

GEORGE J. STONEY, MAX PLANCK E LE COSTANTI DI NATURA

Introduzione

Nelle diverse ricostruzioni storiche della scoperta del quanto d'azione può essere vista, al tempo stesso, una continuità ed una differenziazione. Il punto di continuità è rappresentato dal problema più spinoso posto da questa vicenda storica: la ricerca del perché Planck, ad un certo punto, per la derivazione della sua legge di distribuzione scelse «la linea di pensiero inaugurata da Boltzmann» e la corrispondente definizione probabilistica di entropia. A questo riguardo non è stata finora proposta alcuna ipotesi interpretativa sostanzialmente diversa da quella di Rosenfeld¹ basata sulla possibilità di derivare, dalla legge semi-empirica data da Planck e che Planck voleva giustificare teoricamente nell'ottobre del 1900², una formula per l'entropia cosiffatta:

$$S = \frac{b}{a} \log \frac{1 + \frac{U^{1+U/bn}}{bn}}{\frac{U}{bn}} + \text{costante}$$

dove U è l'energia del risonatore.

Secondo i vari autori la grande somiglianza formale, oltre che l'eleganza, fra questa formula e la ben nota definizione di Boltzmann ($S = k \log W + \text{cost.}$) avrebbe portato Planck sulla strada giusta. Su questa base interpretativa comune si è poi impiantata una grande varietà di sviluppi. Questo fatto è imputabile in primo luogo alla forte ermeticità, che spesso sfocia in ambiguità, degli scritti planckiani, soprattutto del famoso lavoro del dicembre 1900 e, in secondo luogo, all'alternarsi di due necessità. Chi ha voluto privilegiare l'esigenza di una ricostruzione chiara e scorrevole dal punto di vista logico, come ad esempio Kline³, ha fatto affidamento soprattutto sul ragionamento presentato da Planck nell'articolo pubblicato sugli *Annalen der Physik* nel 1901. Chi invece, come ad esempio Kuhn⁴, ha voluto privilegiare il "contesto della scoperta", considera l'articolo del dicembre 1900 come il vero nucleo problematico e quello del 1901 come una elaborazione da guardare in prospettiva.

Nel lavoro che qui presentiamo è nostra intenzione mostrare che l'ipotesi di Rosenfeld non è affatto l'unica possibile ma che, al contrario, si può ideare una nuova proposta interpretativa che fornisca ragioni sufficienti a spiegare la scelta di Planck per la definizione di Boltzmann e che, allo stesso modo, ci dia una semplice chiave per leggere tutti i testi planckiani appoggiandosi ad una caratteristica peculiare del suo pensiero: l'interesse per l'"universalità". Tenteremo infatti di mostrare che la scelta della definizione boltzmanniana di entropia può esser stata decisa grazie ad appropriate considerazioni sull'esistenza e sulle dimensioni delle "costanti universali" che dovevano necessariamente comparire nella legge di distribuzione.

Tale ipotesi, a nostro avviso, introduce nella visione del programma di ricerca planckiano un elemento di maggiore continuità che sembrava mancare nelle altre ricostruzioni. Tenteremo quindi di mostrare che i problemi connessi alle costanti universali e al loro uso per costruire sistemi di misura naturali erano profondamente legati alla ricerca planckiana sulla radiazione di corpo nero e possono a buon diritto aver esercitato una importante influenza. Allo stesso modo tale linea interpretativa porta altri due vantaggi: in primo luogo permette di non sganciare la pratica scientifica di Planck da quel principio che egli ha sempre riconosciuto come centrale nell'attività dello scienziato: la ricerca di elementi concreti in grado di fornire, all'intero ragionamento teorico, un autentico significato fisico indipendente. In secondo luogo consente di inserire Planck in un

¹ Dipartimento di Filosofia, Università di Genova

² Dipartimento di Fisica, Università di Genova

contesto di ricerca più ampio poiché è possibile individuare, nella fisica di fine Ottocento, un programma “trasversale” di indagine sui sistemi naturali di unità di misura, programma che ha come suo precursore George J. Stoney. Le forti analogie di ragionamento fra Stoney e Planck mostrano quanto fosse consolidata in quest’ultimo la problematica delle costanti universali.

