio dei sistemi di punti materiali che interagiscono tra loro richiede l'introduzione di altri principi e concetti; in particolare si devono introdurre le masse. Piola si rende conto della difficoltà, insita alla teoria dinamica da lui scelta. Risolve il problema ammettendo l'esistenza di «atomi» di materia tutti uguali tra loro. La massa di un aggregato è proporzionale al numero di atomi. Oltre al concetto di massa deve introdurre anche il principio di azione e reazione. Secondo Piola tale principio, che non viene mai nominato come tale, può essere riguardato in parte come principio di ragione, in parte come principio empirico. È un fatto empirico che due punti materiali producano moto l'uno sull'altro. D'altronde è «facile persuadersi che i due punti, rimossa ogni altra azione [...], si muoveranno l'uno verso l'altro (giacché non vi è tra essi diversità di circostanze) e tal moto sarà sulla retta che li congiunge» (Piola, *Sull'applicazione della meccanica analitica del Lagrange*, p. 33). A questo punto però Piola introduce un elemento di confusione perché sembra dare una valenza convenzionale al principio testé «dimostrato». Afferma infatti che se si fa riferimento al moto di avvicinamento si può supporre «convenzionalmente» che esso provenga da due forze acceleratrici uguali. L'artificio di considerare punti massa uguali tra loro consente di estendere il principio di azione e reazione anche a punti massa diseguali. Siano infatti due punti materiali di massa m_1 e m_2 che si assumono composti da punti di massa unitaria. Se tutti i punti di massa unitaria si scambiano la stessa forza H tra loro, i due punti si scambiano ciascuno una forza pari a $m_1 m_2 H$ e quindi una forza uguale.

2.3 *Le equazioni di moto di un sistema vincolato*

Le equazioni di moto di un sistema di punti materiali uguali e liberi possono essere scritte nella forma:

$$(\ddot{x}_i - X_i) = 0,\ (\ddot{y}_i - Y_i) = 0,\ (\ddot{z}_i - Z_i) = 0, \tag{5}$$

Secondo Piola è facile riconoscere che queste equazioni possono essere dedotte dall'unica equazione variazionale:

$$\sum_i (\ddot{x}_i - X_i)\ \delta x_i + (\ddot{y}_i - Y_i)\ \delta y_i + (\ddot{z}_i - Z_i)\ \delta z_i = 0 \tag{6}$$

ove δx_i, δy_i e δz_i sono funzioni generiche, variabili del tempo, indipendenti tra loro e non sono spostamenti virtuali infinitesimi, come invece era per Lagrange. Ammettendo che le forze X_i, ecc., possano derivarsi da una funzione Π di x, y e z, l'equazione precedente può ottenersi come minimo del funzionale:

$$U = \Pi + \frac{1}{2}\sum (dx^2 + dy^2 + dv^2) \tag{7}$$

Ciò «succede in quel caso frequentissimo in cui le forze esterne X, Y, Z risultano da forze [...] che spingono i punti del sistema [...] fissi o mobili [...] essendo dette forze funzioni della distanza del punto» (Piola, *Sull'applicazione della meccanica analitica del Lagrange*, p. 38). Il problema del moto è ricondotto quindi a un problema variazionale.

La soluzione del moto vincolato è ricavata per analogia dalle tecniche di soluzione dei problemi di minimo vincolati. Se un problema di minimo rappresentato da una funzione come la (7) è soggetto a vincoli geometrici del tipo:

$$L = 0 \tag{8}$$

la soluzione si ottiene con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, andando a minimizzare la funzione:

$$U + \lambda L \tag{9}$$

in cui λ è un coefficiente arbitrario.

