

## NOTE SUI PRIMI STUDI SULL'ELETTRONE CON SPIN

### Riassunto

Propongo una rivisitazione di alcune memorie che furono rilevanti per l'elaborazione della teoria di Pauli dell'"elettrone magnetico".

In particolare voglio sottolineare il distacco graduale che la comunità scientifica maturò nei confronti di forme matematiche e concettuali tipiche della meccanica classica in favore di una descrizione di tipo quantistico.

Tale distacco si realizzò storicamente attraverso un percorso per nulla lineare e progressivo: fin dai suoi primi studi sull'argomento, infatti, W. Pauli aveva affermato la necessità di adottare i canoni della "nuova" meccanica; tuttavia, furono molteplici i casi in cui si attinse a strutture caratteristiche della teoria classica da cui non fu semplice svincolarsi. Mi riferisco in particolare all'ipotesi avanzata da Uhlenbeck e Goudsmit secondo i quali il momento angolare di spin era connesso a un modello di elettrone sferico rotante attorno al proprio asse baricentrale. Alla controproposta di Pauli - di abbandonare la connessione spin-rotazione propria perché dettata dagli schemi concettuali della meccanica classica - non si associò immediatamente la rinuncia, sul piano formale, all'adozione di un angolo di rotazione come variabile coniugata al momento angolare di spin.

L'indagine scientifica su questa "nuova" proprietà dell'elettrone, dunque, procedette oscillando fra due tendenze: quella alla modellizzazione e quella alla rappresentazione formale. Il risultato di una tale alternanza, però, fu un tipo di ricerca sempre più astratta e sempre meno indulgente verso rappresentazioni intuitive.

### 1 Introduzione

"La struttura a doppietto degli spettri alcalini, così come la deviazione dal teorema di Larmor, è dovuta a una particolare "two-valuedness"[\[619\]](#) delle proprietà quantistiche dell'elettrone, che non può essere descritta dal punto di vista classico." (Pauli 1924).

Queste parole furono scritte da Pauli prima ancora che fosse introdotta la nozione di spin. Si trattò sicuramente di una felice intuizione, e senz'altro il monito a fare riferimento alla meccanica quantistica, piuttosto che a quella classica, caratterizzò i lavori successivi di Pauli stesso e di altri celebri studiosi. E i risultati di questi loro sforzi culminarono in elaborazioni fortemente formali e astratte, come in particolare la teoria dell'"elettrone magnetico" di Pauli del 1927. Tuttavia avremo modo di osservare che anche in lavori come questo si fece ricorso ad alcune forme teoriche di eredità classica in maniera talora fuorviante. Gli altri contributi alla comprensione dello spin, viceversa, possono dirsi caratterizzati da una sorta di contrappunto fra la tendenza all'astrazione e il presentarsi di esigenze di modellizzazione e di visualizzazione. Gli autori di questi lavori, inoltre, come pure lo stesso Pauli, ricorsero ripetutamente a ragionamenti o ipotesi stilate in analogia con forme caratteristiche della meccanica classica. Tali esigenze e tali analogie sono il segno della difficoltà che si incontrò a riconoscere il carattere *intrinseco* della "nuova" variabile.

### 2 Verso una formulazione quantistica

Prima di addentrarci nel cuore di questa discussione, diamo un'occhiata panoramica allo stadio in cui si trovavano attorno alla metà degli anni Venti le riflessioni su quelle "proprietà magnetiche" dell'elettrone che sarebbero poi state imputate al suo spin.

Nei primi anni Venti si indagava essenzialmente sulla struttura della tavola periodica degli elementi in connessione con la struttura dei multipletti e con la struttura atomica[620]. In particolare, per quanto riguarda il problema dei multipletti, gli studi si concentravano su fenomeni magnetici come l'effetto Zeeman. Già a partire dal 1921 si andavano introducendo grandezze che riconosciamo come caratteristiche dello spin dell'elettrone, quali un momento magnetico di un magnetone di Bohr e numeri quantici a valori semi-interi, imputandoli dapprima all'atomo nel suo complesso, e non subito all'elettrone[621]. È appunto in termini di tali numeri quantici, chiamati spesso numeri quantici "interni" - e non già alla nozione di spin, che non era ancora stata introdotta[622] - che fu formulato il principio di esclusione di Pauli, nel 1925.

I punti chiave, poi, sui quali si lavorò fra il 1925 e il 1926 sono essenzialmente incentrati attorno all'adozione di un quarto numero quantico per l'elettrone. Esso necessitava di una interpretazione. Spicca in particolare il contributo di Uhlenbeck e Goudsmit, i quali vollero interpretare tale numero come l'entità matematica che descrivesse uno stato fisico rotatorio dell'elettrone. L'argomentazione era ormai consolidata nell'algoritmo della meccanica quantistica e consisteva nell'interpretazione di ogni numero quantico come corrispondente a un grado di libertà per il sistema a cui esso si trovava associato. Accadeva, però, che fino ad allora la meccanica quantistica era stata applicata a punti materiali elettricamente carichi e descritti da tre soli numeri quantici. Un numero quantico in più non appariva compatibile con l'immagine di un elettrone puntiforme, per cui l'esistenza di un tale numero acquisiva credibilità solo a patto di dipingere l'elettrone come una piccola sfera che potesse ruotare. Come avrebbero sottolineato più tardi, Uhlenbeck e Goudsmit giudicarono positiva la loro ipotesi in quanto, per il suo carattere "visivo", essa veniva a colmare quella che per loro era una lacuna nell'assunzione del quarto numero quantico, ossia la mancanza di un'immagine concreta da associargli.

Il modello dello "spinning electron", dunque, si articolava sostanzialmente in tre ipotesi:

- i) l'elettrone ruota attorno al proprio asse;
- ii) l'elettrone ha un momento angolare  $\hbar/2$  associato a questa rotazione; la sua proiezione, in qualunque direzione, vale  $m_s = \pm \frac{1}{2}$  (in unità  $\hbar$ );
- iii) l'elettrone ha, inoltre, un momento magnetico di un magnetone di Bohr.

Per completezza, va citato il fatto che contemporaneamente e indipendentemente da Uhlenbeck e Goudsmit anche Kronig aveva proposto di interpretare il quarto numero quantico dell'elettrone come associato a un momento angolare aggiuntivo rispetto a quello orbitale, la cui proiezione su una direzione qualunque dovesse essere  $\pm \frac{1}{2}$  in unità  $\hbar$ . E anch'egli giunse a un'interpretazione dinamica di tale momento angolare come generatore di una rotazione dell'elettrone attorno al proprio asse. Interpretazione che sappiamo essere non del tutto corretta: come osserveremo più avanti, il momento angolare di spin, pur completando il momento angolare orbitale a generatore delle rotazioni fisiche, tuttavia non è responsabile, di per sé, di rotazioni spaziali.

