

APPROCCIO FINITISTA A DISTRIBUZIONI CONTINUE IN L.BOLTZMAN

Introduzione

Questo studio intende commentare il metodo presentato da Boltzmann nel 1868 in uno dei primi lavori di meccanica statistica [636], pochi mesi dopo gli articoli di Maxwell sulla distribuzione delle velocità delle molecole di un gas [637], con l'obiettivo di analizzare il percorso seguito dall'autore alla luce di concezioni e metodi che solo oggi la statistica ha sviluppato in piena consapevolezza.

Nella seconda parte del lungo lavoro "Studio sull'equilibrio della forza viva tra punti materiali in movimento", il ventiquatrenne Boltzmann presenta un metodo per derivare la distribuzione delle velocità delle molecole di un gas che, introducendo una suddivisione in classi degli stati delle particelle, permette l'uso di distribuzioni di probabilità discrete (o elementari nel senso di Kolmogorov): considerando i limiti di questa distribuzione in almeno due direzioni il metodo produce esattamente diverse distribuzioni continue

Questa parte delle fondamentali ricerche di Boltzmann solitamente è poco approfondita per il fatto che il metodo utilizzato conduce a risultati non completamente soddisfacenti dal punto di vista fisico. Malgrado ciò, il metodo è degno di grande attenzione perchè permette all'autore di derivare in modo controllato un gran numero di distribuzioni continue.

Si è mantenuto il più possibile la stessa simbologia del lavoro originale ma, nel contempo, si sono evidenziati in linguaggio moderno i passaggi più significativi.

1. Determinazione della distribuzione marginale dell'energia di una molecola.

a. Caso discreto

Boltzmann considera un insieme di n molecole, ciascuna con energia cinetica k_i con $i=1, \dots, n$; sommando le energie cinetiche di ogni molecola si avrà l'energia nx del sistema costituito dalle n molecole, dove x è l'energia media di ogni molecola. Lo studioso vuole calcolare in maniera esatta la probabilità che l'energia di una molecola sia compresa nell'intervallo k e $k+dk$, senza tener conto dell'energia delle rimanenti molecole, vale a dire la distribuzione marginale dell'energia di una molecola. Per ottenere questa probabilità egli suddivide l'intervallo continuo tra il valore minimo di energia 0 e il valore massimo nx , in una infinità p di parti uguali [638] in modo che la descrizione dell'energia di ciascuna molecola si limiti ad indicare l'intervallo cui appartiene. Il vincolo dell'energia totale interviene per fissare le possibilità della prima molecola; poi quelle della seconda, dato lo stato dinamico della prima; poi quelle della terza, dato lo stato dinamico delle altre due e così via. Una descrizione di stato delle n molecole sarà pertanto una sequenza di n intervalli di energia, compatibili con il vincolo e dal numero degli stati possibili per due, per tre e per quattro molecole, si può arrivare alla formula generalizzata per n molecole [639] $\frac{p(p+1)}{2} \frac{p(p+1)(p+2)}{2 \cdot 3}$:

$$\frac{p(p+1)(p+2) \dots (p+n-2)}{(n-1)!}$$

1)

Il ripartire l'energia totale del sistema in intervalli consecutivi, in modo che la classificazione dell'energia di ciascuna molecola risulti così essere discreta, fu indubbiamente un'idea geniale. Per Boltzmann l'energia di ciascuna molecola è ovviamente una quantità continua e le probabilità nel continuo sono difficili da trattare (circa la probabilità nel continuo, nota anche come probabilità

geometrica, basti ricordare i famosi paradossi di Bertrand) e quindi lo studioso, che è un finitista, concepisce il continuo come limite del discreto. Il riferimento all'infinito seguito dall'indicazione del numero delle parti non deve stupire se si tiene conto che i lavori fondamentali sul concetto di numero reale non erano ancora stati scritti e quindi con questi l'attenzione alle questioni fondazionali.

Ma il fatto più originale della questione non è tanto la segmentazione stessa del carattere continuo, che è pratica comune nelle rilevazioni statistiche, quanto la sua utilizzazione in un contesto inferenziale, allo scopo cioè di caratterizzare un'ipotesi nulla, vale a dire la probabilità ipotetica di tutte le descrizioni di stato sugli intervalli compatibili con il vincolo dell'energia totale. Da questa prospettiva non si può certo affermare che il lavoro di Boltzmann sia stato capito.

