Alessandro Formisano[*]

L'INDETERMINAZIONE NELLA MECCANICA CLASSICA

Riassunto

La meccanica classica è nata come scienza deterministica, ma nel corso del tempo varie critiche hanno ridotto le sue pretese di descrivere il mondo, fino ad arrivare ai più recenti risultati della teoria del caos. In queste note esamineremo alcune delle critiche portate alla visione "deterministica" e reversibile della dinamica classica. Esamineremo inoltre come sia possibile introdurre esplicitamente nella fisica teorica il concetto di incertezza sperimentale mediante una matematica "costruttiva", che è in grado di tenere in conto le caratteristiche specifiche dei fenomeni irreversibili e instabili, dando così alla teoria una maggiore aderenza alla realtà.

I. Introduzione

Per molto tempo la meccanica classica è stata vista più che come un modello della realtà, come una chiave per interpretarla al di là dei dati "sperimentali". In tale visione "ontologica", sviluppatasi a partire da Newton, e che in Laplace ha trovato la sua espressione più alta [1], la meccanica classica gode di alcune proprietà essenziali:

è *riduzionista*, ossia ipotizza che l'evoluzione di un sistema composto da numerosi componenti elementari, un sistema *complesso*, si possa studiare mediante la decomposizione di quest'ultimo in sottosistemi semplici, coi quali si ricompongono poi le varie interazioni elementari;

suppone che l'oggetto del suo studio goda di *reversibilità nel tempo*, che cioè invertendo la direzione del tempo e di tutte le velocità del sistema, il sistema stesso ritracci la traiettoria del moto all'indietro;

suppone infine che il sistema in esame sia *deterministico*, nel senso che, note con infinita precisione tutte le informazioni sullo stato iniziale del sistema, sia determinata, e quindi prevedibile per un tempo illimitato, la sua evoluzione futura.

Molte sono state le modifiche di questo punto di vista, sia in termini di formulazioni alternative a quella della meccanica classica (meccanica statistica, meccanica quantistica), sia in termini di critiche alla pretesta ontologica contenuta nei tre principi [2], [3]; la situazione attuale nei confronti della descrizione di un sistema fisico è stata brillantemente sintetizzata da Arecchi [4], che ha individuato quattro "livelli" di descrizione di un sistema fisico:

1. *Determinismo* (Newton, Laplace);

2. *Imprecisione statistica* (Boltzmann, Langevin);

3. *Indeterminazione quantistica* (Heisenberg, Schrödinger);

4. *Caos deterministico* (Poincaré, Prigogine).

La nostra attenzione nel seguito sarà rivolta essenzialmente al primo livello. Seguendo la strada tracciata da K. Hutchinson in due lavori presenti in bibliografia [5], [6], e ispirandoci ad alcune osservazioni di A. Drago su tali lavori [7], esporremo alcune critiche che si possono rivolgere alla concezione classica della meccanica. Alcune di tali critiche non sono affatto nuove, ma esse assumono una nuova veste se esaminate alla luce della matematica costruttiva [8]. In particolare, nella sezione II discuteremo le osservazioni di Hutchinson nei riguardi della meccanica classica, nella sezione III introdurremo le matematiche costruttive e ne discuteremo brevemente l'applicazione nell'ambito dei sistemi descritti dalla meccanica classica, e infine trarremo qualche conclusione.

La Meccanica Classica è veramente reversibile e deterministica?

Riesaminiamo ora le proprietà attribuite usualmente alla meccanica classica per capire se esse siano intrinsecamente legate ad essa, o non siano piuttosto una particolare interpretazione secondo una teoria ben più generale.

Definiremo *sistema* un insieme di equazioni differenziali che, unitamente alle condizioni iniziali e al contorno richieste per ottenere un problema ben posto, descrivano l'evoluzione di funzioni di ^{n}T al variare in T di una grandezza indipendente, che convenzionalmente chiameremo *tempo*. Un sistema può essere descritto tramite *parametri* se esso appartiene ad una famiglia di sistemi simili. Il suo stato dipende dal valore di una o più grandezze; nel caso della meccanica, tali grandezze sono la posizione e la velocità dei corpi interagenti tra loro secondo le classiche leggi della dinamica.