Localmente, ripeto, l'associazione spin-rotazione propria soddisfaceva a un'esigenza di visualizzabilità; ma d'altro canto essa comportava una difficoltà specifica: supponendo che l'elettrone fosse una sfera rotante di dimensioni classiche, i valori per la velocità di rotazione dei punti periferici risultavano superiori a quello della velocità della luce,  $c$ . Si consideri, infatti, il moto rotatorio di un elettrone sferico, di raggio classico  $r = \frac{a_0^2}{m_e \lambda_C}$ . La sua velocità angolare  $\omega$  è definita come il rapporto fra il momento angolare  $J$  e il momento d'inerzia  $I$ :  $\omega = \frac{J}{I}$ , e la velocità di rotazione  $v$  dei punti sulla superficie della sfera è  $v = \omega r$ . Essendo:

$$J = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$$

$$\left(s = \frac{1}{2}\right)$$

, e:

$$I = \frac{2}{5} m_e r^2$$

allora abbiamo:

$$\omega = \frac{5\sqrt{3}}{4} \frac{\hbar}{m_e r^2}$$

e:

$$\omega = \frac{5\sqrt{3}}{4} \frac{\hbar}{m_e r} = \frac{5\sqrt{3}}{4} \frac{\hbar c^2}{e^2}$$

Perciò, inserendo il valore della costante di struttura fine,  $\frac{\hbar e^2}{4\pi\epsilon_0} = 137$ , otteniamo

$$\nu = \frac{5\sqrt{3}}{4} 137c$$

Non fu questo l'unico problema da cui fosse affetto il modello di Uhlenbeck e Goudsmit. Anzi, quello che a posteriori appare il più grave è proprio la connessione fra il momento angolare di spin e la rotazione propria, connessione non condivisa, fin dall'inizio, dallo stesso Pauli proprio per il suo carattere classico. Tuttavia, essa era il nucleo del modello, la cui rilevanza, dunque, va associata allo svolgersi storico degli eventi.

Probabilmente l'introduzione di questo modello riscosse tanta risonanza perché esso riassumeva in sé alcune indicazioni che erano già comparse sulla scena scientifica - mi riferisco alle ipotesi relative al momento angolare e al momento magnetico dell'elettrone - e le ricomponeva in modo da soddisfare anche l'esigenza sopraccennata di un'immagine concreta da associarsi a tali ipotesi. A posteriori non possiamo che apprezzare e sottolineare che fu in quel contesto che si introdusse l'idea dello spin dell'elettrone, anche se il referente di questo nome ebbe a mutare radicalmente; soprattutto, ripeto, in relazione alla connessione con il problema della rotazione dell'elettrone. L'idea che all'elettrone spettassero un momento angolare aggiuntivo rispetto a quello angolare e un momento magnetico relativo furono introdotti nel formalismo matriciale della meccanica quantistica da parte di Heisenberg e Jordan nella primavera del 1926. Lo scopo era quello di calcolare gli "splitting" dei doppietti nei sistemi idrogenoidi e l'effetto Zeeman anomalo. La tecnica consistette nel sommare alla matrice  $\hat{K}$ , associata al momento angolare orbitale, la matrice  $\hat{S}$ , che rappresentasse il vettore di spin [623]. Heisenberg e Jordan omologarono il momento di spin a un qualunque momento angolare nel senso che proposero che lo spin dovesse soddisfare alla medesima algebra del momento angolare orbitale: fu così che essi imposero a  $\hat{S}$  di soddisfare a relazioni di commutazione analoghe a quelle già note per  $\hat{K}$ . Ossia, come per  $\hat{K}$  valgono le permutazioni cicliche della seguente:

$$\hat{K}_x \hat{K}_y - \hat{K}_y \hat{K}_x = \hbar \hat{K}_z$$

così Heisenberg e Jordan ponevano

$$\hat{S}_x \hat{S}_y - \hat{S}_y \hat{S}_x = \hbar \hat{S}_z$$

e richiedevano anche che il modulo del vettore  $\hat{S}$ , associato alla matrice  $\hat{S}$ , soddisfacesse alla relazione:

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = \hbar^2 s(s+1),$$

dove si poneva, per l'elettrone,  $s = \frac{1}{2}$ .

Gli autori imposero poi che l'interazione fra  $\hat{K}$  e  $\hat{S}$  dovesse fornire un termine energetico proporzionale a  $\hat{S} \cdot \hat{K}$  e che l'energia dovuta all'interazione dell'atomo con un campo magnetico  $H$  si dovesse esprimere come:

$$\frac{e}{2m_e c} H \cdot (\hat{K} + \hat{S})$$

Utilizzando queste quantità per valutare l'effetto Zeeman e le espressioni per i doppietti, Heisenberg e Jordan adottarono la teoria delle perturbazioni e ottennero

risultati in buon accordo con i dati sperimentali.

L'anno successivo anche Pauli impose che il vettore di spin dovesse soddisfare alle stesse relazioni del momento angolare orbitale, ma fece uso del linguaggio vettoriale e del formalismo di Schroedinger invece che di quello matriciale. Ne discese la formulazione di una teoria quantistica dell'elettrone con spin la cui funzione d'onda non era più una funzione scalare della posizione ma si scindeva in due componenti, preludendo, così, all'elaborazione dell'algebra spinoriale. Una trattazione che, come vedremo, ben poco concedeva all'intuizione e alla possibilità di visualizzare la "nuova" proprietà dell'elettrone. Prima di addentrarci nella discussione dell'opera di Pauli, tuttavia, ci soffermeremo sul lavoro che impegnò Darwin nel 1927 attorno all'ipotesi di un elettrone da rappresentarsi come un'onda a due componenti, analoga al quanto di luce. I risultati più interessanti della ricerca di Darwin, però, apparvero solo dopo la pubblicazione dell'articolo di Pauli.

### 3 L'elettrone come un'onda vettoriale: Darwin.

I tentativi di Darwin di elaborare una teoria quantistica per l'elettrone con spin sono degni di nota essenzialmente per tre motivi: uno, più generale e di carattere documentario, dipende dal fatto che Darwin propose la propria elaborazione come equivalente a quella di Pauli sul piano matematico:

"Sarà utile confrontare, brevemente, il nostro lavoro con quello di Pauli. Deve essere accentuato, prima di tutto, che non c'è assolutamente alcuna differenza fra di essi nei risultati matematici, ma che si tratta soltanto di una questione di interpretazione." (Darwin 1927a, pag. 243).