1. Le unità di misura “naturali”

Nel 1862 la British Association for the Advancement of Science⁵ istituiva al suo interno un Comitato con un preciso obiettivo: quello di stabilire l’unità di misura della resistenza elettrica e nello stesso tempo di sceglierne il campione. La soluzione alla fine proposta fu quella di adottare una unità, già introdotta da Weber alcuni anni prima, fondata sulle unità di misura delle grandezze meccaniche di lunghezza [L], massa [M] e tempo [T].

Questa soluzione veniva rimessa in discussione nel 1873 quando veniva costituito un nuovo comitato, del quale faceva parte anche G. J. Stoney, con l’obiettivo allargato di definire, una volta per tutte, il rapporto fra unità elettriche e unità dinamiche⁶. Anche in questo caso ci si orientò verso una soluzione basata sulle unità di misura delle grandezze meccaniche (nella fattispecie metro, secondo e grammo), unitamente al rispetto di una sorta di “*criterio di convenienza*”. Contro una simile indicazione si schierò Stoney. L’obiezione che Stoney muoveva non riguardava la scelta delle grandezze fondamentali, ma la scelta delle loro unità di misura, a suo avviso “arbitraria” in quanto frutto di una scelta contingente. Secondo Stoney, come proponeva nel 1874⁷ era necessario «*guardare alla Natura come realmente è*» individuando in essa “*costanti universal*” e da queste derivare le unità di misura “*naturali*” per la lunghezza, la massa e il tempo.

Fu proprio nel ricercare “costanti universali” che Stoney, attraverso una nuova interpretazione (alla luce della teoria della valenza) delle leggi dell’elettrolisi giunse alla scoperta di una «definita quantità di elettricità», secondo cui gli atomi sembrano combinarsi chimicamente tra di loro. Questa “carica unitaria”, che successivamente Stoney chiamerà “elettrone”, sarà in seguito dotata di massa e diventerà il nostro elettrone⁸. Nel 1874 Stoney comunque per l’“elettrone” otteneva le dimensioni di $[\sqrt{LM}]$ e il valore $e=10^{-20}$ Ampère.

Questa «definita quantità di elettricità» veniva considerata da Stoney una “costante universale” alla stregua delle *due* già note *costanti universali* c (velocità luce nel vuoto, $c=3 \cdot 10^8$ m/s) e G (Costante di Gravitazione Universale, $G=0.6 \cdot 10^{-13}$ m³/gr sec²) e tale da costituire con esse la base di un “*nuovo sistema di unità di misura*”.

Imponendo allora le condizioni: $e=1$, $c=1$, $G=1$, Stoney, attraverso una serie di calcoli che in questa sede non riteniamo opportuno riproporre, otteneva come “unità di misura naturali” per la lunghezza, la massa e il tempo i seguenti valori:

$$l_s = 10^{-37} \text{ metri; } m_s = 10^{-7} \text{ grammi, } t_s = \frac{1}{3} 10^{-45} \text{ secondi.}$$

Così commentava Stoney:

«Questo sembra essere il miglior tentativo che noi possiamo fare per determinare queste importanti unità. Nelle serie a cui esse appartengono, tutte le unità elettrostatiche saranno identiche alle unità elettromagnetiche corrispondenti, tutte le forze della Natura che si sa obbedire alla legge dell’inverso del quadrato della distanza, sia che esse siano dovute alla gravitazione, all’elettricità o al magnetismo, saranno espresse senza coefficienti e il legame chimico, che sembra essere l’unità della Natura concreta, è posto nella sua più adeguata relazione con la fisica».

Il discorso di Stoney sul criterio di “universalità” delle unità di misura rimase comunque isolato fino al 1899, mentre il filone “standard”, capeggiato da Rùcker, Sundell, Mascart, e Borgman, sulla ricerca di unità di misura “*convenienti*” risultò dominante.