Il ragionamento per analogia di Piola è però completamente privo di ogni base fisica. Nessuno ci assicura che per un problema vincolato il moto sia fornito dalla minimizzazione dello stesso funzionale valido per il moto libero. Nell'assunzione di Piola è implicita l'ipotesi di vincoli lisci; ipotesi che aveva mostrato tutta la sua problematicità nei tentativi di dimostrazione del principio delle velocità virtuali. Probabilmente in questo lavoro giovanile Piola sente il principio lagrangiano delle velocità virtuali come indubitabile. Solo esigenze legate all'epistemologia dei tempi lo spingono a tentarne la dimostrazione; se poi questa dimostrazione è valida solo a livello retorico, non fa nulla. Piola si deve essere reso conto della debolezza delle sue argomentazioni perché nelle memorie di meccanica successive non tenterà più la dimostrazione del principio dei lavori virtuali che di fatto diviene per lui *il principio* della meccanica.

Una parte importante della memoria di Piola è dedicata all'applicazione dei metodi sviluppati per i sistemi di punti al caso dei corpi continui. La difficoltà è essenzialmente di ordine matematico; rifiutando il linguaggio degli infinitesimi egli si trova in difficoltà a trasformare le sommatorie (6) in integrali. Allo scopo se la cava con l'approccio riportato nel «corso grande di Brunacci» (Brunacci, *Corso di* *matematica sublime*). In un paragrafo della seconda sezione di *Sull'applicazione della meccanica analitica del Lagrange*, dal titolo, *Di un nuovo genere di forze interne*, Piola fa intravedere alcuni sviluppi della meccanica analitica per i sistemi continui. In questo paragrafo vanno rintracciate le basi che sono rese esplicite nel lavoro del 1833. Il paragrafo è un po' oscuro, ma il senso generale è chiaro. Esistono delle forze interne «delle quali non è possibile farci un'idea chiara intorno alla maniera in cui agiscono, mentre che siamo certi della loro esistenza [...]. In questi casi si riconoscono alcune quantità che quelle forze con la loro azione fanno cambiare». Queste forze interne si determinano aggiungendo opportune equazioni di condizione al funzionale (9).

2.4 *L'eliminazione degli infinitesimi*

Si è visto che uno dei temi principali dei matematici italiani riferiti più avanti è quello dell'eliminazione degli infinitesimi dalla meccanica, per utilizzare solo le procedure indicate nella *Théorie des fonctions analytiques*, basate sul concetto di derivata[3]. Uno dei punti in cui l'eliminazione degli infinitesimi è considerata improrogabile è quello della formulazione del principio dei lavori virtuali.

Magistrini si propone ad esempio di «evitarne l'uso, salvo [conservare] gli mezzi, e vantaggi analitici, che al medesimo si attribuirono» (Magistrini, *Osservazioni varie sopra alcuni punti principali di matematica superiore*, p. 449). La sua dimostrazione del principio della velocità virtuale consiste nel far vedere che quelli che oggi chiamiamo differenziali degli spostamenti, *du*, se assunti come spostamenti virtuali soddisfano la legge dei lavori virtuali: $\sum f_i du_i = 0$.

Anche Piola si muove su una linea di pensiero simile. Egli fa notare che per ammissione di Lagrange la *Mécanique analytique* è fondata sul calcolo delle variazioni[4] e che questo calcolo può essere definito e validato con le procedure della *Théorie des fonctions analytiques*; cioè senza il ricorso agli infinitesimi. Dunque, secondo Lagrange, il principio dei lavori virtuali potrebbe essere formulato senza infinitesimi. L'interpretazione che dà Piola sul pensiero di Lagrange non è probabilmente esatta; però egli si muove coerentemente in questa direzione. La sua dimostrazione del principio dei lavori virtuali si appoggia all'equilibrio del punto materiale; nel

[3] La posizione di Lagrange sull'uso degli infinitesimi nella giustificazione del principio dei lavori virtuali non è priva di ambiguità. Le dimostrazioni che fornisce nella *Mécanique* richiedono il concetto di spostamento infinitesimo. Però quando fa i calcoli e determina gli spostamenti virtuali a partire dalle variabili indipendenti, Lagrange si pone sempre in un contesto variazionale. E qui è meno chiaro il ruolo degli infinitesimi perché il calcolo variazionale ha un formalismo proprio, che nella *Théorie des fonctions analytiques* (seconda parte, cap. XII, lezione 22) è giustificato anche senza far ricorso agli infinitesimi. Inoltre nella seconda edizione della *Théorie*, Lagrange dimostra il principio dei lavori virtuali senza nessun riferimento agli spostamenti infinitesimi; piuttosto introduce le velocità (virtuali in senso moderno).