Il secondo motivo è più specificamente legato allo scopo della presente discussione e riguarda la tendenza a ricorrere a forme descrittive e conoscitive già affermate in fisica; Darwin infatti propose di affrontare il tema dell'elettrone con spin dal punto di vista della meccanica ondulatoria ma con un assunto particolare: l'onda associata all'elettrone sarebbe stata costituita di due componenti indipendenti (come anche per Pauli) da interpretarsi in analogia con le due componenti polarizzate indipendenti di un'onda luminosa:

"Quando si considerano le proprietà magnetiche dell'elettrone dal punto di vista della meccanica ondulatoria, l'elettrone deve essere considerato come un'onda di due componenti, come la luce, non di una sola, come il suono." (Darwin 1927a, pag. 227).

Il terzo motivo si colloca su un piano intermedio fra i primi due - discende cioè da motivi sia documentari sia tematici - e risiede in alcune contestazioni mosse da Darwin stesso al modello di Uhlenbeck e Goudsmit: essenzialmente, come vedremo fra breve, il modello di spinning electron non si prestava ad essere descritto alla luce della meccanica ondulatoria per il fatto che sarebbe venuto così a smarrire le sue proprietà di visualizzabilità. Darwin, tuttavia, non avrebbe respinto integralmente la proposta di Uhlenbeck e Goudsmit ma solo l'idea di un elettrone rotante dotato di una forma estesa:

"La mia ipotesi non abolisce e non intende abolire l'elettrone con spin, ma soltanto la rappresentazione della sua onda in termini di un corpo rotante." (Darwin 1927a, pag. 231).

Il pregio del modello di Uhlenbeck e Goudsmit era stato quello di aver reso visualizzabile l'elettrone con spin; ma tale pregio veniva meno nel momento in cui si utilizzava la meccanica ondulatoria per descrivere l'elettrone visto come corpo rigido rotante:

"L'equazione d'onda per lo spin di un corpo rigido è nello spazio dei tre angoli di Eulero e dal momento che essi hanno domini ciclici per i valori ammessi, tale onda è molto difficile da visualizzarsi.

Se noi affrontiamo il problema dell'elettrone con spin considerandolo come un corpo rotante, abbiamo l'onda in uno spazio di sei dimensioni, e dal momento che tre di esse sono gli angoli di Eulero, perdiamo tutta la semplicità della visualizzazione." (Darwin 1927a, pag. 229).

Infine, lo sdoppiamento della funzione d'onda abbattava definitivamente ogni aspirazione alla visualizzazione, cui Darwin proponeva di rinunciare:

"Si può mostrare che la funzione d'onda associata con ciascuno stato non è a valori singoli, come in tutti gli altri problemi, ma è a due valori; perché solo così si può ottenere il valore  $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$  [624]. Se è difficile visualizzare solo che una funzione a valori singoli nello spazio degli angoli di Eulero, una funzione a due valori ci induce ad abbandonare del tutto lo sforzo." (Darwin 1927a, pag. 230).

La rinuncia a una rappresentazione concreta, tuttavia, andava parzialmente compensata dalla proposta di assimilare l'onda elettronica alle onde luminose: si era avvezzi a concepire queste ultime come composte di due componenti polarizzate, e questo poteva rendere plausibile che anche l'onda dell'elettrone con spin fosse costituita da due componenti indipendenti:

"Tutte le obiezioni (al modello di elettrone rotante) sono risolte fin dal principio se ci basiamo sull'analogia con la luce e se diamo per assunto che, proprio come ci sono due componenti indipendenti polarizzate in un'onda luminosa, così ci siano due componenti indipendenti nell'onda di un elettrone." (Darwin 1927a, pag. 230).

Certo, si trattava solo di un'idea cui fare riferimento, e non di un vero e proprio modello teorico:

"Non ci possiamo aspettare una somiglianza esatta nelle equazioni d'onda. Perché quando un'onda luminosa è analizzata in componenti e quando si considerano i raggi che attraversano un mezzo doppiamente rifrangente, le polarizzazioni sono mutualmente perpendicolari; ma quando l'onda di un elettrone è analizzata in un esperimento alla Stern e Gerlach, i raggi (o particelle) associati hanno polarizzazioni anti-parallele." (Darwin 1927a, pag. 230).

Si trattava ora di individuare una forma opportuna per le equazioni per l'elettrone con spin. Il metodo proposto da Darwin fu quello di costruire empiricamente tali equazioni in maniera che esse riproducessero la struttura fina dell'idrogeno:

"Richiediamo di inventare due funzioni,  $f$  e  $g$ , di  $x, y, z$ , che obbediscano a equazioni con le seguenti proprietà: per tener conto delle proprietà complessive dello spettro dell'idrogeno,  $f$  e  $g$  devono entrambe soddisfare, approssimativamente, l'equazione di Schroedinger per l'idrogeno. Esse non devono, tuttavia, soddisfarla esattamente, perché devono spiegare la struttura fina [625]. Ciascun livello dato dall'equazione di Schroedinger deve trasformarsi in due livelli, e, quando c'è un campo magnetico, questi livelli si devono "perturbare" l'un l'altro, in modo da spiegare l'effetto Paschen-Back.

Il modo più naturale, e forse l'unico, per ottenere queste qualità, è prendere equazioni della forma:

$$Df + \alpha f + \beta g = Wf$$

$$Dg + \gamma f + \delta g = Wg,$$

dove  $D\psi = W\psi$  è l'equazione di Schroedinger per gli stati stazionari della struttura complessiva, mentre  $\alpha, \beta, \gamma$  sono piccoli operatori perturbativi in  $x, y, z$ ." (Darwin 1927a).

