

**LA FORMULA DELL'AVANZO RELATIVISTICO DEL PERIELIO
PLANETARIO DEDOTTA DA JEAN CHAZY**

Vittorio Banfi

1. - Introduzione

Assai prima delle ricerche di Hagihara, Darwin e della sistemazione analitica di Chandrasekhar (bibl. 1,2,3), Jean Chazy dimostra la storica formula di Einstein in un modo del tutto originale. Prendendo spunto dall'equazione della geodetica, genere tempo, dedotta dal campo di Schwarzschild, Chazy conduce la dimostrazione con grande semplicità (bibl.4).

2. - Basi di partenza

Il modello assunto è quello del problema dei due corpi ristretto; in altre parole un primario con massa finita M_p , ed una particella, di massa trascurabile a fronte di M_p , che compie rivoluzioni attorno al primario stesso.

Dal principio della geodetica nello spazio-tempo, con metrica di Schwarzschild, si deduce l'equazione differenziale

$$(1) \quad \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = f(u)$$

con

$$(2) \quad f(u) = 2 M u^3 - u^2 + \frac{2 M}{L^2} u - \frac{1 - E^2}{L^2},$$

in cui $M = \frac{G M_p}{c^2}$, $u = \frac{1}{r}$; E, L costanti

(tenendo presente che, per $E < 1$, le orbite sono limitate). Infine G = costante universale di gravitazione, c = velocità della luce e ψ la coordinata angolare nel piano dell'orbita.

Jean Chazy considera, come orbita perturbata dagli effetti relativistici in conseguenza dell'incurvamento dello spazio-tempo testè descritto, l'orbita che sarà più tardi chiamata da Hagihara (1931, bibl. 1) e da Chandrasekhar (1983, bibl. 3) "quasi ellittica".

Essa è illustrata nella Figura 1.

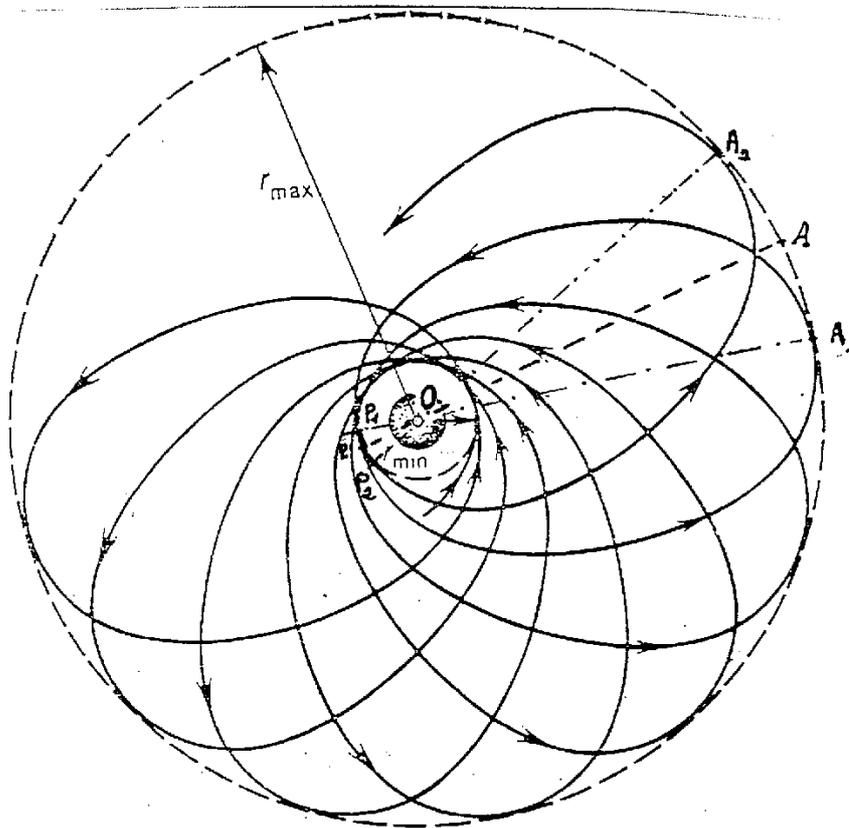


Figura 1. - Orbita quasi ellittica "a rosetta".