[4] Nelle *Leçons sur le calcul des fonctions*, p. 462, Lagrange afferma: «ma in questo modo si entra in calcoli lunghi e complicati, ed è molto più semplice usare i moltiplicatori nel modo con cui sono stati usati nella *Mécanique analytique* che è interamente fondata sul calcolo delle variazioni».

qual caso la relazione $\sum f_i \delta u_i = 0$ è valida anche per valori finiti dei δu, a condizione che le forze siano equilibrate in accordo alla regola del parallelogramma. Il caso del punto materiale vincolato e dei sistemi di punti è poi ricondotto a un problema variazionale che di per sé può essere sviluppato anche senza far ricorso agli infinitesimi.

3. I corpi naturalmente estesi

Piola inizia il suo saggio del 1833 (*La meccanica dei corpi naturalmente estesi trattata con il calcolo delle variazioni*) affermando che benché la *Mécanique analytique* sia considerata la massima opera di meccanica e le sue tecniche rappresentino la «vera meccanica filosofica», di fatto essa viene riguardata poco più che come un oggetto di erudizione. Questo è vero in modo particolare per la meccanica corpuscolare che studia il moto e l'equilibrio dei corpi. Piola si pone così il problema di estendere le tecniche della *Mécanique* in modo che esse possano essere applicate utilmente anche per i corpi. Il riferimento principale è il lavoro del 1825, espresso efficacemente dalla seguente citazione:

> Ecco il maggiore vantaggio del sistema della Meccanica Analitica. Esso ci fa mettere in equazione i *fatti* di cui abbiamo le idee chiare senza obbligarci a considerare le cagioni di cui abbiamo idee oscure (Piola, *La meccanica de' corpi naturalmente estesi*, p. 203).
>
> L'azione delle forze attive o passive (secondo una nota distinzione di Lagrange)[5] è qualche volta tale che possiamo farcene un concetto, ma il più sovente rimane [...] tutto il dubbio che il magistero della natura sia ben diverso. Ma nella M.A. si contemplano gli effetti delle forze interne e non le forze stesse, vale a dire le equazioni di condizione che devono essere soddisfatte [...] e in tal modo saltate tutte le difficoltà intorno alle azioni delle forze, si hanno le stesse equazioni sicure ed esatte che si avrebbero da una perspicua cognizione di dette azioni (Piola, *La meccanica de' corpi naturalmente estesi*, pp. 203-204).

3.1 *Le equazioni di equilibrio del corpo rigido*

Nella *Mécanique* Lagrange riconduce il moto di tutti i punti di un corpo rigido a sei coordinate indipendenti. Applicando il principio dei lavori virtuali deduce sei equazioni di equilibrio (le equazioni cardinali della statica). Si tratta però di equazioni di equilibrio globale, mentre il problema dell'equilibrio locale è eluso. Poiché, almeno per Piola, è chiaro che vi sono delle forze interne, esse devono essere

[5] «Intendo per *forze attive* le forze che i corpi esercitano gli uni sugli altri e il cui effetto è di cambiare le loro distanze o le loro posizioni relative, come le forze intrinseche d'attrazione o di repulsione, le forze elastiche interne ai corpi, ecc. Al contrario, chiamo *forze passive* le forze resistenti prodotte dalle pressioni dei corpi, le tensioni dei fili o delle verghe, etc., e l'effetto delle quali è di mantenere i corpi in una stessa posizione relativa e di impedire che le condizioni del sistema siano violate. Queste forze passive non contribuiscono affatto, come si vede, alla produzione della forza viva; solo le forze attive l'aumentano o la diminuiscono» (Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques*, p. III, cap. 7, § 42).

in equilibrio. Per ottenere le equazioni di tale equilibrio non è necessario far ricorso a un modello corpuscolare, in cui si fanno ipotesi sulla natura delle forze interne, ipotesi peraltro non verificabili empiricamente. È sufficiente far riferimento a un effetto chiaro, quello della rigidità locale del corpo e dedurne le conseguenze, sulla base del principio «certo» dei lavori virtuali. La rigidità del corpo può essere espressa con delle «equazioni di condizione» dalla forma:

$$L = 0,\ M = 0 \ \text{ ecc.} \tag{10}$$

valide punto per punto.