2. Un nuovo sistema “naturale”

La prima comparsa del problema delle “unità naturali” in Planck può essere rintracciata nell’ultima delle cinque comunicazioni “Sui processi irreversibili di radiazione”, pubblicata nel 1899⁹ e in cui Planck ricavava per altra via la legge di radiazione per il corpo nero, proposta da Wien tre anni prima¹⁰. Non è nostra intenzione in questa sede entrare nello specifico dei vari passaggi che hanno portato alla formulazione della legge di Wien e tanto meno ricostruire il contesto teorico-sperimentale in cui tale legge si inseriva. Basti qui ricordare che questa legge era espressa come:

$$e d = \frac{C^{-5}}{e^{c'/T}} d \quad [1]$$

dove e rappresentava il potere emissivo a una certa lunghezza d’onda (λ) e C e c' due costanti il cui valore non veniva calcolato da Wien.

Nello stesso anno 1896 F.Paschen¹¹, indipendentemente da Wien e basandosi sui propri dati sperimentali, ricavava una legge simile alla [1], in cui l’esponente di e era lasciato indeterminato e il valore di c' veniva stimato pari a 1,4455 °C cm/ sec.

Nella comunicazione del 1899, di cui si è detto, M.Planck si poneva l’obiettivo di giungere a una derivazione della [1] la più rigorosa possibile dal punto di vista teorico.

I punti di partenza di Planck erano essenzialmente due. Il primo riguardava il fatto che la legge di distribuzione del corpo nero doveva essere una *legge universale* in cui comparivano “*due costanti universali*”. Il secondo riguardava il fatto che le “*due costanti universali*” dovevano essere contenute nell’espressione dell’*entropia* dell’oscillatore che componeva le pareti della cavità.

La prima di queste due assunzioni di Planck può essere collegata al risultato di Kirchhoff del 1860¹², secondo cui il rapporto tra potere emissivo e potere assorbente a una certa lunghezza d’onda (λ) e a una certa temperatura (T) «è indipendente dalla forma e da ulteriori particolarità del corpo». Nel caso del corpo nero ciò implicava, come assumeva Planck, che il potere emissivo fosse una “*funzione universale*” e in quanto tale contenesse soltanto “*costanti universali*”. Una volta ammessa la validità della legge di Wien, queste “*costanti universali*” dovevano allora essere *due*.

Per quanto riguarda la seconda assunzione, essa derivava dal progetto di Planck di ottenere la legge di distribuzione del corpo nero attraverso la massimizzazione dell’entropia della radiazione. Da questo punto di vista allora le “*due costanti universali*” dovevano essere contenute nell’espressione dell’entropia del risonatore.

Per l’entropia (S) di un risonatore di energia U e frequenza ν Planck proponeva pertanto la seguente definizione *ad hoc*:

$$S = - \frac{U}{a} \lg \frac{U}{eb} \quad [2]$$

Con un procedimento che non possiamo seguire qui nel dettaglio, Planck mostrava come, massimizzando questa espressione dell’entropia, si poteva giungere ad una formulazione della legge del corpo nero analoga a quella data da Wien, ossia:

$$e d = \frac{2c^2 b}{5} e^{-\frac{ac}{T}} d \quad [3]$$

dove c rappresentava la velocità della luce e , al posto delle costanti C e c' di Wien venivano introdotte rispettivamente le nuove costanti a e b . Chiaramente si aveva:

$$C = 2c^2 b \quad c' = ac \quad [4]$$

A differenza di Wien, Planck si impegnava sul valore delle due “*costanti universali*” a e b . Introducendo l’espressione [3] nella legge di Stefan-Boltzmann e utilizzando alcuni risultati sperimentali ricavati da Kurlbaum nel 1898 relativi

«all'energia totale dei corpi neri», Planck otteneva per il rapporto b/a^4 il seguente valore:

$$\frac{b}{a^4} = 1.278 \cdot 10^{15} \text{ erg/sec}^3 \text{ } ^\circ\text{C}^4 \quad [5]$$

Utilizzando poi il valore dell'esponente c' presente nella [1] e calcolato da Paschen:

$$c' = ac = 1.4455 \text{ grad } ^\circ\text{C cm} \quad [6]$$

Planck ricavava per le due “*costanti universali*” rispettivamente i valori:

$$a = 0.4818 \cdot 10^{-10} \text{ sec } ^\circ\text{C} \quad b = 6.885 \cdot 10^{-27} \text{ erg sec} \quad [7]$$

Come si può osservare dalla [7], la “*costante universale*” b assumeva nel 1899 lo stesso valore che nel 1900 verrà assunto dalla molto più celebre “*costante universale*” h .