Interessante è inoltre esaminare le posizioni delle radici della cubica $f(u) = 0$ [vedi formula (2)]. Esse sono rappresentate graficamente nella Figura 2.

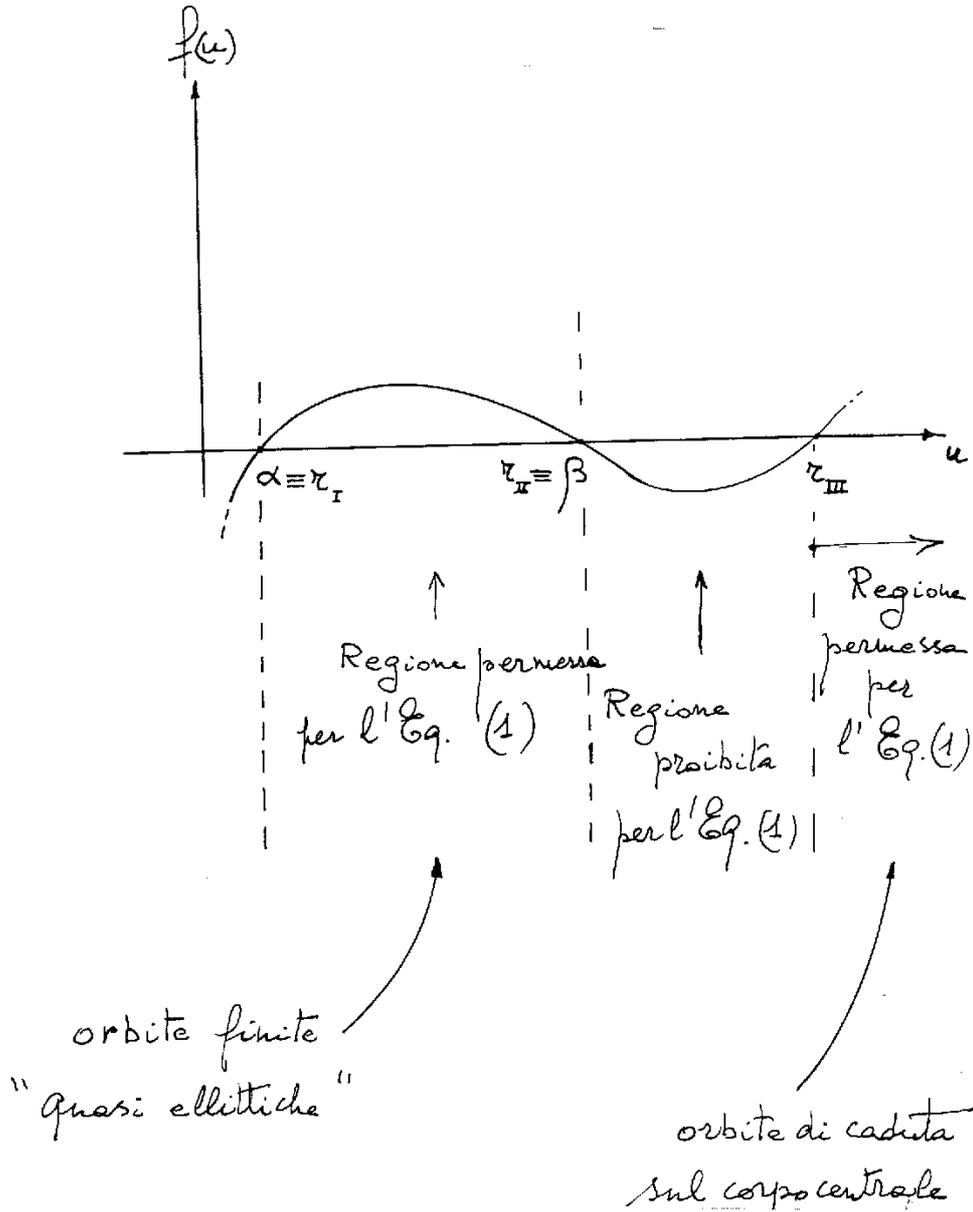


Figura 2. - Posizione delle radici dell'equazione $f(u) = 0$

3. - Sviluppo del metodo di Chazy

Nel caso quasi ellittico considerato, le radici della equazione $f(u) = 0$ (Figura 2) sono:

$$(3) \quad r_I = \alpha = \frac{1}{a(1+e)} \quad r_{II} = \beta = \frac{1}{a(1-e)} \quad r_{III} = \frac{1}{2M} - \frac{2}{1}$$