Può essere interessante ora rivedere come Darwin pervenne, a partire dalle equazioni di cui sopra, a un insieme di quattro equazioni per quattro grandezze, costruite a partire dalle  $f, g$ . Questa situazione ci riporta alla mente il formalismo quadrispinoriale che Dirac stesso avrebbe elaborato nei mesi successivi. Non è questa la sede per discutere nel dettaglio i rapporti fra queste due elaborazioni, ma può essere di qualche valore il solo riportare i passaggi principali dell'elaborazione di Darwin per mostrare che certo non si può ritenere il suo lavoro come un anticipo dei risultati ottenuti da Dirac, nonostante che anche Darwin avesse tentato di individuare una formulazione relativistica per la sua teoria. Tale formulazione si basava sullo studio perturbativo delle seguenti equazioni per un elettrone immerso in un campo magnetico  $H$ :

$$\left( D - \frac{2\pi eH}{ch} \right) f + \frac{1}{2} \frac{Ne^2}{mc^2} \frac{1}{r^3} (-iR_1 g - R_2 g + iR_3 f) = 0$$

$$\left( D + \frac{2\pi eH}{ch} \right) g + \frac{1}{2} \frac{Ne^2}{mc^2} \frac{1}{r^3} (-iR_1 f + R_2 f - iR_3 g) = 0$$

dove

$$y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} = R_1, \quad z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} = R_2, \quad x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} = R_3,$$

e dove il tempo  $t$  era considerato come una variabile indipendente allo scopo di rendere le (??) passibili si trasformazioni relativistiche.

L'autore giungeva a una formulazione delle (??) in termini di quattro equazioni per quattro variabili basandosi nuovamente sull'analogia con i fenomeni elettromagnetici. Tale analogia doveva giustificare la necessità di individuare un vettore (o un tensore) in corrispondenza con le proprietà di invarianza di un gruppo di equazioni. Egli infatti aveva osservato che le (??) erano invarianti per trasformazioni dei tre assi cartesiani e aveva scritto che "è l'essenza fondamentale del presente lavoro che questa invarianza implichi l'esistenza di un vettore." (Darwin 1927a, pag. 237). Ecco ora l'analogia con la luce:

"Consideriamo la seguente analogia: - Supponiamo di eseguire esperimenti con luce ordinaria, e di cercare di individuare, a partire da essi, le equazioni d'onda della luce. Dovremmo trovare che la luce dipende da due quantità, le due componenti di polarizzazione. Dovremmo proporre due equazioni d'onda per due incognite indipendenti - potremmo avere, per esempio, equazioni per  $E_x$  ed  $E_y$  ma senza  $E_z$ . Queste equazioni sarebbero assolutamente asimmetriche in apparenza - o in ogni caso lo sarebbero le relative formule per l'intensità - ma avrebbero la proprietà che, per trasformazioni delle variabili dipendenti  $E_x, E_y$  si potrebbe fare in modo da fare assumere ad esse la stessa forma che per una trasformazione d'assi. Dovremmo perciò cercare di modificarle introducendo una nuova variabile affinché esse diventino invarianti nella forma oltre che di fatto." (Darwin 1927a, pag. 237).

Sulla base di queste considerazioni Darwin asseriva l'equivalenza logica fra una condizione di invarianza per le equazioni e l'esistenza di un vettore (o di un tensore, secondo il tipo di invarianza). Lo stesso doveva valere in una teoria per l'elettrone:

"Chiunque respinga quest'argomentazione per l'elettrone dev'essere preparato per coerenza a respingere l'intera interpretazione ordinaria della teoria elettromagnetica." (Darwin 1927a, pag. 238).

Ecco allora quali erano le equazioni che Darwin otteneva a partire dalle (??):

$$\begin{aligned} DX_1 - U_1 X_4 - U_2 X_3 + U_3 X_2 &= 0, \\ DX_2 - U_2 X_4 - U_3 X_1 + U_1 X_3 &= 0, \\ DX_3 - U_3 X_4 - U_1 X_2 + U_2 X_1 &= 0, \\ DX_4 - U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DX_1 - U_1 X_4 - U_2 X_3 + U_3 X_2 &= 0, \\ DX_2 - U_2 X_4 - U_3 X_1 + U_1 X_3 &= 0, \\ DX_3 - U_3 X_4 - U_1 X_2 + U_2 X_1 &= 0, \\ DX_4 - U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 &= 0, \end{aligned}$$

dove le variabili  $X_1, X_2, X_3, X_4$  erano ottenute dalle  $f, g$  e da costanti arbitrarie  $\alpha, \beta$  nel seguente modo:

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha f + \beta g \\ X_2 &= i\alpha f - i\beta g \\ X_3 &= -\beta f + \alpha g \\ X_4 &= i\beta f + i\alpha g. \end{aligned}$$

I tre operatori  $U_1, U_2, U_3$  costituivano un vettore e rappresentavano le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} \frac{Ne^2}{mc^2} \frac{1}{r^3} \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ U_2 &= \frac{1}{2} \frac{Ne^2}{mc^2} \frac{1}{r^3} \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \\ U_3 &= \frac{1}{2} \frac{Ne^2}{mc^2} \frac{1}{r^3} \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) + i \frac{2\pi eH}{ch}, \end{aligned}$$

nelle quali possiamo distinguere la presenza delle componenti del momento angolare orbitale. Dal momento che, ripeto,  $\vec{U}$  rappresenta un vettore, è possibile, come scriveva Darwin, considerare  $X_1, X_2, X_3$  come le componenti di un vettore e  $X_4$  come uno scalare, di modo che le equazioni di cui sopra possano essere riscritte in notazione vettoriale:

$$\begin{aligned} DX - UX_4 - [U, X] &= 0, \\ DX_4 + (U, X) &= 0. \end{aligned}$$

A proposito di queste espressioni l'autore sottolineava "è ora evidente che il nostro sistema è indipendente dalla scelta degli assi, e per definizione abbiamo un'onda vettoriale" (Darwin 1927a, pag. 239).

Darwin aveva così raggiunto il suo scopo. Tuttavia la sua incastellatura con le sue quattro equazioni per quattro variabili conteneva un'indeterminatezza per cui le equazioni indipendenti erano solo due [626]:

"Le quattro equazioni di cui sopra in realtà sono solamente due, perché per qualunque scelta degli assi essi possono essere ricombinati in una coppia del tipo  $X_1 + iX_2$  e  $X_3 + iX_4$  (o in ogni altro raggruppamento), e, dal momento che tutti i risultati, livelli, intensità, etc., dipendono solo dai prodotti di quantità coniugate, non sorgerebbero risultati diversi da equazioni per  $X_1 - iX_2, X_3 - iX_4$  così che il problema è completamente espresso con la prima coppia. E' questo fatto che rende indeterminato il nostro vettore." (Darwin 1927a, pag. 239).