Dopo essere così giunto alla nuova derivazione della legge di Wien e dopo aver esplicitato i valori delle costanti universali che in essa comparivano, Planck concludeva l'articolo del 1899 con un paragrafo dedicato alle “*Unità di misura naturali*”. Così scriveva Planck, quasi in sintonia con le osservazioni avanzate da Stoney venticinque anni prima riguardo allo stesso argomento:

«Tutti i sistemi di misura fisici finora adottati, anche il cosiddetto sistema c.g.s. assoluto, devono la loro origine alla confluenza di circostanze casuali, dal momento che la scelta delle unità (...) è compiuta non in generale, per ogni luogo e per ogni tempo, ma essenzialmente in relazione alle esigenze particolari della nostra cultura sulla Terra. Perciò, ad esempio, le unità di lunghezza e di tempo sono state ricavate dalle attuali dimensioni e dall'attuale moto del nostro pianeta (...). Sarebbe perciò perfettamente immaginabile che a un certo punto, in situazioni mutate, tutti i sistemi di unità di misura finora adottati perdessero, parzialmente o completamente, il loro naturale significato originario» (cfr. rif. 9 pag. 599).

Per ovviare a questo limite, la soluzione proposta da Planck era quella di costruire un nuovo sistema di unità di misura, basato questa volta su grandezze indipendenti da qualsiasi condizione contingente. A questo scopo le costanti a e b erano di importanza fondamentale. Esse infatti, secondo Planck, erano da considerarsi “*costanti universali*” alla stregua delle due costanti universalmente riconosciute c (velocità della luce) e G (costante di gravitazione universale) ed erano tali da poter essere poste, assieme a c e a G , a fondamento di un nuovo sistema “*naturale*” di unità di misura.

Scriveva Planck:

«Non può essere senza interesse notare che con l'aiuto di entrambe le costanti a e b (...) viene data la possibilità di individuare delle nuove unità di lunghezza, di massa, di tempo e di temperatura, le quali, indipendentemente dai particolari corpi o dalle particolari sostanze mantengono necessariamente il loro significato in tutti i tempi e per tutte le culture, persino extra-terrestri o extra-umane e che perciò possono essere considerate come “*unità di misura naturali*”».

A questo punto per Planck risultava semplicissimo costruire questo sistema di unità di misura naturali: bastava «scegliere come “*unità naturali*” quelle unità che facevano sì che ognuna delle quattro costanti universali a , b , c e G assumesse il valore 1».

Attraverso questa via, dopo alcuni facili passaggi matematici, Planck otteneva come “*unità naturali*” le seguenti grandezze:

$$\text{unità di lunghezza} = \sqrt{\frac{bG}{c^3}} = 4.13 \cdot 10^{-33} \text{ cm}$$

$$\text{unità di tempo} = \sqrt{\frac{bc}{G}} = 1.38 \cdot 10^{-43} \text{ sec}$$

$$\text{unità di massa} = \sqrt{\frac{bG}{c^5}} = 5.56 \cdot 10^{-5} \text{ gr}$$

$$\text{unità di temperatura} = a \sqrt{\frac{c^5}{bG}} = 3.5 \cdot 10^{32} \text{ } ^\circ\text{C}$$

Così Planck concludeva:

«Queste grandezze manterranno il loro significato naturale fino a quando resteranno valide la legge di gravitazione, la propagazione della luce nel vuoto e i due principi della teoria del calore e, anche se misurate da intelligenze diverse e con metodi differenti, devono risultare sempre le stesse».

3. Dalle costanti "a" e "b" alle costanti "h" e "k"

A partire dal febbraio del 1900 nuovi dati sperimentali sulla radiazione di corpo nero furono divulgati da Otto Lummer ed Ernst Pringsheim¹³, due sperimentatori di Berlino. Una prima serie di questi dati, relativi a piccole lunghezze d'onda, sembrava confermare in pieno l'andamento della legge di Wien, ma successivamente, all'inizio di ottobre, nuovi esperimenti, estesi a lunghezze d'onda maggiori, mostravano una netta incompatibilità con tale legge. A questo punto, dunque, anche l'intera teoria di Planck risultava insoddisfacente e doveva quindi essere completamente rivista.