Per derivare le equazioni di compatibilità locali si devono studiare i moti possibili di tutti i punti del corpo. Piola introduce allo scopo una terna locale in cui il generico punto P è individuato dalle coordinate a, b, c e una terna globale in cui la posizione di P è individuata dalle coordinate x, y, z (i simboli usati per contrassegnare le coordinate globali e quelle locali sono gli stessi usati da Lagrange). Ci sarebbe la tentazione di identificare le coordinate a, b, c con le coordinate iniziali di P e con x, y, z le coordinate nella configurazione variata, ma Piola non lo fa; non si deve del resto dimenticare che non sta studiando la deformazione di un corpo ma piuttosto le condizioni della indeformabilità.

I «momenti» associati alle equazioni (10) si aggiungono poi ai momenti delle forze attive la cui espressione è fornita dalla relazione variazionale:

$$\int_M (X\delta x + Y\delta y + Y\delta z)\ dm \tag{11}$$

con X, Y e Z forze per unità di massa riferite al sistema x,y e z.

Seguendo Lagrange, senza commenti propri, Piola riporta le integrazioni al sistema a, b e c, introducendo per comodità la densità di massa Γ, nella configurazione variata, che consente di considerare un integrale di volume. La (11) pertanto diviene:

$$\int_{V_0} H\ (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,\Gamma\ dadbdc \tag{12}$$

ove V_0 è il volume considerato nel sistema di coordinate a, b e c. Il coefficiente H, coincide con quello che oggi chiamiamo jacobiano della trasformazione da x ad a. L'introduzione di H, come riconosciuto esplicitamente da Piola è ripresa da Lagrange nel Tomo II della *Mécanique*, (par. 1, sez. XI, n. 5) dove vengono studiate le equazioni di equilibrio dei fluidi. Piola aveva già introdotto H nel suo lavoro del 1825, qualificandolo come il «sestinomio» che consente di ottenere il volume nel sistema di coordinate x conoscendolo nel sistema di coordinate a, insieme alla legge di trasformazione $x(a)$.

Per trovare l'espressione delle equazioni di condizione (10) che esprimano il vincolo di rigidità cercato, Piola segue un approccio piuttosto generale, non giustificato per lo studio dell'equilibrio del corpo rigido. Il suo progetto è però quello di pervenire prima alle equazioni di equilibrio per i corpi rigidi e successivamente a quelle per i corpi deformabili. Dice infatti chiaramente che il suo lavoro è organizzato in due parti entrambe pubblicate sugli *Opuscoli matematici e fisici*, nella seconda delle quali tratterà il corpo deformabile. In realtà questa seconda parte non è mai stata pubblicata e Piola ritornerà sulle equazioni del corpo deformabile solo molti anni dopo, nel 1845, e in modo diverso, in cui insieme al corpo trattato come un continuo considererà anche il corpo costituito da molecole (Piola, *Intorno alle equazioni fondamentali del movimento dei corpi qualsivogliono, considerati secondo naturale loro forma e costituzione*).

I moti possibili dei singoli punti del corpo rigido, cioè le relazioni tra le *a, b, c* e le *x, y, z* sono espresse attraverso delle relazioni lineari in cui intervengono sei parametri indipendenti, corrispondenti ai gradi di libertà del corpo rigido. Con i simboli di Piola esse sono:

$$\begin{aligned} x &= f + \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c \\ y &= g + \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c \\ z &= h + \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c \end{aligned} \tag{13}$$