Anche in questo caso Darwin trovava nell'analogia con l'ottica un motivo per cui era plausibile attendersi l'indeterminatezza del vettore:

"Un'analogia tratta dall'ottica suggerisce una buona ragione per aspettarsi l'ambiguità. Consideriamo un raggio di luce con polarizzazione circolare destrorsa che viaggi in direzione dell'asse  $z$ . Ammesso che noi ci avvaliamo di vettori immaginari, il raggio è pienamente specificato da un vettore  $E$ , che può essere scelto indifferentemente in qualunque direzione del piano  $xy$ . Ammettere valori complessi comporta un ulteriore elemento di arbitrarietà nel vettore. Ora, tutta la teoria

ondulatoria della materia é sempre espressa in termini di quantità complesse, benché dalla sua forte somiglianza con la teoria della luce sia difficile credere che questo fatto sia essenziale. Così potremmo avanzare la congettura che l'esclusione di quantità complesse potrebbe fornire un significato più preciso al vettore. Al momento non sono ancora riuscito a compiere questo passo." (Darwin 1927a, pag. 240).

Accontentandosi quindi di una teoria in cui le componenti significative del vettore  $X$  fossero solo due, Darwin procedeva al calcolo delle intensità delle linee spettrali e del momento magnetico di un atomo. Per il primo scopo l'estensione dalla teoria di Schroedinger era pressoché immediata: come in quel caso la densità elettrica era rappresentata dal prodotto  $\psi_a \psi_b$  fra due autofunzioni normalizzate  $\psi_a, \psi_b$ , così ora si poteva assumere che tale densità fosse da esprimersi come  $\sum_{\lambda=1}^4 X_{\lambda}^2$  avendo normalizzato le  $X$  in questo modo:  $\sum_{\lambda=1}^4 X_{\lambda}^2 = 1$ . I risultati finali concordavano con quelli già noti. Così come pure quelli ottenuti a proposito del momento angolare, calcolato in funzione dell'energia  $W$  e di un campo magnetico  $H$ : come scriveva Darwin, "  $\frac{e\hbar}{4\pi m c}$  è per definizione il momento magnetico" (Darwin 1927a, pag. 242). In particolare il momento angolare di spin risultava espresso in termini delle componenti di  $X$  come proporzionale a  $X_1 X_2 - X_2 X_1 - X_3 X_4 - X_4 X_3$ .

L'esperimento teorico di Darwin, tutto sommato, non si può ritenere dei più significativi per lo sviluppo degli studi sullo spin dell'elettrone. Tuttavia ho ritenuto opportuno soffermarmi sui punti salienti di questo contributo e in particolare sul procedere per analogia con la teoria per le onde di luce perché sono fatti indicativi di una difficoltà che probabilmente si incontrava in quegli anni: quella ad attribuire uno statuto ontologico autonomo alle proprietà di spin dell'elettrone. Difficoltà che si può considerare assente, invece, in quella che é ritenuta la teoria per eccellenza dello spin: la teoria di Pauli "dell'elettrone magnetico". Prima di procedere ad analizzare alcuni degli aspetti di tale teoria riporto alcune parole scritte dallo stesso Darwin sul proprio metodo di lavoro confrontato con quello di Pauli, in modo da anticipare quale fosse il modo di procedere tipico del fisico tedesco:

"Sarà utile confrontare brevemente il nostro lavoro con quello di Pauli. Innanzitutto si deve sottolineare che fra di essi non c'è assolutamente alcuna differenza per quanto riguarda i risultati matematici, ma che é solo una questione di interpretazione. Pauli ha due funzioni  $\psi_a, \psi_b$ , identiche alle  $f, g$  di cui sopra, e il punto essenziale del suo modo di procedere é l'assunto secondo cui c'è bisogno di di due funzioni per rappresentare l'elettrone. Egli poi lavora a partire dai principi generali della meccanica e arriva a equazioni per le funzioni proprie identiche alle nostre. Dal momento che questi principi generali furono derivati in origine da uno studio dello spettro dell'idrogeno, chiaramente é indifferente se noi usiamo quelli per descrivere lo spettro dell'idrogeno, come fa lui, oppure se usiamo lo spettro per derivare quelli, come é stato fatto qui." (Darwin 1927a, pag. 243-244).

#### 4 L'"elettrone magnetico" di Pauli

Come scrisse Darwin, la teoria di Pauli per lo spin dell'elettrone era fondata su di un uso ormai maturo e disinvolto delle regole formali su cui, in quel tempo, si riteneva di dover fondare la "nuova meccanica quantistica". Nella nuova teoria non rimaneva quasi alcuna traccia del modo con cui, sia pur in tempi recentissimi, quelle regole erano state ricavate. Né Pauli cercava teorie o immagini concrete cui fare riferimento per legittimare le innovazioni che introduceva nel formalismo. Anzi, prese le distanze da ogni forma di visualizzazione ed elaborò una struttura essenzialmente matematica senza avanzare ipotesi sulla forma o sul comportamento dell'elettrone: l'elettrone con spin di Pauli non era, come nemmeno per Darwin, una sfera rotante su se stessa, ma l'oggetto fisico di cui studiare la dinamica, descritta dall'evoluzione della sua funzione d'onda. A proposito del modello di Uhlenbeck e Goudsmit, in occasione della conferenza per il premio nobel del 1946 Pauli stesso affermò:

"Benché inizialmente io avessi dubitato fortemente della correttezza di questa idea, fui infine convinto dai calcoli di Thomas sull'ampiezza della separazione dei doppietti. D'altro lato, i miei primi dubbi così come l'affermazione circospetta "two-valuedness non descrivibile dal punto di vista classico" [627] ebbero una certa conferma durante sviluppi successivi, dal momento che Bohr fu in grado di mostrare sulla base della meccanica ondulatoria che lo spin dell'elettrone non può essere misurato con esperimenti descrivibili classicamente (come, per esempio, deflessione di raggi molecolari in campi elettromagnetici esterni) e che perciò deve essere considerato come una proprietà dell'elettrone essenzialmente quantistica." (Pauli 1946, pag. 134).

La descrizione "essenzialmente quantistica" dello spin dell'elettrone fu realizzata da Pauli stesso in seno alla teoria dell'"elettrone magnetico" del 1927. Il punto fondamentale di tale teoria - e sicuramente l'assunto più innovativo - consistette nell'ipotesi secondo cui all'elettrone andava associata una variabile dinamica in più oltre alle coordinate, ossia, diremmo oggi, a quelle variabili dotate di un analogo classico. Tale variabile dinamica era in relazione a un altro grado di libertà dell'elettrone:

"...verrà mostrato come, secondo il metodo delle autofunzioni di Schroedinger, si possa giungere a una formulazione della meccanica quantistica dell'elettrone magnetico... Questo può essere realizzato sulla base della teoria generale delle trasformazioni di Dirac e Jordan se, accanto alle coordinate di posizione di ogni elettrone, si introduce, come ulteriore variabile indipendente, la componente del suo momento angolare proprio in una direzione fissa, e questo al fine di tenere conto del suo grado di libertà rotatorio." (Pauli 1927, pag. 601).