L'ipotesi nulla è che la probabilità di tutte le descrizioni di stato delle molecole, compatibili con il vincolo, siano equiprobabili. Allora la probabilità di una descrizione di n molecole su p intervalli sarà in generale uguale al reciproco della 1).

Ma Boltzmann è interessato alla probabilità marginale di una molecola, cioè alla distribuzione dell'energia di una singola molecola. Per determinare la probabilità che l'energia di una molecola sia compresa in un intervallo fissato k e k+dk, qualunque siano le energie delle altre molecole, l'autore esprime il generico valore k in funzione della suddivisione in intervalli discreti ponendo $k = \frac{q}{p} \epsilon$ e $k + dk = \frac{q+1}{p} \epsilon$; per q=1 si avrà l'intervallo con energia massima e per q=p l'intervallo con energia minima.

Per n=2, fissato il valore dell'energia della prima molecola, per la seconda vi sarà un solo stato compatibile; per n=3 vi saranno [640] q stati delle due molecole restanti compatibili con il fatto che la prima molecola si trova nel (p-q)-esimo intervallo a partire dal basso; la probabilità marginale diventa quindi:

$$P(q) = \frac{2q}{p(p+1)}$$

Per n=4 gli stati compatibili saranno

[641] $\frac{q(q+1)}{2} \frac{q(q+1)}{2}$; la probabilità marginale diventa allora :

$$P(q) = \frac{3q(q+1)}{p(p+1)(p+2)}$$

2)

La probabilità cercata è quindi espressa come una funzione crescente di q. Per q=1 si avrà il valore minimo di probabilità mentre per q=p si avrà il valore massimo.

b.Limite continuo

Generalizzando a n molecole, facendo tendere all'infinito il loro numero e quindi a zero l'ampiezza degli intervalli di energia, si ottiene, "dimenticando le quantità infinitamente piccole" [642], la formula approssimata :

$$P(q) = \frac{(n-1)q^{n-2}}{p^{n-1}}$$

e passando alla densità, in funzione di k e nx, si ottiene :

$$P(k) = \frac{(n-1)(nx-k)^{n-2}}{nx^{n-1}}$$

che si può riformulare come:

$$p(k) = \frac{n-1}{nX} \left(1 - \frac{k}{nX} \right)^{n-2}$$

3)

Se si introduce la frazione di energia totale che appartiene alla molecola si avrà:

$$p(u) = (n-1)(1-u)^{n-2}$$

$$\text{con } u = \frac{k}{nX} \quad 3)$$

Si è a lungo discusso [643] se questa impostazione di Boltzmann preceda o no la quantizzazione che M. Planck introdurrà all'inizio del nostro secolo o addirittura la scoperta della statistica di Bose. Senza entrare nel merito, mi sembra che utilizzare una partizione finita dell'energia totale del sistema essenzialmente fornisce, a prescindere dal suo significato fisico, un dominio finito alla distribuzione uniforme sull'insieme delle descrizioni di stato inizialmente ammissibili. Si tratta di un modo di intendere l'argomentazione matematica che, nel nostro secolo, assumerà i contorni dell'approccio finitista e intuizionista. In altri termini, l'approccio boltzmanniano alle discipline statistico-probabilistiche è fondato sulla convinzione secondo la quale le densità di probabilità possono essere ottenute come limite di distribuzioni di probabilità dedotte a partire da ipotesi probabilistiche formulate per domini chiaramente definiti, cioè ottenuti combinatoriamente a partire da un numero finito di entità. Un chiaro esempio di questo modo di operare è proprio la deduzione del valore approssimato della probabilità marginale ottenuto facendo tendere a zero l'ampiezza degli intervalli di energia e quindi all'infinito il loro numero.

c. Limite termodinamico

A questo punto l'autore, dopo aver formulato le ipotesi probabilistiche con riferimento ad una popolazione finita, passa all'infinito; si occupa cioè di quel che accade qualora le unità statistiche, le molecole, crescano oltre ogni limite fissato, mantenendo costante l'energia media per molecola.

Nel caso del limite termodinamico cioè per $n \rightarrow \infty$ e $\frac{E}{n} \rightarrow \bar{e}$, la 3) diventa:

$$\frac{n-1}{nX} \left(1 - \frac{k}{nX} \right)^{n-2} = \frac{1}{X} \exp \left(-\frac{k}{X} \right)$$

4)

Si ottiene, come distribuzione marginale dell'energia di una molecola, la distribuzione esponenziale, cioè la ben nota formula [644] $f_2(x) = \frac{1}{\sigma^2} \exp(-x/\sigma^2)$ della distribuzione di Maxwell in due dimensioni; nell'intento di Boltzmann naturalmente si doveva arrivare alla formula in tre dimensioni [645] $f_3(x) = \frac{1}{\sigma^3} \exp(-x/\sigma^3)$.