Proprio a seguito di questi ultimi dati sperimentali di Lummer e Pringsheim, il 19 ottobre del 1900 Planck presentava alla Società di Fisica Tedesca una breve memoria, nella quale proponeva per la legge di distribuzione una nuova formula, che si discostava da quella precedente ricavata, per il termine (-1) aggiunto al denominatore, ossia:

$$e d = \frac{C^{-5}}{e^{c/T} - 1} d \quad [8]$$

Ora, questa legge era senza dubbio valida dal punto di vista empirico ma mancava totalmente di una qualche giustificazione teorica. Essa, infatti, era stata ottenuta semplicemente interpolando i risultati sperimentali fino a quel momento ottenuti e utilizzando espressioni per l'entropia che lo stesso Planck giudicava «del tutto arbitrarie». Nel dicembre del 1900 Planck presentava alla Società di Fisica Tedesca, un nuovo lavoro (diventato poi famoso), il cui obiettivo era proprio quello di fornire alla nuova legge un fondamento teorico¹⁴ sia attraverso una sua derivazione sia attraverso una stima delle costanti che in essa comparivano. Va osservato comunque che in questo lavoro Planck non specificava la strada seguita per raggiungere questo obiettivo. Scriveva Planck:

«Intanto a me oggi importa non tanto sviluppare qui sistematicamente in tutti i particolari quella deduzione che si appoggia sulle leggi della radiazione elettromagnetica della termodinamica e del calcolo di probabilità quanto piuttosto di esporvi nel modo più chiaro possibile il vero punto centrale di tutta la teoria e ciò può avvenire nel modo migliore col descrivervi qui un nuovo procedimento del tutto elementare col quale, senza sapere alcunché di una formula spettrale o anche di una qualsiasi teoria, è possibile calcolare numericamente la ripartizione di una data quantità di energia nei singoli colori dello spettro normale con l'aiuto di un'unica costante naturale e poi con l'aiuto di una seconda costante anche la temperatura di questa energia radiante. Nel procedimento che esporrò a Voi sembrerà che ci sia qualcosa di arbitrario e complicato ma io qui, come ho detto, non do valore alla prova della necessità e della facile attuabilità pratica ma solo alla chiarezza e univocità delle regole proposte per la soluzione del problema.» (cfr. rif. 14 pag. 55)

Comunque non solo la procedura seguita veniva tralasciata da Planck ma le stesse costanti venivano introdotte *ad hoc* specificandone semplicemente il valore: la «costante naturale» $h=6.55 \cdot 10^{-27}$ erg sec e la «seconda costante» $k=1.346 \cdot 10^{-16}$ erg /°C.

Proprio per questa ermeticità di Planck molti storici della fisica hanno adottato l'interpretazione data da Rosenfeld secondo la quale a monte della scelta della formula dell'entropia «alla Boltzmann» ci sarebbe stato il calcolo dell'entropia presentato nell'introduzione.

Noi preferiamo comunque riferirci a quanto Planck ha realmente scritto e quindi, non potendo utilizzare l'articolo del 1900, ci rifacciamo a quello immediatamente successivo¹⁵ in cui Planck tenta di dare una derivazione alla propria legge di radiazione per il corpo nero.

A monte di questo tentativo di Planck possiamo individuare due assunzioni: la prima, che era stata già adottata nel 1899, riguardava il fatto che la legge cercata doveva essere *universale* e doveva contenere «due costanti universali»; la seconda

assunzione, invece, richiedeva che una di queste “*costanti universali*” dovesse dipendere dimensionalmente dalla temperatura. Questa condizione derivava dal fatto che la nuova legge doveva essere una estensione della legge di Wien che era stata ben corroborata in un regime limitato e di conseguenza, come la legge di Wien, doveva contenere una costante dimensionalmente dipendente dalla temperatura (l’analogo della costante c' di Wien oppure della precedente a di Planck).

Come era successo l’anno precedente, Planck aveva bisogno di una qualche definizione di entropia da cui partire e da cui, attraverso un processo di massimizzazione, arrivare alla legge di distribuzione. A questo punto la scelta di Planck ricadeva sulla definizione probabilistica di entropia data Boltzmann nel 1877, ossia:

$$S = k \log W + \text{cost} \quad [9]$$

in cui W rappresentava la probabilità dello stato termodinamico considerato.