Nelle (3) compaiono a , l , e (elementi osculatori) rispettivamente semi-asse maggiore, semi-latus rectum ed eccentricità. Per quest'ultimo elemento osculatore, Chazy ammette valori piccoli ($0,2 \div 0,02$), tipici dei pianeti interni del sistema solare (come Mercurio). Esaminando la Figura 1 si osserva che, quando $u = \alpha$, si verifica tangenza con la circonferenza r_{max} (apocentro), mentre con $u = \beta$ si verifica tangenza con la circonferenza r_{min} (pericentro). Nella stessa Figura 1 si nota che nello svolgimento del moto la traiettoria riempie in modo uniformemente denso la regione anulare limitata tra le due circonferenze. Chiamando inoltre P_1 e A_1 un pericentro e un apocentro contigui, P_2 e A_2 il pericentro e l'apocentro susseguenti, Chazy nota che la retta passante per i punti O ed A è assumibile come asse di simmetria della traiettoria tra A_1 e A_2 (A punto medio dell'arco $A_1 A_2$).

In meccanica celeste classica pericentro e apocentro sono fissi; la variazione dell'angolo ψ , corrispondente al percorso pericentro-apocentro-pericentro, è quindi costante e pari a 2π . In meccanica celeste relativistica,

integrando la (1) tra i limiti α e β , otteniamo l'espressione per l'avanzo del pericentro

$$(4) \quad \Delta\omega = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{du}{[f(u)]^{1/2}} - 2\pi,$$

nella quale $f(u)$ è fornita dalla (2). Mediante semplici sviluppi algebrici e con l'applicazione del teorema di

Rolle, l'espressione per l'integrale $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{du}{[f(u)]^{1/2}}$ risulta

$$(5) \quad \int_{\alpha}^{\beta} \frac{du}{[f(u)]^{1/2}} = \pi \left[\frac{-2}{f''(u_1)} \right]^{1/2} \text{ (Appendice I)}.$$

Nella (5) $f''(u)$ è la derivata seconda di $f(u)$ e u_1 un punto interno all'intervallo $\alpha \rightarrow \beta$. Chazy approssima u_1 assumendolo uguale alla media aritmetica di α e β :

$$(6) \quad u_1 = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{1}.$$

Inoltre egli dimostra che, essendo $f(u)$ fornito dalla formula

$$(7) \quad f(u) = 2M(u - r_I)(u - r_{II})(u - r_{III}),$$

otteniamo (Appendice II)

$$(8) \quad f''(u) = 12Mu - 2.$$

Pertanto dalle (4) e (5)

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= 2\pi \left[\frac{-2}{f''(u_1)} \right]^{1/2} - 2\pi = 2\pi \left[\frac{-2}{12\frac{M}{1} - 2} \right]^{1/2} - 2\pi = \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{1 - 6\frac{M}{1}} \right)^{1/2} - 2\pi \approx 2\pi \left[1 + \frac{3M}{1} \right] - 2\pi = \\ &= \frac{6\pi GM_p}{c^2 a (1 - e^2)}, \end{aligned}$$

ossia la formula di Einstein.

Osserviamo che la deduzione di Chazy arriva subito al nocciolo del problema, e quindi della sua soluzione, direttamente, cioè senza il calcolo completo della traiettoria perturbata, come avviene di consueto nei testi di relatività generale.

4. - Osservazioni conclusive

L'analisi geometrica della traiettoria quasi ellittica tra A_1 e il successivo A_2 , contenuta nel paragrafo precedente e che conduce alla (4), è diretta conseguenza del fatto che detta traiettoria non è una curva chiusa. Ciò non sorprende in quanto è stato dimostrato da M. Bertrand (bibl. 5) che, quando la forza centrale nel problema dei due corpi ristretto è differente dai due soli casi $-\frac{K}{r^2}$ e $-Kr$ (con K costante positiva), essa è sempre aperta. Che la forza centrale "di perturbazione" modifichi quella newtoniana, nel caso nostro, risulta evidente dal fatto che la equazione differenziale (1) contiene il termine cubico in u anziché al massimo il termine u^2 , come in meccanica celeste classica.