E' questa una delle due sole affermazioni di Pauli in cui si pone lo spin dell'elettrone in relazione a una forma di rotazione: relazione che, ripeto, egli stesso aveva criticato, per il suo carattere classico. Nel resto del suo articolo, effettivamente, egli parve astenersi da qualsiasi interpretazione del momento angolare di spin, limitandosi rigorosamente alla fase della sua espressione formale. Quest'ultima comportava l'introduzione di funzioni d'onda che, in corrispondenza con la "two-valuedness" dell'elettrone, si scindessero in due componenti:

"Contrariamente alla meccanica classica, questa variabile (la componente del momento angolare proprio in una direzione fissa) può assumere soltanto i valori  $+\frac{1}{2}$  e  $-\frac{1}{2}$ , indipendentemente da qualsiasi campo di forza esterno. L'aggiunta della nuova variabile summenzionata, perciò, provoca in un elettrone una scissione dell'autofunzione in due funzioni del posto,  $\psi_a$  e  $\psi_b$ , e, più in generale, nel caso di  $N$  elettroni, in  $2N$  funzioni, che sono da considerare come "ampiezze di probabilità." (Pauli 1927, pag. 601).

Indicando con  $\psi_{a,E}(q_k)$  una funzione d'onda relativa a un autovalore  $E$  dell'energia, ecco come Pauli interpretava fisicamente le due componenti in cui essa si veniva a separare:

"Si ha:

$$|\psi_{a,E}(q_k)|^2 dq_1 dq_2 dq_3,$$

che è la probabilità che nello stato stazionario considerato, quando  $q_k$  si trova in  $(q_k, q_k + dq_k)$ ,  $S_z$  abbia il valore  $+\frac{1}{2}\hbar$  e

$$|\psi_{b,E}(q_k)|^2 dq_1 dq_2 dq_3,$$

è la probabilità che, con lo stesso valore di  $q_k$ , la componente  $S_z$  assuma il valore  $-\frac{1}{2}\hbar$ . Ogni tentativo di misurare la grandezze relative a un preciso stato stazionario approderà sempre ai valori  $+\frac{1}{2}\hbar$  e  $-\frac{1}{2}\hbar$ , anche quando  $S_z$  non indica più l'integrale delle equazioni del moto." (Pauli 1927, pag. 606).

Questo passaggio da funzioni d'onda a una sola componente a funzioni d'onda a due componenti é un avvenimento scientifico importante per noi che lo giudichiamo a posteriori. Agli occhi di chi lo aveva partorito, invece, esso non poteva che apparire come un gioco matematico atto a sistemare alcune ambiguità, su cui ci soffermeremo fra poco, riscontrate nell'uso di autofunzioni in una sola componente. Non c'erano, allora, operazioni analoghe con cui confrontarle, se non il tentativo, operato da C. G. Darwin, di descrivere l'elettrone con una grandezza in due dimensioni, che era trattata però come un vero e proprio vettore. Questa innovazione, insomma, andava confortata da operazioni che la potessero connettere con risultati significativi già noti, come quelli ricavati da Heisenberg e Jordan. Come questi ultimi avevano imposto che le matrici rappresentative del momento di spin soddisfacessero alla medesima algebra delle matrici relative al momento angolare orbitale, così anche Pauli propose che nella sua teoria gli operatori equivalenti alle matrici di Heisenberg e Jordan dovessero soddisfare alle seguenti

proprietà moltiplicative:

$$\left[ \begin{matrix} r & r \\ s & s \end{matrix} \right] = -\frac{\hbar}{i}$$

$$s^2 = (\hbar)^2 s(s+1) \quad s = \frac{1}{2}$$

"dove  $s$  indica una matrice vettoriale di componenti  $s_x, s_y, s_z$ . Per semplificare, quindi, misuriamo  $s$  in unità  $\frac{1}{2}\hbar$  (ossia, si sostituisce  $s$  con  $\frac{1}{2}\hbar s$ ), e scriviamo la equazioni vettoriali in componenti; otteniamo allora

$$s_x s_y - s_y s_x = 2i s_z,$$

, .....

$$s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 3$$

in cui con ..... sono indicate le equazioni che si ottengono da quelle scritte qui per permutazioni cicliche degli indici." (Pauli 1927).

Restava, a questo punto, da studiare l'effetto di questi operatori sulle due funzioni d'onda  $\psi_{\sigma, \pm}$  e  $\psi_{\sigma, \mp}$ :

"Siamo perciò vicini a impostare le trasformazioni lineari di  $\psi_{\sigma, \pm}$  e  $\psi_{\sigma, \mp}$ : sotto l'azione gli operatori  $s_x, s_y, s_z$ , che soddisfano le relazioni (??), e così l'impostazione più semplice possibile è la seguente:

$$s_x(\psi_{\sigma}) = \psi_{\sigma},$$

$$s_y(\psi_{\sigma}) = -i\psi_{\sigma},$$

$$s_z(\psi_{\sigma}) = \psi_{\sigma},$$

$$s_x(\psi_{\sigma}) = \psi_{\sigma};$$

$$s_y(\psi_{\sigma}) = i\psi_{\sigma};$$

$$s_z(\psi_{\sigma}) = -\psi_{\sigma}$$

Queste relazioni si possono anche scrivere nella forma matriciale simbolica:

$$s_x(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \psi;$$

$$s_y(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \psi; \quad s_z(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \psi.$$

L'ultima delle relazioni (??) è chiaramente necessaria dal punto di vista fisico se  $\psi_{\sigma}$  e  $\psi_{\sigma}$  devono indicare l'ampiezza di probabilità che  $s_x$  (espresso in unità  $\frac{1}{2}\hbar$  assuma il valore +1 o -1, dal momento che l'operatore  $s_x$  deve rappresentare semplicemente la moltiplicazione dell'autofunzione per il valore numerico di  $s_x$ " (Pauli 1927).

Sono queste le operazioni dalle quali scaturì l'espressione delle famose matrici di Pauli. E non si può non apprezzare la semplicità e la destrezza con cui fu ricavato il formalismo tuttora adottato per lo spin dell'elettrone. Tuttavia può essere interessante, oltre che per dovere documentario, soffermarsi su alcuni passaggi che precedettero, nel lavoro di Pauli, l'elaborazione appena riportata.