Questa espressione, a differenza della precedente definizione [2] di entropia introdotta e utilizzata da Planck, non era una definizione *ad hoc*, ma si fondava su una precisa interpretazione dell’entropia sviluppata da Boltzmann a partire dai primi anni '70. Inoltre in essa, come esplicitamente richiesto da Planck, compariva una costante (la costante k) che era una “*costante universale*” e di dimensioni tali da contenere proprio la temperatura.

Se si tiene conto delle precedenti considerazioni di Planck sulle costanti universali e sulla conseguente necessità di un sistema di unità di misura naturale questa scelta sull’entropia non appare poi così traumatica come in genere si tende a pensare. La definizione di Boltzmann aveva infatti due pregi: in primo luogo di fornire una dipendenza logaritmica dell’entropia analoga a quella già proposta nel 1899 e che si era dimostrata valida per un ampio intervallo di frequenze, in secondo luogo il merito di fissare a priori una delle costanti “universali” cercate da Planck.

L’applicazione della [9] al caso dell’oscillatore, come è ampiamente riportato nella bibliografia citata in nota, portava alla seguente formula per l’entropia:

$$S = k \left[1 + \frac{U}{h\nu} \log \left(1 + \frac{U}{h\nu} \right) - \frac{U}{h\nu} \log \frac{U}{h\nu} \right] \quad [10]$$

scrivibile anche, nella forma più generale:

$$S = kf \frac{U}{h\nu} \quad [11]$$

dove U ed $h\nu$ rappresentavano rispettivamente l’energia media del risonatore e l’elemento di energia in cui si poteva supporre essere suddivisa l’energia totale di cavità. Attraverso questa via, dunque, la presenza di una delle due “*costanti universali*” di cui Planck era alla ricerca, in particolare di quella dipendente dimensionalmente dalla temperatura, era garantita.

La seconda costante veniva ottenuta da Planck più semplicemente, con brevi considerazioni sulla legge di spostamento di Wien.

Partendo dalla formulazione di tale legge data da Thiesen¹⁵ nel febbraio dello stesso anno 1900, ossia:

$$e^{-d} = T^5 \left(\frac{1}{T} \right) d \quad [12]$$

e passando dalla lunghezza d’onda (λ) alla frequenza (ν) Planck deduceva la seguente espressione generale per l’entropia dell’oscillatore:

$$S = f \frac{U}{h\nu} \quad [13]$$

Così Planck commentava questa nuova espressione:

«L’entropia di un risonatore (...) è funzione di una singola variabile ($U/h\nu$) e contiene, al di fuori di questa, solo costanti universali. Questa è la versione più semplice a me nota della legge di spostamento di Wien» (cfr. rif. 15 pag. 725).

Attraverso questa via, dunque, Planck era riuscito ad ottenere per l’entropia dell’oscillatore due condizioni diverse, date rispettivamente dalle espressioni [13] e [11].

Chiaramente la condizione affinché entrambe le espressioni venissero contemporaneamente rispettate era quella di assumere che $U/h\nu$ fosse proporzionale alla frequenza dell’oscillatore e che tra queste grandezze esistesse una costante di proporzionalità le cui dimensioni erano quelle di un’energia per un tempo.

Questa costante entrava nell'espressione dell'entropia dell'oscillatore e in quanto tale doveva forzatamente essere riconosciuta come "costante universale". Tutto ciò veniva esplicitato da Planck nella celeberrima espressione:

$$= h \quad [14]$$

dove la nuova costante universale veniva indicata con il simbolo "h".