2. Interpretazione in termini moderni

Nel tentativo di "convincere facilmente" [646] il lettore della formula che si ottiene per calcolare il numero degli stati possibili di n molecole, Boltzmann ricorre all'analisi combinatoria.

Vediamo in particolare il caso di quattro molecole. I casi possibili sono dati da $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$: infatti, se la prima molecola si trova nell'ultimo intervallo $\left[\frac{(n-1)\Delta}{p}, \frac{n\Delta}{p} \right]$ per la seconda e la terza molecola è possibile solo il primo intervallo (lo studioso indica questa situazione come intervalli 11); ovviamente l'energia della quarta molecola è determinata dal vincolo dell'energia totale. Quando la prima molecola si trova nel penultimo intervallo $\left[\frac{(n-2)\Delta}{p}, \frac{(n-1)\Delta}{p} \right]$ ci sono tre casi possibili, più precisamente, la seconda e la terza molecola nel primo intervallo, oppure la seconda nel primo intervallo e la terza nel secondo intervallo e viceversa (intervalli 11, 12, 21). Quando la prima molecola si trova nel terzultimo intervallo $\left[\frac{(n-3)\Delta}{p}, \frac{(n-2)\Delta}{p} \right]$ i casi possibili diventano sei (intervalli 11, 12, 13, 21, 22, 31). Se invece dell'energia della seconda e della terza molecola si considera l'energia della seconda e l'energia complessiva della seconda e della terza, i casi possibili, scrive Boltzmann [647], non sono altro che le coppie con ripetizione di 1, 2, 3, elementi e precisamente: nel primo caso 11; nel secondo caso 11, 12, 22; nel terzo caso 11, 12, 13, 22, 23 e 33.

Boltzmann distribuisce le molecole negli intervalli, compatibilmente con il vincolo. Dato che il vincolo è la somma delle energie, e dato che l'ammontare dell'energia può trasferirsi completamente su ogni molecola, in termini statistici si può pensare l'energia "discretizzata" in elementi, come un carattere quantitativo completamente trasferibile. E' evidente come i p intervalli siano ben rappresentati da p-1 elementi di energia (il primo intervallo sarà rappresentato da 0 elementi, ..., l'ultimo da p-1 elementi). In questo modo, comunque si dispongano gli elementi sulle n molecole, il vincolo dell'energia costante è automaticamente soddisfatto. Lo studioso si occupa della probabilità delle descrizioni di stato [648] delle n molecole compatibili con il vincolo dell'energia totale $\sum_{i=1}^n p_i = 1 = \frac{E}{\bar{e}}$. In questo caso l'energia di ciascuna particella è data dal numero di elementi di energia attribuiti ad ogni molecola p_i e può essere vista come la realizzazione di una variabile aleatoria X con

valori $x_i=0,1,\dots,p-1$. La descrizione di stato per la popolazione delle n molecole sarà del tipo [649] $\mathbf{X}=\{X_1,\dots,X_n\}$.

Si può perciò arrivare allo stesso risultato di Boltzmann considerando la ripartizione tra le n molecole di $p-1$ elementi di energia, ognuno di valore $\epsilon = \frac{\epsilon_j}{p-1}$. In questo caso ci si occupa di tutte le possibili descrizioni di struttura [650] di una

popolazione di $p-1$ unità statistiche relativamente ad un carattere di n modalità (le n molecole considerate), dove $\beta_j = \frac{X_j}{p}$ è il numero delle unità statistiche che hanno l' i -esimo carattere. Infatti le descrizioni di stato relativamente alla popolazione di $p-1$ elementi di energia del è tipo $\mathbf{Y}=\{Y_1,\dots,Y_{p-1}\}$ con $y_i=1,\dots,n$ e quindi, la descrizione di stato delle n molecole \mathbf{X} non è altro che la frequenza \mathbf{Y} dei $p-1$ elementi sulle n molecole.