Definiremo *deterministico* un sistema che ammette soluzione *unica*, e tale soluzione dipende con continuità dai dati iniziali e dal valore dei parametri che descrivono il sistema. Definiremo poi *reversibile* un sistema che, in seguito all'inversione del tempo e di tutte le velocità, ritraccia la sua traiettoria nello spazio delle fasi.

Date tali definizioni, chiediamoci se effettivamente la meccanica classica sia reversibile e deterministica. Se consideriamo un sistema su cui agisce una forza di richiamo proporzionale allo spostamento e che è descritto dall'equazione:

$m\ddot{x} + kx = 0$ (1)

dove *m* è la massa del sistema, e *k* una costante di elesticità, non ci sono dubbi sulla sua reversibilità. Invece un sistema del tipo:

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ (2)

dove è aggiunta una forza di attrito proporzionale, tramite una costante *c*, alla velocità, è irreversibile, pur rientrando nell'ambito della meccanica classica; dunque "*la presenza di forze dissipative introduce una irreversibilità, la quale PUO' essere descritta per mezzo della meccanica classica*" (cfr. [5]-p. 311).

Il fatto che esistano forze in grado, qualora considerate come agenti all'interno di un sistema descrivibile mediante la dinamica classica, di rendere il sistema stesso irreversibile, ci spinge a dire che il moto risultante è reversibile o meno a seconda del carattere delle forze agenti. Si può giustificare l'approccio di Laplace solo attribuendogli una visione "metafisica" che distingue le forze in *forze-causa*, che sarebbero le "vere" forze, e in forze *non-causa*, o passive, d'attrito, che sarebbero accidentali, più o meno contingenti rispetto al moto idealmente inteso. La pretesa ontologica dell'approccio di Laplace è stata attaccata da argomentazioni che sono di carattere epistemologico (cfr. [5]); esse negano la possibilità di affermazioni sulla realtà del mondo al di là delle equazioni. L'approccio da adottare sarebbe piuttosto quello di carattere strumentalista: *la meccanica classica è un algoritmo in grado di risolvere le equazioni differenziali del moto. Il moto risultante è reversibile a seconda del carattere delle forze agenti*.

Prima di procedere oltre, esaminiamo brevemente alcune delle argomentazioni che si potrebbero avanzare in favore della reversibilità della meccanica classica.

Le forze fondamentali sono reversibili, e solo le forze fenomenologiche, ovvero dedotte estrapolando relazioni di causa ed effetto dai fenomeni macroscopici, introducono irreversibilità.

Questa obiezione non tiene conto del fatto che la meccanica classica nasce come una teoria fondata sull'osservazione e sulla descrizione fenomenologica della realtà, e che quindi tutte le sue forze all'origine debbono considerarsi di carattere fenomenologico.

Le leggi della meccanica classica non impongono l'irreversibilità, come invece fanno le leggi della diffusione del calore.

Questo è vero, ma non impongono esplicitamente neanche la reversibilità; per cui l'affermazione più corretta è che esse sono semplicemente *neutre* rispetto alla reversibilità dei fenomeni che descrivono.

Se considerassimo l'intero universo, tenendo conto del moto di tutte le sue parti e di ogni possibile forza agente, invertendo il moto di *tutte* le componenti di tale "sistema-universo", esso risulterebbe reversibile.

Pur non indagando sulla liceità del considerare tutte le componenti dell'universo, operazione questa puramente concettuale, il sistema "ridotto", o schematizzato, che risulta irreversibile, è una parzializzazione che rientra nella classe dei sistemi descrivibili con la meccanica classica. Dunque, anche se fossero delle idealizzazioni, tali sistemi sarebbero a pieno titolo compresi tra quelli trattabili dalla meccanica classica.