Seguendo il ragionamento già percorso nel 1899 e per mezzo di una serie di calcoli che non possiamo riportare in questa sede Planck perveniva così alla legge di distribuzione ricercata:

$$e d = \frac{8 ch}{5} \frac{1}{e^{ch/kT} - 1} d \quad [15]$$

Al fine di completare la propria derivazione, Planck passava quindi al calcolo delle nuove "costanti universali" h e k. Il procedimento utilizzato è concettualmente simile a quello del 1899, quando le costanti in gioco erano a e b. In primo luogo si introduceva la [15] nell'espressione della legge di Stefan-Boltzmann e si adoperavano i risultati di Kurlbaum del 1898 per determinare il rapporto k^4/h^3 giungendo così al risultato:

$$\frac{k^4}{h^3} = 1.1682 \cdot 10^{15} \text{ erg/sec}^3 \text{ } ^\circ\text{C}^4 \quad [16]$$

In secondo luogo, e questo rappresentava una novità, Planck sfruttava le misure di Lummer e Pringsheim per mT (prodotto fra il massimo della lunghezza d'onda della radiazione e la temperatura) ottenendo per il rapporto h/k un valore pari a:

$$\frac{h}{k} = 4.866 \cdot 10^{-11} \text{ sec } ^\circ\text{C} \quad [17]$$

Combinando i due dati forniti dalla [16] e dalla [17] Planck era in grado di determinare il valore delle due costanti h e k; esse risultavano pari a:

$$h = 6.55 \cdot 10^{-27} \text{ erg sec} \quad [18]$$

$$k = 1.346 \cdot 10^{-16} \text{ erg } / ^\circ\text{C} \quad [19]$$

4. Riunificazione

Attraverso questa nuova deduzione della legge di radiazione del corpo nero, Planck era giunto, analogamente all'analisi condotta nel 1899, alla identificazione di due "costanti universali", h e k.

Che legame sussisteva tra queste due costanti e le costanti a e b precedentemente introdotte? Una risposta al riguardo verrà data da Planck soltanto nel 1902¹⁷, in un articolo pubblicato sugli *Annalen der Physik*.

In questo articolo Planck partiva dalla definizione di entropia data dalla [10], nella quale era stato sostituito con h, ossia:

$$S = k \left[1 + \frac{U}{h} \log \left(1 + \frac{U}{h} \right) - \frac{U}{h} \log \frac{U}{h} \right] \quad [20]$$

Per poter confrontare questa espressione con la precedente definizione di entropia ([2]) che, come si ricorderà, portava alla legge di Wien e di conseguenza era valida soltanto nella zona delle basse frequenze, Planck ne calcolava il limite per $(U/h) \rightarrow 0$, ottenendo:

$$S = - \frac{kU}{h} \lg \frac{U}{eh} \quad [21]$$

Dal confronto di questa nuova espressione con la [2], Planck ricavava tra le quattro costanti a, b, h, k le seguenti corrispondenze:

$$h = b \quad k = \frac{b}{a} \quad [22]$$

Utilizzando i valori di a e b ottenuti nel 1899, Planck calcolava nuovamente, in base alle relazioni [22] i valori delle costanti h e k. Esse risultavano pari a

$$h = 6.885 \cdot 10^{-27} \text{ erg sec} \quad k = 1,429 \cdot 10^{-16} \text{ erg } / ^\circ\text{C}$$

e apparivano in buon accordo con i valori calcolati nel 1900:

$$h = 6.55 \cdot 10^{-27} \text{ erg sec} \quad k = 1.346 \cdot 10^{-16} \text{ erg } / ^\circ\text{C}$$

Come osservava Planck, la piccola divergenza tra i due insiemi di valori poteva essere attribuita «alle deviazioni nelle misure dei diversi sperimentatori» (cfr. rif. 17 pag. 749) e pertanto non inficiava la correttezza del ragionamento seguito. Anzi proprio con questo accordo numerico Planck concludeva e completava il discorso aperto nel 1899, mostrando una continuità di fondo tra le due leggi di distribuzione. Queste due leggi infatti, sebbene ottenute in momenti diversi e con procedure profondamente differenti erano legate da un filo conduttore comune, rappresentato dalla ricerca continua di “*costanti universali*”.