Il numero di elementi energia per ogni molecola definisce quindi sia lo stato per la popolazione delle molecole che la struttura per la popolazione degli elementi di energia. Come si è visto prima, il numero dei possibili distinti microstati delle molecole in presenza di p elementi di energia è dato da :

$$\frac{p(p+1)(p+2)\dots(p+n-2)}{(n-1)!}$$

Ponendo $p'=p-1$, questo numero si può anche ottenere dalle combinazioni con ripetizione di n elementi di classe p'

$$\binom{p'+n-1}{p'}$$

Nell'ipotesi che tutte le descrizioni di stato delle molecole (e le descrizioni di struttura degli elementi di energia) siano equiprobabili, possiamo indicare con

$$\binom{p'+n-1}{p'}^{-1}$$

5)

sia la distribuzione uniforme sulle descrizioni di stato $\Pr(\mathbf{X})$ di una popolazione di n molecole relativamente ad un carattere di $p'+1=p$ modalità, sia la distribuzione uniforme sulle descrizioni di struttura di una popolazione di $p-1$ unità statistiche relativamente ad un carattere di n modalità. Si può notare che l'individuazione di quest'ultima popolazione fittizia e la scelta di rappresentarla mediante una descrizione di struttura facilita la comprensione dell'operato di Boltzmann e riprende il linguaggio largamente utilizzato nell'approccio alle particelle elementari della moderna meccanica statistica.

La presunta scoperta della distribuzione di Bose Einstein da parte di Boltzmann si basa sul fatto che i p' elementi, la cui distribuzione di frequenza 5) risulta uniforme, sono correlati positivamente esattamente come i bosoni.

a. La distribuzione di Polya multivariata

In definitiva Boltzmann calcola il numero delle descrizioni di stato delle n molecole compatibili con p assegnati elementi di energia e ne definisce con la 5) la probabilità $P(\mathbf{X})$. La 5) è, a sua volta, un caso particolare della distribuzione di Polya multivariata, cioè un modello che, simulando la diffusione di malattie contagiose, tiene conto solo del numero dei contagiati e non anche dell'ordine con cui il contagio si diffonde:

$$\Pr(n; \lambda) = \frac{u!}{\prod_{j=1}^s u_j!} \frac{\prod_{j=1}^s \prod_{i=0}^{u_j-1} (\lambda \alpha_j + i \theta)}{\prod_{j=1}^s (\lambda + i \theta)} = \frac{\prod_{j=1}^s \binom{\lambda \alpha_j + u_j - 1}{u_j}}{\binom{u + \lambda - 1}{u}}$$

$$\text{dove } \sum_{j=1}^s u_j = u, u_j > 0 \text{ intero, } \alpha_j \geq 0 \text{ con } \sum_{j=1}^s \alpha_j = 1, \lambda > 0 \text{ e } \lambda \geq 0.$$

Semplificando al massimo il modello del contagio, potremmo dire che la distribuzione di Polya multivariata descrive l'estrazione di p palline da un'urna in cui sono contenute palline di n diversi colori, facendo seguire all'estrazione di una pallina il suo reimbullamento e l'immissione di un numero a di palline dello stesso colore di quella estratta. a_j rappresenta il numero di palline di colore j presenti all'inizio del processo.

Per $\lambda = a, \alpha_j = 1/a, \theta = 1, u = p-1$, si ottiene la distribuzione uniforme :

$$\Pr(\mathbf{n}) = \binom{p+n-2}{p-1}^{-1}$$

Consideriamo ora la 2) cioè la probabilità marginale di una molecola di aver energia compresa nell' $(s+1)$ -mo intervallo : per Boltzmann l' $(s+1)$ -mo intervallo ha energia compresa tra $\frac{s\epsilon}{p}$ e $\frac{(s+1)\epsilon}{p}$ e quindi in termini della popolazione fittizia di $p-1$ unità statistiche l'intervallo $s+1$ corrisponde all'unità s -ma ($s=p-q$). La 2) può essere scritta come:

$$\frac{\binom{q+n-3}{q-1}}{\binom{p+n-2}{p-1}}$$

6)

Sempre nell'ipotesi di una popolazione fittizia di $(p-1)$ unità statistiche e n modalità, vi è una sola descrizione di struttura per s unità con la stessa modalità, mentre ve ne sono

$\left(\frac{1-s}{1-s} \right)$ per le restanti $q-1=p-1-s$ unità rispetto alle restanti $n-1$ modalità, che sono le combinazioni con ripetizione di $n-1$ elementi di classe $q-1$: $C_1(n-1, q-1)$. In questo caso le

molecole del sistema vengono suddivise in due classi, da una parte la molecola di cui interessa conoscere la distribuzione e dall'altra le restanti. Poichè si considera un carattere con due sole modalità, la β è una distribuzione di Polya bivariata: descrive l'estrazione di $p-1$ palline da un'urna che ne contiene 1 di un colore, che è la prima modalità (cioè la molecola considerata), e le altre $n-1$ di un altro colore, che è la seconda modalità (cioè le restanti molecole), facendo sempre seguire all'estrazione di una pallina il suo reimpastamento e l'immissione di un'altra pallina dello stesso colore di quella estratta.