I dodici parametri di questa relazione non sono indipendenti tra loro; infatti tra i nove coefficienti delle componenti dei versori del sistema *a* nel sistema *x* esistono sei relazioni che esprimono l'ortogonalità e la normalità. I parametri indipendenti si riducono così a sei. Con una serie di passaggi relativamente semplici rispetto agli standard dell'epoca, ma complessi rispetto agli standard moderni[6], Piola elimina i parametri indipendenti e perviene a delle relazioni dirette tra *a, b, c* e *x, y, z*, che però sono in forma differenziale. Tali espressioni differenziali di compatibilità assumono le due forme alternative:

$$\begin{aligned} \varepsilon^1_{ij} &= \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial a_m} \frac{\partial x_j}{\partial a_m} - \delta_{ij} = 0 \\ \varepsilon^2_{ij} &= \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial x_m}{\partial a_i} \frac{\partial x_m}{\partial a_j} - \delta_{ij} = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

dove a_1, a_2 e a_3 stanno per *a, b* e *c* e x_1, x_2 e x_3 per *x, y* e *z*.

Per un lettore moderno è possibile riconoscere nei primi membri delle (14-1) e (14-2) le componenti rispettivamente del tensore sinistro e del tensore destro di Cauchy-Green. Benché Piola sia stato il primo a individuare nelle (14) delle relazioni in grado di rappresentare «le cercate equazioni di esprimenti la rigidità del corpo» (Piola *Intorno alle equazioni fondamentali del movimento dei corpi qualsivogliono, considerati secondo naturale loro forma e costituzione*, p. 59), esse, o meglio le componenti:

$$\varepsilon^2_{ij} = \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^{3} \frac{\partial x_m}{\partial a_i} \frac{\partial x_m}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right) \tag{15}$$

[6] Al tempo di Piola il calcolo matriciale non era stato ancora sviluppato. Il concetto preciso di matrice e il relativo e usuale simbolismo si avrà solo dopo la pubblicazione della memoria di Cayley, *A Memoir on the Theory of Matrices*, del 1858.

del tensore destro di Cauchy-Green, furono associate esplicitamente alla deformazione solo successivamente da Green (*On the law of the reflection and refraction of light at the common surfaces of two non-crystallized media*), per le deformazioni piccole, e da Cauchy Augustin (*Sur les dilations, les condensations et les rotations produites par un changement de forme dans un système de points matériels*), per le deformazioni finite.

L'equazione variazionale del problema vincolato secondo le (14) si ottiene, per quanto già detto, aggiungendo alla (12) il contributo del lavoro virtuale dei vincoli, pervenendo alla relazione variazionale di equilibrio:

$$\int_{V_0} H\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,\Gamma\; dadbdc + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int_{V_0}\lambda_{ij}^{k}\,\delta\varepsilon_{ij}^{k}\; dadbdc = 0, \quad k = 1{,}2 \tag{16}$$

in cui λ_{ij}^{k} sono i moltiplicatori di Lagrange associati alle equazioni di condizione $\varepsilon_{ij}^{k} = 0$. A questo punto si può forse apprezzare l'utilità di riferirsi al sistema di coordinate *a, b, c* in quanto le ε_{ij} sono definite naturalmente proprio rispetto a *a, b, c*.

Lagrange, nella *Mécanique analytique* (par. 1, sez. VII), segue un approccio simile quando studia l'equilibrio dei fluidi incompressibili. L'equazione locale di incompressibilità è espressa dall'invarianza dell'elemento elementare di volume, la quale dopo alcuni semplici passaggi è ricondotta all'invarianza della somma delle tre quantità ε_{ii} della (13)[7]. Le condizioni di Piola generalizzano quelle di Lagrange introducendo anche altre relazioni ε_{ij} ($i \neq j$) che esprimono l'invarianza della distorsione angolare.