E il problema del “*Sistema di unità di misura naturali*”, che nel 1899 sembrava stare tanto a cuore a Planck? Questo problema veniva ripreso da Planck nel 1906¹⁸, nell’ambito del volume *Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung*, quando ormai la sua teoria aveva acquisito una fisionomia stabile. Addirittura un intero paragrafo (il § 159) veniva dedicato alla questione: “*Le unità di misura naturali*”. In tale paragrafo Planck riproponeva con le stesse motivazioni, addirittura con le *stesse parole*, il sistema di unità di misura avanzato nel 1899, con la differenza che ora la costante *b* era sostituita con *h* e la costante *a* con *k*. Ovviamente le “*unità naturali*” risultavano diverse; esse ora erano:

$$\text{unità di lunghezza} = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 4.03 \cdot 10^{-33} \text{ cm}$$

$$\text{unità di tempo} = \sqrt{\frac{ch}{G}} = 1.34 \cdot 10^{-43} \text{ sec}$$

$$\text{unità di massa} = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} = 5.42 \cdot 10^{-5} \text{ gr}$$

$$\text{unità di temperatura} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{c^3 h}{G}} = 3.63 \cdot 10^{32} \text{ °C}$$

Questo nuovo sistema “*naturale*” verrà riproposto da Planck in tutte le successive edizioni del libro, come a sottolineare l’importanza rivestita, per Planck, dalle “*costanti naturali*”.

Bibliografia

¹ L. Rosenfeld, “La premiere phase de l’evolution de la theorie des quanta”, *Osiris*, 2, 1936, 149-196.

² M. Planck, “Über eine Verbesserung der Wienschen Spektralgleichung”, *Verh. Deusch. physik. Gesell.*, 2, 1900, 687-689 (trad. it. M. Planck, *Scienza, filosofia e religione*, Fabbri, Milano, 1965, 51-54).

³ M. J. Kline, “Max Planck and the Beginnings of Quantum Theory”, *Archive for History of Exact Sciences*, 1, 1962, 459-479; “Thermodynamics and Quanta in Planck’s Work”, *Physics Today*, 19, 11, 1966, 23-32.

⁴ T.S. Kuhn, *Black-body Theory and the Quantum Discontinuity 1894-1912*, Clarendon Press, Oxford, 1978 (trad. it. *Alle origini della fisica contemporanea. La teoria del corpo nero e la discontinuità quantica*, Il Mulino, Bologna, 1981).

⁵ *Report of the British Association, Thirty-two Meeting*, 1862.

⁶ *Report of the British Association, Fourthy-three Meeting*, 1873.

⁷ G. J. Stoney, “On the physical units of Nature”, *Report of the British Association*, Fourthy-four Meeting, 1874, pubblicato in *Philosophical Magazine*, 11, 1881

⁸ N. Robotti, “L’elettrone di Stoney”, *Physis*, 21, 1979, 103-143

⁹ M. Planck, “Über irreversible Strahlungvorgänge. 5. Mitteilung”, *Akademie der Wissenschaft*, 1899, 440-480; *Physikalische Abhandlungen und Vorträge*, Vieweg, Braunschweig, 1958, vol. I, 560-600.

¹⁰ W. Wien, “Über die Energievertheilung im Emissionsspectrum eines schwarzen Körpers”, *Annalen der Physik*, 58, 1896, 662-669.

¹¹ F. Paschen, “Über Gesetzmässigkeiten in den Spectren fester Körper”, *Annalen der Physik*, 58, 1896, 455-492.

¹² G.Kirchhoff, "Über das Verhältnis zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht", *Annalen der Physik*, 109, 1860, 275-301.

¹³ O. Lummer, E. Pringsheim, "Die Vertheilung der Energie im Spectrum des schwarzen Körpers", *Verh d. Deut. Phys. Ges.*, 1, 1899, 23-41.

¹⁴ M. Planck, "Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum", *Verh. Deusch. physik. Gesell.*, 2, 1900, 237-245 (trad. it. M. Planck, *Op. cit.*, 54-61).

¹⁵ M. Planck, "Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum", *Annalen der Physik*, 4, 4, 1901, 553-563; *Physikalische Abhandlungen und Vorträge*, I, 717-727.

¹⁶ M. Thiesen, "Über das Gesetz der schwarzen Strahlung", *Verh. Deusch. physik. Gesell.*, 2, 1900, 65-70.

¹⁷ M. Planck, "Über irreversible Strahlungsvorgänge. Nachtrag", *Annalen der Physik*, 4, 6, 1902, 818-831; *Physikalische Abhandlungen und Vorträge*, I, 744-757.

¹⁸ M. Planck, *Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung*, Barth, Lipsia, 1906.