b.La distribuzione Beta

A questo punto Boltzmann dopo aver formulato le ipotesi probabilistiche con riferimento a una popolazione finita, passa ad una popolazione di elementi di energia infiniti e quindi

si trova la 3) che, espressa in funzione della frazione dell'energia totale, è il differenziale di una funzione del tipo $B(y; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1}$ con

$$0 < y < 1, \quad 0 < \alpha, 0 < \beta, \Gamma(y) = \int_0^1 e^{-y} y^{\alpha-1} dy, \quad \text{cioè}$$

$$B\left(y = \frac{k}{nX}, \alpha = 1, \beta = n - 1\right) = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1)\Gamma(n-1)} (y)^{1-1} (1-y)^{n-2} = (n-1) \left(1 - \frac{k}{nX}\right)^{n-2}$$

con la variabile espressa dalla frazione dell'energia dell'intervallo considerato rispetto al totale, cioè $\frac{k}{nX}$. Questo risultato è esatto per ogni valore di n .

Usualmente si ritiene che questa distribuzione sia stata scoperta in ambiente statistico tra la fine dell'ottocento e i primi anni del novecento. L'utilizzo della densità Beta, che diventa uniforme nel caso in cui $\alpha=\beta=1$, si fa risalire infatti ad un lavoro di Hardy del 1889[651]. Questa stessa distribuzione fu proposta anche da Gini nel 1911[652]: lo statistico italiano la presentò indipendentemente da Hardy come una estensione della densità uniforme.

c.La distribuzione Gamma

La distribuzione che Boltzmann ottiene facendo crescere all'infinito il numero di molecole è una distribuzione Gamma, cioè del tipo:

$$\Gamma(y; \nu, r) = \frac{r^\nu y^{\nu-1} e^{-ry}}{\Gamma(\nu)}$$

con

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty y^{\nu-1} e^{-y} dy.$$

Infatti la 4) non è altro che:

$$\Gamma\left(k; 1, \frac{1}{X}\right) = \frac{1}{X} e^{-\frac{k}{X}}$$

8)

cioè la distribuzione di Maxwell in due dimensioni.

Commento

Come si è visto, Boltzmann, ipotizzando una distribuzione uniforme sulle energie, arriva alla formula della distribuzione delle velocità in due dimensioni invece che alla corretta distribuzione in tre dimensioni. Quando nel 1877 riprende la derivazione della distribuzione di Maxwell lo studioso abbandona il metodo esatto di calcolo per la distribuzione delle possibilità elementari, la marginalizzazione, i limiti termodinamici, per il metodo approssimato del macrostato più probabile. Il procedimento utilizzato da Boltzmann non viene più seguito.

Il metodo presentato, anche se apparentemente non fornisce il risultato esatto, è però di indubbio interesse per l'estrema semplicità dell'applicazione e quindi la facilità di comprensione. È possibile arrivare al risultato corretto impostando diversamente il problema.

Due sono gli errori di Boltzmann: assegnare ad ogni molecola un solo grado di libertà e considerare uniforme la distribuzione delle energie. Se si assume che lo stato di una molecola sia definito dalle tre componenti della velocità e se si assume che tutte le descrizioni di stato delle n molecole permesse dal vincolo siano equiprobabili, allora risulta nel limite continuo una distribuzione $\mathcal{F}\left(\frac{3}{2}, \frac{3n-3}{2}\right)$ che nel limite termodinamico fornisce la $\mathcal{F}\left(\frac{3}{2}, r\right)$ che Boltzmann tanto cerca.

Si può giustificare il fatto che la formula ottenuta da Boltzmann sia la distribuzione delle velocità in due dimensioni, cioè la $\mathcal{F}\left(k; 1, \frac{1}{X}\right)$. Infatti in due dimensioni i gradi di libertà per ogni molecole sono due, con la marginalizzazione si ottiene la $\mathcal{F}\left(\frac{2}{2}, \frac{2n-2}{2}\right)$ che non è altro che la $B(y; 1, n-1)$ cioè proprio la 7).

Si può aggiungere infine che il metodo di Boltzmann è interessante anche per la sua immediata generalizzazione ad un processo statistico dove le modalità del carattere prendono il posto delle molecole e le unità statistiche il posto degli elementi di energia.