Un ulteriore argomento spesso citato a favore della reversibilità [9] è che nelle equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (3)$$

dove L è la differenza tra energia cinetica e potenziale, è possibile invertire il tempo.

Questo è certamente vero, ma soltanto perché qui a priori non è presente nessuna forza del tipo che abbiamo visto introdurre dissipazione, e cioè irreversibilità; in altri termini, è vero soltanto per sistemi che abbiamo già detto essere reversibili.

In effetti, prima ancora di chiedersi se un sistema dinamico sia o meno reversibile, occorrerebbe verificare che esso sia deterministico, nel senso specificato sopra. Sebbene in Hutchinson siano esposte alcune interessanti argomentazioni sul determinismo in meccanica classica, in questa sede siamo interessati all'effetto della precisione finita con cui sono noti lo stato iniziale e i parametri descrittivi di un sistema dinamico reale. Può accadere che anche sistemi che ammettono soluzione unica, ma la cui evoluzione dipende sensibilmente dai valori dei parametri e dalle condizioni iniziali, risultano *indeterminati*, nel senso che la nostra ignoranza sui dati iniziali e sui parametri si traduce in variazioni sull'evoluzione dello stato del sistema che sono maggiori dell'incertezza che abbiamo sui dati iniziali. Cosa accade dunque ad un sistema reversibile e deterministico se teniamo in conto l'imprecisione associata alle misure sperimentali?

La meccanica classica è usualmente formulata in un contesto concettuale che presuppone un'ontologia dell'esattezza, ma non è assolutamente vincolata a questa concettualizzazione. Se si cambia il tipo di descrizione del sistema, in modo da tener conto a priori dell'imprecisione sperimentale, il carattere irreversibile della descrizione di un sistema meccanico può diventare una proprietà intrinseca della sua descrizione matematica.

La fisica sperimentale in effetti si esprime non in termini di valori esatti, ma piuttosto in termini di intervalli di confidenza. Se teniamo conto di questa imprecisione sui dati iniziali, introduciamo un'incertezza sullo stato corrente del sistema, la quale può aumentare a seconda delle caratteristiche del sistema stesso. Un aumento di incertezza rende il sistema irreversibile: non sappiamo determinare, con la stessa precisione che avevamo nello stato iniziale, uno stato da cui far partire l'evoluzione "con il tempo invertito" del sistema per ritornare allo stato iniziale stesso.

I sistemi dinamici descritti dalla meccanica classica vanno dunque discriminati sulla base di come l'imprecisione sul loro stato evolve seguendo la dinamica: i sistemi che mantengono costante l'imprecisione sullo stato, o la diminuiscono, risultano deterministici, mentre quelli che la amplificano non lo sono affatto. Un esempio in questo senso è rappresentato dai sistemi cosidetti "caotici", che amplificano esponenzialmente l'errore iniziale.

Le Matematiche costruttive

Per descrivere la realtà sperimentale con più accuratezza, tenendo in conto le osservazioni di Hutchinson sull'irreversibilità e sul non determinismo nella meccanica classica, è opportuno trovare una matematica che rappresenti le imprecisioni nei dati iniziali e nei parametri del modello, che sia in grado inoltre di evidenziare il carattere irreversibile o non deterministico della realtà sperimentale mediante opportune proprietà del modello matematico, e che sia eventualmente meno potente, ma più adeguata alle situazioni fisiche. Una possibile risposta a queste esigenze è una *matematica costruttiva* [8], [10]-[12].

Le matematiche costruttive si pongono come alternativa al tradizionale calcolo infinitesimale, opponendosi ad alcuni concetti *metafisici* che ne sono alla base, come quelli di infinito o infinitesimo *in atto*. In matematica costruttiva, invece, ci si restringe al solo *infinito potenziale*; in tal modo le matematiche costruttive restano limitate rispetto a quella classica: un ente matematico, sia numero che funzione, può essere definito solo quando esiste un algoritmo finitista che permetta di costruirlo.