Piola sostituisce le due equazioni di condizione (14) nella (16), una alla volta, e sviluppa l'integrale per parti. Considera più «opportune» le (14-1) e per questo le introduce per prime. In realtà non ci sono motivi a priori per preferire l'una o l'altra delle equazioni di condizione. L'«opportuno» di Piola si riferisce piuttosto alla maggiore semplicità riscontrata a posteriori. Poi, alla fine, un po' incongruamente, Piola attribuisce una preferenza alle (14-2), dichiarando che esse si prestano meglio a trattare il caso più generale in cui il corpo anziché rigido è deformabile: «Ed è appunto per tradurre le equazioni [30] al caso generale che giova esaminare (siccome ne facemmo cenno sul cominciare del num. 9) l'altra soluzione che si ha usando le equazioni variate [14-2] invece delle 14-1» (Piola, *La meccanica de' corpi naturalmente estesi*, p. 220). Per spiegare questa preferenza «postuma» bisogna commentare meglio quanto già affermato circa la volontà di Piola di pervenire a relazioni generali, valide per i corpi rigidi e per i corpi deformabili. Egli tenta di raggiungere la generalità trattando la trasformazione che porta dalle coordinate *a, b, c* alle *x, y, z* come se fosse del tutto generale. A questo proposito lascia «sempre» solo indicate le derivate delle *x* rispetto alle *a*, che esplicitate fornirebbero i coseni direttori della (13). Quando usa la (14-1) come equazioni di condizione, per ottenere il suo scopo, Piola è talvolta costretto a esplicitare le derivate d*x*/d*a* come appartenenti al corpo rigido. Quando usa le (14-2) può invece evitare questa rinuncia alla generalità.

[7] In realtà le condizioni realmente imposte da Lagrange si ottengono dalle (13) trascurando i termini di ordine superiore ed equivalgono ad ammettere l'invarianza delle componenti assiali del tensore della deformazione infinitesima.

Gli sviluppi analitici per ricondurre la (16) a una relazione in cui compaiano solo le variate δx, δy, δz e ottenere delle equazioni di equilibrio, secondo l'approccio classico del principio dei lavori virtuali, sono piuttosto complessi e rivelano la eccezionale bravura di Piola matematico. Alla fine questi riesce a dimostrare che, quando usa le (14-1), il problema variazionale (16) è equivalente alle seguenti equazioni alle derivate parziali:

$$\sum_{J=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \lambda_{ij}^{l} + \Gamma X_i = 0 \tag{17}$$

ove X_i sta per X, Y, Z e i coefficienti λ_{ij}^{l} sono i moltiplicatori di Lagrange. Quando invece usa le (14-2) perviene a un'equazione analoga:

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} S_{ij} + \Gamma X_i = 0 \tag{18}$$

in cui coefficienti S_{ij} sono legati ai moltiplicatori di Lagrange λ_{ij}^{l} dalla relazione:

$$\lambda_{ij}^{2} = J \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial a_j}{\partial x_l} \sum_{k=1}^{3} S_{kl} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \tag{19}$$

ove J è il jacobiano della trasformazione da a a x. Piola conclude il suo lavoro con la seguente dichiarazione:

15. Si osservi la perfetta coincidenza di questo risultato con quello ottenuto dai due celebri geometri citati dal principio dell'introduzione dietro, ragionamenti affatto diversi (*) e nei due casi dell'equilibrio e del moto trattati separatamente. Raccomando di notare che nella mia analisi le *A, B, C, D, E, F* [i coefficienti λ_{ij}] si esercitino sopra diversi piani, ma sono coefficienti, cui nel seguito attaccherò io pure una rappresentazione di forze secondo mi sembrerà più naturale: sono funzioni delle *x, y, z, t* di forma ancora incognita, ma di cui sappiamo che non cambia passando dall'una all'altra parte del corpo (Piola, *La meccanica de' corpi naturalmente estesi*, p. 220).

4. Conclusioni

La figura di Gabrio Piola ha un rilievo molto grande nella matematica e meccanica italiane agli inizi dell'Ottocento. Lo scopo di sviluppare una teoria meccanica rigorosa da un punto di vista matematico formale avviene al prezzo della rinuncia del rigore dal punto di vista fisico. Infatti i principi assunti, la sovrapponibilità dei moti e il principio dei lavori virtuali non sono giustificati in modo convincente. Ciò nonostante, i risultati raggiunti da Piola, specie nella meccanica del continuo, sono fondamentali. Egli prova che con l'approccio della meccanica analitica si possono ottenere gli stessi risultati forniti dalle teorie corpuscolari dei Geometri francesi.