Come accennavo sopra, l'assunto fondamentale da cui scaturì la teoria di Pauli fu proprio quello che voleva che la funzione d'onda dell'elettrone dipendesse da una variabile dinamica in più oltre alle coordinate baricentrali [628]. Il metodo di lavoro di Pauli, inoltre, si basava su una forma di "principio di corrispondenza" secondo il quale ogni variabile dinamica andava espressa, come in meccanica classica, accoppiata ad un'altra variabile che ad essa fosse canonicamente coniugata: l'una sarebbe comparsa come coordinata e l'altra come impulso. Lo spin dell'elettrone, allora, che si sapeva rispondere all'algebra del momento angolare, era interpretato come momento di una coppia canonica, e come sua coordinata Pauli introduceva un angolo. In questo modo la dinamica di un singolo elettrone doveva dipendere da una coppia del tipo  $s_x, \phi$ , dove  $\phi$  stava a indicare l'azimuth di  $s_x$ . La transizione, poi, a una trattazione quantistica avveniva imponendo che la funzione d'onda alla Schroedinger per l'elettrone fosse funzione delle coordinate baricentrali  $\mathbf{r}$  e di  $\phi$ . Pauli, poi, procedeva nell'attribuire al momento angolare di spin le stesse proprietà che era stato possibile ricavare per il momento angolare orbitale o per l'impulso, in quanto coniugati canonicamente ad una coordinata:

"Se in una funzione dinamica qualsiasi compare la coordinata di impulso  $s_x$  coniugata a  $\phi$ , essa sarebbe da sostituire con l'operatore  $\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial \phi}$  da applicare all'autofunzione  $\psi$ , così come la componente di impulso coniugata a  $\mathbf{r}$  per un moto traslatorio è sostituita dall'operatore  $\frac{\hbar}{2m} \nabla_{\mathbf{r}}$ ." (Pauli 1927, pag. 605).

Sappiamo, oggi, che questo procedimento non è corretto. Sappiamo, cioè, che il momento angolare di spin non ammette un analogo classico e che non ammette una descrizione in termini di una coppia canonica: non è possibile, insomma, associare ad esso una coordinata canonicamente coniugata, nè tanto meno rappresentarlo in termini di un operatore derivativo. Tuttavia Pauli stava usando con coerenza una procedura corrispondenziale che mutuava dalla meccanica classica l'utilizzo di coppie canoniche e che, alla luce della teoria quantistica delle trasformazioni, esprimeva l'impulso come derivata rispetto alla coordinata. L'estensione di questa procedura allo spin dell'elettrone era conseguenza del processo, intrapreso da Heisenberg e Jordan, di omologazione del momento di spin al momento angolare orbitale (per il quale, viceversa, esiste un analogo classico ed è possibile fornire una descrizione quantistica che faccia uso di una coppia canonicamente coniugata angolo-momento angolare).

Questa circostanza ci induce a due tipi di considerazioni: la prima concerne lo sviluppo immediatamente successivo a queste imposizioni di Pauli, alla luce del quale esse appaiono, in un certo senso, come un "errore fortunato"; ne sarebbe scaturita, infatti, l'ipotesi di funzioni d'onda a due componenti. L'autore osservava che una funzione d'onda del tipo  $\psi(\mathbf{r}, \phi)$  presentava una difficoltà: volendo interpretare la variabile  $\phi$  come angolo di rotazione, accadeva allora che la funzione d'onda, per rotazioni di  $2\pi$ , non tornava al proprio valore, ma cambiava segno [629]  $\psi(\phi) = \psi(\phi + 2\pi) = -\psi(\phi)$ .

"Col costante progredire di  $\phi$  dal valore 0 fino a  $2\pi$  la funzione  $\psi(\mathbf{r}, \phi)$  non ritorna al suo valore di partenza, ma cambia segno." (Pauli 1927, pag. 605).

Di fatto Pauli stava imbattendosi nell'impossibilità di descrivere l'elettrone con spin in rappresentazione di Schroedinger, ossia in una rappresentazione in termini

di variabili di tipo spaziale. Ma aggirò questo ostacolo pensando di sostituire, secondo un uso ormai consueto, la coordinata  $\mu$  col suo momento coniugato  $\mathcal{S}_z$ . Ecco allora che, potendo tale momento assumere solo due valori,  $\frac{1}{2}\hbar$  e  $-\frac{1}{2}\hbar$  si poteva separare nella funzione d'onda la dipendenza dalle coordinate e dallo spin e giungere all'espressione vista sopra dei cosiddetti "spinori di Pauli".

La seconda considerazione relativa all'"ambiguità" incontrata da Pauli riguarda piuttosto il suo metodo di lavoro: abbiamo già commentato come egli sia stato promotore di un distacco da schemi tipici della meccanica classica, nonché dalle esigenze di visualizzazione contenute nel modello di Uhlenbeck e Goudsmit. Lo spin dell'elettrone compariva così come un grado di libertà in più rappresentato da una nuova variabile; tuttavia la rappresentazione di tale variabile in termini di una coordinata angolare è segno del persistere nel suo lavoro di una certa difficoltà a svincolare l'indagine quantistica da analogie con la meccanica classica.

Prima di concludere, può essere interessante riportare che nello stesso anno Pasqual Jordan, tentando di elaborare una struttura generale per la meccanica quantistica, si imbatté nella difficoltà ad associare allo spin un angolo come coordinata ad esso canonicamente coniugata:

"Per analogie classiche è ovvio considerare come grandezza canonicamente coniugata alla componente  $\mathcal{S}_z$  del momento angolare (di spin) un angolo di rotazione attorno all'asse  $z$ . Secondo la nostra teoria generale [630], però, ciò è impossibile; dal momento che  $\mathcal{S}_z$  può assumere un numero finito di valori, e precisamente due, la necessaria ortogonalità dell'ampiezza corrispondente a  $\mathcal{S}_z$  e al suo ipotetico coniugato può essere ristabilita, allora, solo se anche questa grandezza coniugata ha unicamente due valori (e non tanti e continui)." (Jordan 1927a, pag. 22).

Certo, queste ultime asserzioni non sono corrette. Nonostante ciò possiamo affermare che Jordan fu il primo a riconoscere che lo spin è un'osservabile fisica priva di un analogo classico. A questo proposito possono essere ritenute convincenti le seguenti parole dello stesso Jordan, che argomentò tale caratteristica dello spin in base all'impossibilità fisica di individuare un angolo di rotazione ad esso associato:

"Dobbiamo anche concludere che per l'elettrone non esiste un analogo di tale angolo classico. Infatti non sembra possibile individuare un esperimento attraverso il quale si potrebbe definire empiricamente un tale angolo. Vogliamo porre come punto di partenza delle nostre riflessioni l'assunto che per l'elettrone non si possa misurare alcun'altra grandezza che la componente del momento angolare lungo una direzione a piacere  $z$ ." (Jordan 1927a, pag. 22).