Un'altra considerazione riguarda il fatto di trascurare, nella deduzione, i termini $O\left(\frac{1}{c^{2n}}\right)$ con n intero maggiore di 1. Si può notare in questo una applicazione, antelitteram, della teoria post-newtoniana, potentemente

sviluppata a partire dagli anni Settanta da C.M. Will (bibl. 6).

Appendice I - Dimostrazione della formula (5).

Sia data una funzione continua $f(u)$, con $\alpha < \beta$ due radici dell'equazione $f(u) = 0$. La funzione sia sempre positiva nell'intervallo $\alpha \rightarrow \beta$ e il rapporto

$$\Psi(u) = \frac{f(u)}{(u - \alpha)(\beta - u)}$$

è anche funzione continua nel campo

$$\alpha \leq u \leq \beta.$$

Calcoliamo ora l'integrale:

$$(1) \quad a \quad I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{du}{[f(u)]^{\frac{1}{2}}} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{du}{[\Psi(u)(u - \alpha)(\beta - u)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Scriviamo una formulazione approssimata per I , fornita dalla formula precedente, ponendo in essa, anziché $\Psi(u)$, il suo valore medio nell'intervallo $\alpha \rightarrow \beta$ e cioè

$$\Psi(\gamma) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \Psi(u) du = \text{termine costante.}$$

Per quanto precede, in via approssimata, avremo dalla (1) a:

$$(2) \quad a \quad I \approx \frac{1}{[\Psi(\gamma)]^{\frac{1}{2}}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{du}{[(u - \alpha)(\beta - u)]^{\frac{1}{2}}}$$

L'integrale definito, contenuto nel membro a destra della (2)a, è subito calcolato. Introdotta la variabile

ausiliaria z poniamo

$$u - \alpha = z^2 \quad \beta - u = \beta - \alpha - z^2;$$

quindi

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{du}{[(u-\alpha)(\beta-u)]^{1/2}} = \int_0^{\sqrt{\beta-\alpha}} \frac{2z dz}{z[\beta-\alpha-z^2]^{1/2}} = 2 \left[\arcsin \frac{z}{\sqrt{\beta-\alpha}} \right]_0^{\sqrt{\beta-\alpha}} =$$

La (2)a diventa allora

$$(3)a \quad I \cong \frac{1}{[\psi(\theta)]^{1/2}} \pi.$$

Troviamo un'altra espressione per la (3)a. Introduciamo la funzione $F(u)$ così definita:

$$(4)a \quad F(u) = f(u) - \frac{(u-\alpha)(\beta-u)}{(\gamma-\alpha)(\beta-\gamma)} f(\gamma);$$

pertanto

$$F(u) = 0 \quad \text{quando} \quad \begin{array}{l} u = \alpha \\ u = \beta \\ u = \gamma \end{array}.$$

Applichiamo ora il teorema di Rolle la cui formulazione è la seguente " Se una funzione $F(u)$ continua e derivabile nell'intervallo $\alpha \rightarrow \beta$ acquista valori uguali negli estremi di questo intervallo, esiste almeno un punto interno in cui la sua derivata prima è nulla". Considerando la funzione $F(u)$: vi è almeno un punto nell'intervallo $\alpha \rightarrow \gamma$

in cui $\frac{dF(u)}{du} = 0$; vi è almeno un punto nell'intervallo

$$\gamma \rightarrow \beta \text{ in cui } \frac{dF(u)}{du} = 0. \text{ Ad esempio sono allora}$$