Senza entrare ulteriormente nel merito delle definizioni "costruttiviste", desideriamo notare esplicitamente che in tale ambito la nozione di conoscenza infinitamente precisa di una grandezza perde di significato; acquista invece una controparte matematica ben precisa il processo di misura che consente di acquisire progressivamente il valore dei parametri dello stato di un sistema, e dunque di ridurre l'imprecisione connessa alla sua descrizione. Un esame dell'uso della matematica costruttiva nell'ambito della fisica può trovarsi in [12].

Ai nostri scopi è sufficiente delineare una procedura di risoluzione del problema **y**'=f(**x**,**y**), al quale si può ridurre la soluzione delle equazioni differenziali del secondo ordine tipiche della meccanica[8], [10]; ad esempio è possibile seguire il teorema di Aberth [8, p.122]:

Sia f(**x**,**y**) una funzione lipschitziana e uniformemente integrabile. Allora la sequenza definita da:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_0(\mathbf{x}) = b \\ \mathbf{y}_{n+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0(\mathbf{x}) + \int_0^x f(\xi, \mathbf{y}_n)\,d\xi \end{cases}$$

I

converge ad una soluzione dell'equazione y'=f(x,y).

A titolo di esempio, in Fig. 1 e 2 sono riportati i risultati dell'applicazione del metodo di Aberth a due problemi ben noti nella meccanica classica. Nel primo problema, un oscillatore armonico, l'imprecisione sul sistema non aumenta. Nel secondo, un oscillatore smorzato, diminuisce. In entrambi questi casi le ipotesi necessarie per l'applicazione del procedimento sono verificate.

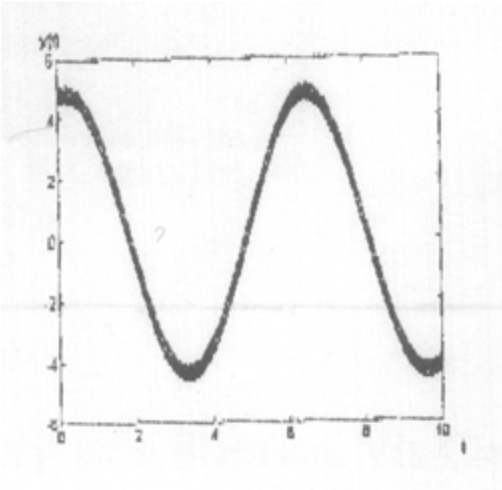

Fig. 1 - Oscillatore armonico

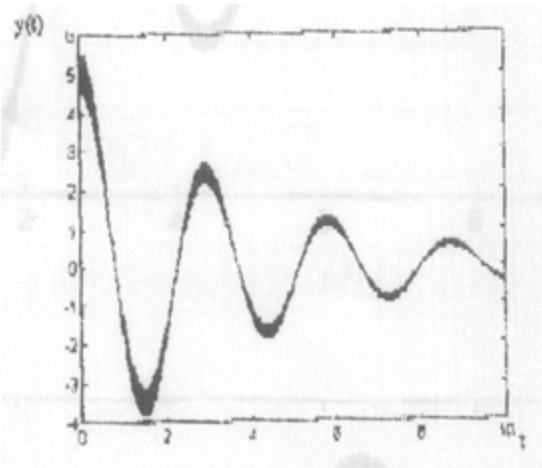

Fig. 2 - Oscillatore smorzato

L'applicazione del metodo a sistemi che non amplifichino l'imprecisione iniziale risulta di immediata convergenza senza ulteriori prescrizioni. Applicando tuttavia il metodo ai sistemi che amplificano l'errore, il metodo può non convergere. A titolo di prova, si è applicato il metodo alle equazioni dell'oscillatore con smorzamento negativo, ottenendo la convergenza, e poi alle equazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a(y_2 - y_1) \\ \dot{y}_2 = by_1 - y_2 - y_1 y_3 \\ \dot{y}_3 = cy_3 - y_1 y_2 \end{cases} \qquad (4)$$

con a=10, b=28 e c=-8/3 (parametri che rendono caotico il sistema), e non si è ottenuta convergenza. Si osservi che tali equazioni sono un classico esempio di sistema che possiede un attrattore caotico.