A questo punto possiamo riportare nuovamente l'affermazione di Pauli data diversi anni prima:

"La struttura a doppietto degli spettri alcalini, così come la deviazione dal teorema di Larmor, è dovuta a una particolare "two-valuedness" delle proprietà quantistiche dell'elettrone, che non può essere descritta dal punto di vista classico." (Pauli 1924).

Gli studi eseguiti sullo spin dell'elettrone confermarono, come abbiamo visto, questa intuizione di Pauli; anzi, probabilmente, superarono le sue stesse aspettative.

## Bibliografia

A. Baracca (1986) Early Proposal of an Intrinsic Magnetic Moment of the Electron in Chemistry and Magnetism (1915-1921) before the Papers of Goudsmit and Uhlenbeck. *Rivista di Storia della Scienza*, 3 (3): 353-374.

Born e Jordan (1925) Zur Quantenmechanik. *Zeits. f. Physik*, 34:858.

Born, Heisenberg e Jordan (1925) Zur Quantenmechanik. II. *Zeits. f. Physik*, 35:557.

C.G. Darwin (1927a) The Electron as a Vector Wave. *Proc. Roy. Soc. London*, 116:227. (1927b) Free Motion in the Wave Mechanics. *Proc. Roy. Soc. London*, 117:258.

P.A.M. Dirac (1925) The Fundamental Equations of Quantum Mechanics. *Proc. Roy. Soc. London*, 109:642.

(1926a) Quantum Mechanics and a Preliminary Investigation of the Hydrogen Atom. *Proc. Roy. Soc. London*, 110:561.

(1926b) The Elimination of the Nodes in Quantum Mechanics. *Proc. Roy. Soc. London*, 111:281.

(1926d) On the Theory of Quantum Mechanics. *Proc. Roy. Soc. London*, 112:661.

(1926e) The Physical Interpretation of Quantum Dynamics. *Proc. Roy. Soc. London*, 113:621.

W. Heisenberg (1925) Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehung. *Zeits. f. Physik*, 33:879.

P. Jordan

(1927a) Über eine neue Begründung der Quantenmechanik. II Gasentarung. *Zeits. f. Physik*, 44:1.

(1927b) Zur Quantenmechanik der Gasentarung. *Zeits. f. Physik*, 44:473.

(1927c) Über Wellen und Korpuskeln in der Quantenmechanik. *Zeits. f. Physik*, 45:766.

D. Monti (1996) *Equazione di Dirac*, Bollati Boringhieri, Torino.

W. Pauli

(1924) Über den Einfluss der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Elektronenmasse auf den Zeeman-effekt. *Zeits. f. Physik*, 31:373.

1925) Über den Zusammenhang des Abschlusses Elektronen-gruppen in Atom mit der Komplexstruktur der Felder. *Zeits. f. Physik*, 31:765.

(1927) Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons. *Zeits. f. Physik*, 43:601.

(1955) Exclusion principle, Lorentz Group and Reflection of Space-time and Charge. In W. Pauli con l'assistenza di L. Rosenfeld e V.S. Weisskopf, editors, *Niels Bohr and the Development of Physics*, pag. 30, London Pergamon Press.

(1964) Exclusion Principle and Quantum Mechanics. In R. Kronig e V.S. Weisskopf, editors, *Collected Scientific Papers by Wolfgang Pauli*, pag. 1080, Interscience Publishers, New York - London - Sidney.

H. Reichenberg, J. Mehra (1982) *The Historical Development of Quantum Theory, vol. 4*. Springer Verlag, New York.

N. Robotti (1990) Quantum Numbers and Electron Spin: the History of a Discovery. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 40 (125): 305-331.

F. Rohrlich (1973) The Electron: development of the First Elementary Particle Theory. In Jagdish Mehra, editor, *The Physicist's Conception of Nature in the Twentieth Century*, pag. 16, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland / Boston-U.S.A.

E. C. Stoner (1924) The Distribution of the Electrons among Atomic Levels. *Philosophical Magazine*, 48:719.

L. H. Thomas (1927) The Kinematics of an Electron with an Axis. B.

L. Van der Waerden (1960) Exclusion Principle and Spin. In M. Fierz e V. F. Weisskopf, editors, *Theoretical Physics in the Twentieth Century. A Memorial Volume to Wolfgang Pauli*, pag. 199. Interscience Publishers, New York.

---

[619] Preferisco riportare il termine inglese "two-valuedness" in quanto la sua traduzione letterale, "bivalenza", come sappiamo, è riferita a una proprietà chimica dell'elettrone, non sconnessa, è vero, da quel che si intende per "two-valuedness", ma più specifica.

[620] Si veda (Baracca 1986).

[621] Le affermazioni di cui sopra sono purtroppo vaghe e sbrigative per motivi di spazio: per una trattazione più diffusa si veda (Monti 1996, pag. 76 e segg.).

[622] Si veda in proposito (Robotti 1990).

[623] Sto adottando la notazione originaria.

[624] Valore per il momento angolare di spin, s'intende.

[625] Darwin, infatti, aveva appena osservato che "il calcolo di Schroedinger funziona in maniera assolutamente corretta solo quando non ci sono forze magnetiche." (Darwin 1927a). Non si poteva fare riferimento, quindi, all'equazione di Schroedinger per spiegare la struttura fina, che è un effetto tipicamente magnetico.

[626] In questo senso è quasi superfluo commentare la differenza con i risultati conseguiti da Dirac (Dirac 1928a, 1928b), la cui funzione d'onda a quattro componenti era completamente definita.

[627] Si riferiva a parole scritte da lui stesso nel 1925.

[628] Il fatto che Pauli adottasse l'espressione "coordinate baricentrali" non indica che egli facesse riferimento a un corpo esteso: anzi, dal momento che stava adottando il formalismo ondulatorio di Schroedinger, con questa espressione s'ha da intendere il baricentro di un pacchetto d'onde.

[629] La dipendenza di  $\psi$  dalle sue componenti  $\psi_x$  e  $\psi_y$ , infatti, era stata esplicitata da Pauli in questo modo:

[630] Basata essenzialmente su uno studio delle trasformazioni canoniche quantistiche.