possibili tre casi distinti (Figura 3). In Figura 3a

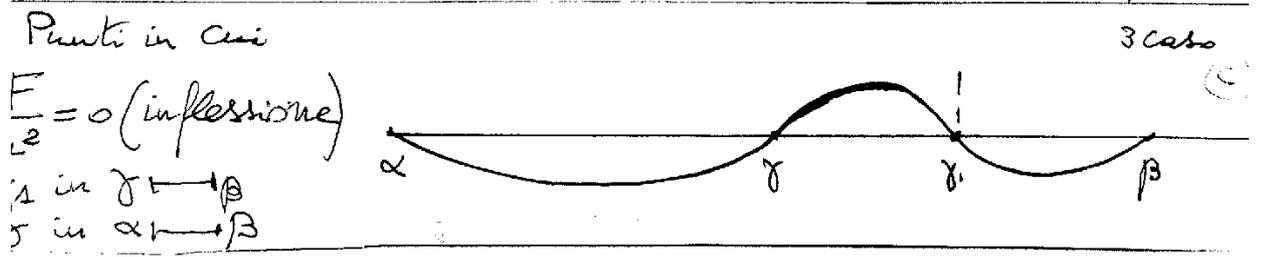
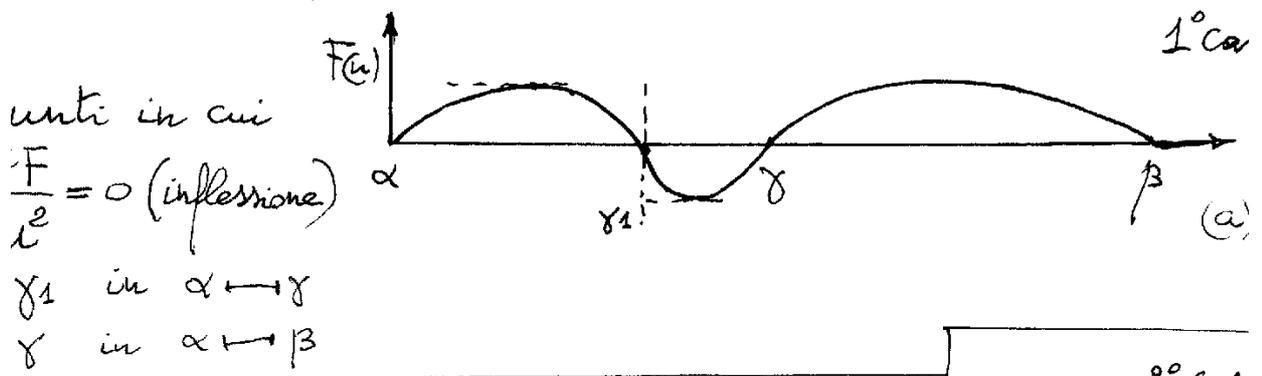


Figura 3. Possibili posizioni dei punti di inflessione della $F(x)$ nell'intervallo $\alpha \rightarrow \beta$

abbiamo γ e γ_1 punti di inflessione, in cui $\frac{d^2 F}{du^2} = 0$.

In Figura 3b un unico punto di inflessione $\gamma_1 \equiv \gamma$.

Infine nella Figura 3c ancora due punti di inflessione γ e γ_1 .

Abbiamo appurato che esiste almeno un punto γ_1 , nell'intervallo $\alpha \rightarrow \beta$, in cui la derivata seconda di $F(u)$ è nulla.

E' facile dedurre $F''(u)$ dalla (4)a; otteniamo:

$$F''(u) = f''(u) + \frac{2 f(\gamma)}{(\gamma - \alpha)(\beta - \gamma)}.$$

Nel punto $u = \gamma_1$ risulta

$$0 = f''(\gamma_1) + \frac{2 f(\gamma)}{(\gamma - \alpha)(\beta - \gamma)} = f''(\gamma_1) + 2 \psi(\gamma)$$

e quindi

$$\psi(\gamma) = - \frac{f''(\gamma_1)}{2}.$$

Pertanto per la (3)a

$$I \cong \Pi \left[\frac{-2}{f''(\gamma_1)} \right]^{\frac{1}{2}},$$

e per la (1)a risulta dimostrata, nell'approssimazione assunta, la (5) del testo.

Appendice III. - Dimostrazione della formula (8).

Partiamo dalla (7) del testo e cioè

$$f(u) = 2 M (u - r_I) (u - r_{II}) (u - r_{III}).$$

Calcoliamo, dalla precedente, $f'(u)$; risulta:

$$f'(u) = 2M (u - r_{II}) (u - r_{III}) + 2M (u - r_I) (u - r_{III}) + 2M (u - r_I) (u - r_{II}).$$