Il legame tra la non computabilità nell'ambito della matematica costruttiva e l'amplificazione esponenziale dell'errore iniziale sullo stato di un sistema dinamico potrebbe essere ipotizzato come problema di indecidibilità, in che rimanda alla crescita della complessità degli algoritmi fino alla loro inestistenza. La relazione tra sistemi caotici e complessità algoritmica è argomento di numerose osservazioni in letteratura. Allora il legame suddetto andrebbe analizzato nel contesto di una teoria formale della complessità algoritmica (cfr. [13] per un interessante punto di vista sull'argomento).

Conclusioni

Si è visto che la meccanica classica è in grado di descrivere sistemi irreversibili e non deterministici, e ciò ha spinto a riconsiderare le caratteristiche della meccanica classica stessa.

L'introduzione delle imprecisioni sulle condizioni iniziali e in genere sui parametri del sistema ha poi evidenziato una divisione dei sistemi dinamici sulla base della loro capacità di propagare tale imprecisione iniziale.

Si è infine suggerito come l'utilizzo di una matematica costruttiva riesca a tenere in conto le situazioni reali e financo offrire un mezzo per rappresentare l'imprecisione che affligge i dati sperimentali.

Bibliografia

[1] P.-S. Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*. Parigi: 1784.

[2] M.A.B. Deakin, "Nineteenth Century Anticipations of Modern Theory of Dynamical Systems", *AHES* Vol. 39, pp.183-194, 1989.

[3] J.C. Maxell, "Does the Progress of Physical Science tend to give any advantage to the opinion of Necessity (or Determinism) over that of Contingence of Events and the Freedom of the Will?", in L. Campbell, W. Garnett, *The life of James Clark Maxwell with a Selection of his Correspondence and Occasional Writing and a Skecth of His Contributions to Science*. London: 1882.

[4] F.T. Arecchi, "Caos e Ordine nella Fisica", presentato al Seminario "*Introduzione alla Scienza della Complessità*", Castelgandolfo, 10-12 Dicembre 1994.

[5] K. Hutchinson, "Is Classical Mechanics Really Time-reversible and Deterministic?", *Brit. J. Phil. Sci.,* Vol. 44 , pp. 307-323, 1993.

[6] K. Hutchinson, "Temporal Asymmetry in Classical Mechanics", *Brit. J. Phil. Sci.*, Vol. 46, pp. 219-234, 1995.

[7] A. Drago, "Review of K. Hutchinson", in stampa su *Mathematical Reviews*.

[8] O. Aberth, *Computable analysis*. New York: McGraw-Hill, 1980.

[9] R. Tolman, *The Principles of Statistical Mechanics*, pp. 102-104. Oxford: Clarendon Press, 1938.

[10] L. Romano, "*Matematica costruttiva ed equazioni differenziali in fisica teorica*", Tesi di Laurea in Fisica, Univ. di Napoli, a.a. 1992-1993.

[11] E. Bishop, *Foundation of Constructive Mathemeatics*. New York: McGraw-Hill, 1967.

[12] A. Drago, "Relevance of constructive mathematics to theoretical physics", in E. Agazzi et al. (eds): *Logica e filosofia della scienza, oggi*. Bologna: CLUEB, 1986.

[13] R. W. Batterman, Defining Chaos, *Phil. of Science*, Vol. 60, pp. 43-66, 1990.

---

[*] Dip. Ingegneria Elettrica - Univ. degli Studi di Napoli Federico II, Via Claudio 21, Napoli