Le distribuzioni che si ottengono sono quelle che in massima parte vengono oggi comunemente usate come distribuzioni iniziali bayesiane e, attraverso questo procedimento, mostrano in maniera evidente e chiara le diverse ipotesi su cui vengono costruite. Questo è un preciso passo verso una più corretta utilizzazione di tali distribuzioni nel contesto della statistica inferenziale.

[636] L. Boltzmann, "Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten", 1868, "Wissenschaftliche Abhandlungen, Vol.I, F.Hasenöhr, Ed. Leipzig, Barth, 1909, 49-96.

[637] J.C.Maxwell, "On the Dynamical Theory of Gases", Phil.Mag. vol.xxxv, p.129, Feb.1868 e p.185, Mar.1868.

[638] "in unendlich viele (p) gleiche Teile", Boltzmann 1868, pag.84.

[639] Questa formula non viene scritta espressamente da Boltzmann. Si ricava per induzione dalla conoscenza del numero degli stati di energia possibili: p per $n=2$; p per $n=3$; $2 \cdot 3$ per $n=4$.

[640] Quando l'energia della prima molecola si trova nell'ultimo intervallo ($q=1$) la seconda deve per forza trovarsi nel primo intervallo e così la terza; quando la prima molecola si trova nel penultimo intervallo ($q=2$) i casi possibili sono due dato che la seconda molecola può trovarsi nel primo o nel secondo intervallo: l'energia della terza molecola è determinato in modo univoco dal vincolo dell'energia totale. Se la prima molecola si trova nel generico intervallo ($q=q$) i casi possibili saranno quindi q .

[641] Se l'energia della prima molecola si trova nell'ultimo intervallo ($q=1$), per la seconda e la terza molecola è possibile solo il primo intervallo (lo studioso indica questa situazione come intervalli 11); ovviamente l'energia della quarta molecola è determinata dal vincolo dell'energia totale. Quando la prima molecola si trova nel penultimo intervallo ($q=2$) ci sono tre casi possibili, più precisamente la seconda e la terza molecola nel primo intervallo, oppure la seconda nel primo intervallo e la terza nel secondo intervallo e viceversa (intervalli 11, 12, 21). Quando la prima molecola si trova nel terzultimo intervallo ($q=3$) i casi possibili diventano sei (intervalli 11, 12, 13, 21, 22, 31). Se la prima molecola si trova nel generico intervallo ($q=q$) i casi possibili saranno quindi .

[642] "...und mit Vernachlässigung des unendlich", Boltzmann 1868, pag.85.

[643] Si veda ad esempio: S.Bergia, "Who Discovered the Bose-Einstein Statistics?", in "Symmetries in Physics", M.G.Doncel, A.Hermann, L.Michel, A.Pais Eds., World Scientific, 1988 e ancora: A.Bach, "Boltzmann's Probability Distribution of 1877", Arch. Hist. Exact Sciences 41 (1990), 1- 40, pag.11.

[644] La distribuzione marginale della velocità in due dimensioni : diventa , in funzione dell'energia, .

[645] La distribuzione marginale della velocità in tre dimensioni: diventa, in funzione dell'energia .

[646] "Man überzeugt sich davon leicht" , Boltzmann 1868, pag.84.

[647] "dieselben sind im ersten Falle 11, im Zweiten Falle 11, 12, 22, im dritten aber 11, 12, 13, 22, 23, 33 , also nichts anderes, als die Amben mit Wiederholung aus 1, 2, 3...Elementen", Boltzmann 1868, pag.84.

[648] Per descrizione di stato si intende una congiunzione di enunciati atomici che attribuiscono a ciascuna unità della popolazione la proprietà di cui gode: nel nostro caso a ciascuna particella si attribuisce un valore di energia. Vedi R.Carnap, Logical Foundations of Probability, Chicago, University of Chicago Press, 1950.

[649] Si indica in grassetto una sequenza ordinata dei valori assunti dalle unità statistiche.

[650] Per descrizione di struttura si intende la distribuzione di frequenza delle unità statistiche rispetto alle proprietà o modalità osservate. Vedi R.Carnap (1950).

[651] Per il lavoro di G.F.Hardy del 1889 si veda la "Editorial Note" delle Transactions of the Faculty of Actuaries 8 (1920), 174-182.

[652] C.Gini, "Considerazioni sulle probabilità a posteriori e applicazioni al rapporto dei sessi nelle nascite umane(1911), Metron XV,1-37,1949.