Piola non è sempre cosciente della rilevanza dei suoi sviluppi, come accade sempre per quasi tutti i precursori. Ad esempio quando dimostra, con chiara coscienza, l'equivalenza del problema variazionale (14) con le equazioni indefinite di equilibrio (17) o (18), dimostrazione che nella letteratura internazionale va sotto il nome di teorema di Piola (Truesdell, *The Classical Field Theories*, p. 596) Piola non si accorge di avere introdotto una grandezza che diventerà fondamentale. Si tratta del tensore di Piola-Kirchhoff, i cui coefficienti coincidono con i moltiplicatori di Lagrange quando si usano le equazioni di condizione (14-2), concetto indispensabile per lo studio del problema statico dei continui soggetti a grandi spostamenti.

Bibliografia

Araldi M., *Tentativo di una nuova rigorosa dimostrazione del principio dell'equipollenza* (1804), in *Memorie Ist. Naz. Italiano*, vol. 1, parte I, Masi, Bologna 1806, p. 415.

Araldi M., *Discorso e osservazioni intorno i progressi recenti dovuti agli italiani delle scienze matematiche e fisiche*, in *Memorie Ist. Naz. Italiano*, Tomo 2°, parte 2, Masi, Bologna 1810, Discorso preliminare.

Bordoni A., *Annotazioni agli elementi di meccanica e d'idraulica del professore Giuseppe Venturoli*, P. Emilio Giusti, Milano 1833.

Bottazini U., *Va pensiero. Immagini della matematica nell'Italia dell'Ottocento,* Il Mulino, Bologna 1994.

Brunacci V., *Corso di matematica sublime*, Allegrini, Firenze 1804.

Cauchy A., *Oeuvres completes,* Gauthier-Villars, Paris 1882-1974.

Dugas R., *Histoire de la mécanique,* Griffon, Neuchatel 1950.

Green G., *On the Law of the Reflection and Refraction of Light at the Common Surfaces of Two Non-Crystallized Media* (1837), in N.M. Ferres (ed.), *Mathematical Papers,* McMillan, London 1871.

Lagrange J.-L., *Leçons sur le calcul des fonctions,* Coucier, Paris 1806, p. 462.

Lagrange J.-L., *Oeuvres*, a cura di M.J.A. Serret, Gauthier-Villars, Paris 1889.

Magistrini G.B., *Osservazioni varie sopra alcuni punti principali di matematica superiore* (1815), in *Memorie di matematica e fisica; Società italiana delle scienze*, vol. XVII, 1816.

Piola G., *Sull'applicazione della meccanica analitica del Lagrange ai principali problemi,* Regia Stamperia, Milano 1825.

Piola G., *La meccanica dei corpi naturalmente estesi trattata col calcolo delle variazioni,* in *Opuscoli matematici e fisici di diversi autori*, Giusti, Milano 1833, pp. 201-236.

Piola G., *Nuova analisi per tutte le questioni della meccanica molecolare,* in *Memorie di matematica e di fisica della Società Italiana delle Scienze*, 1836, pp. 155-321.

Piola G., *Intorno alle equazioni fondamentali del movimento dei corpi qualsivogliono, considerati secondo naturale loro forma e costituzione* (1845), in *Memorie di matematica e di fisica della Società Italiana delle Scienze*, Modena 1848, pp. 1-186.

Poisson S.D., *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques* (1828), in *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris,* T. VIII, 1829, p. 357.

Saladini G., *Sul principio delle velocità virtuali* (1808), in *Memorie Ist. Naz. Italiano,* vol. 2, parte I, Masi, Bologna 1808, pp. 399-420.

Truesdell C. e Toupin R.A., *The Classical Field Theories*, in S. Flügge (herausgeben von), *Handbuch der Physik*, Springer-Verlag, Heidelberg 1960.

Venturoli G., *Elementi di meccanica e d'idraulica* (1806), IV edizione, Giuseppe Mauri, Roma 1826.