Vittorio Banfi[1]

METODO ASSIOMATICO DI SIR E. T.WHITTAKER PER LA DEDUZIONE DELLE FORMULE DELLA TRASFORMAZIONE DI LORENTZ

Sir E. T. Whittaker presentò nel 1947 (Tarner Lectures) un metodo per dedurre, in modo assiomatico, le formule di trasformazione di Lorentz della teoria della relatività ristretta. Questo metodo si basa sul seguente *primo assioma*, che è in realtà un risultato sperimantale estremamente generalizzato: ``Qualsiasi velocità finita, quando è sommata alla velocità della luce, fornisce una risultante la cui grandezza è ancora uguale a quella della velocità della luce". Mediante considerazioni puramente logiche ed algebriche E. T. Whittaker giunge facilmente alle formule prima citate (bibl. 1).

2. Teorema della composizione delle velocità

In fisica newtoniana sia S un sistema di coordinate rispetto al quale tre particelle A, B, C si muovono su una retta coincidente (ad esempio) con l'asse x. Detta v_A la velocità di A, v_B la velocità di B e v_C la velocità di C avremo:

$u=v_A-v_C$ =velocità di A rispetto a C
$u=v_C-v_B$ =velocità di C rispetto a B
$u=v_b-v_a$ =velocità di B rispetto a A

Si constata subito che

$$u+v+w=v_A-v_C+v_C-v_B+v_B-v_A=0$$

La (2), valida per la meccanica classica, non lo è per quella relativistica: dimostriamolo. In base al *primo assioma*, supponiamo che v tenda a c; allora u tenderà a $-c$, qualunque valora assuma w. Pertanto la (2) non può più essere considerata valida quando si pongono in essa velocità molto grandi (dell'ordine di quella della luce). In altre parole la (2) è certamente un'approssimazione valida quando tutte le velocità in questione sono piccole al confronto di c. Si deve modificare la (2) in modo che sia applicabile anche con velocità di ogni valore, ad esempio prossime a c.

Supponiamo, seguendo Whittaker, che la (2) sia sostituita dalla seguente

$$g(u,v,w)=0,$$

nella quale occorre esplicitare l'operatore g.

Dovremo poi ammettere che ogni coppia di osservatori assegni lo stesso valore alle loro velocità relative: cioè la velocità di B rispetto ad A sia w, mentre la velocità di A rispetto a B sia $-w$. Inoltre permutando le tre particelle A, B, C g deve essere funzione simmetrica di u, v, w. Finalmente dovremo ammettere che si possa ottenere una soluzione unica quando la (3) è risolta rispetto ad u, oppure v, oppure w. Tutto ciò è logicamente accettabile.

Come conseguenza avremo un legame lineare in queste quantità. Allora $g(u,v,w)=0$ assume la forma

$$l+m(u+v+w)+n(vw+wu+uv)+p(uvw)=0$$

con l, m, n, p costanti da determinare. Per la (1) quando $w=0$, $v=-u$; allora la precedente diventa

$$l-nu^2=0,$$

per ogni valore di u. Deve essere allora:

[1] Centro di Astrodinamica G. Colombo

$l=n=0$

Pertanto la (4) assume la forma:

$m(u+v+w) + puvw=0.$

Nella precedente quando $v=c$, $u=-c$, con qualunque w, si ha

$mw-c^2pw=0$ ossia $m=c^2p$

e la (6) diventa

$u+v+w+uvw/c^2=0.$

La precedente 6 la relazione esatta che corregge la (1), che è approssimata. Infatti ponendovi $v=c$, $u=-c$, con qualsiasi w è soddisfatta. Il termine addizionale uvw/c^2 rende conto della differenza tra fisica classica e relativistica.

Riprendiamo la (7) risolvendola rispetto a v e w; si ha:

$v+w=-u[1+vw/c^2].$

Consideriamo la (8) chiamando $-u$ la risultante di v e w; avremo:

PARADIGMA NEWTONIANO: velocità risultante [secondo la (1)]

$=-u$

PARADIGMA RELATIVISTICO: velocità risultante [secondo la (8)]

$=-u=(v+w)/(1+vw/c^2)$

E' pertanto dimostrato il teorema di addizione relativistica delle velocità.

3. Deduzione della trasformazione di Lorentz

Consideriamo due sistemi SC ed SC' inerziali nella consueta forma della teoria della relatività ristretta. Le coordinate di un evento rispetto ad SC sono ovviamente

$t, x, y, z,$

mentre quelle dello stesso evento rispetto ad SC' sono

$t', x', y', z'.$

Si vuol esprimere t', x', y', z' in funzione di $t, x, y, z,$ quando il sistema inerziale SC' ha una velocità relativa w rispetto a quello SC. In fisica classica vale la trasformazione di Galileo ben nota:

$x'=x-wt \quad t'=t$
$y'=y \quad z'=z.$

Al fine di dedurre la trasformazione di Lorentz, notiamo che il moto di una particella, uniforme e rettilineo rispetto ad SC lo è anche rispetto ad SC'. In altre parole, la trasformazione da t, x a t', x' cambia le rette in rette ed è perciò lineare. Le relazioni devono allora avere la forma:

$x'=Ct+Ex \quad t'=At+Bx$
$y'=y \quad z'=z,$

ove A, B, C, E sono costanti che dipendono solo da w. Allora se u è la velocità rispetto ad SC di una particella, nel punto t, x, y, z, mentre è v rispetto ad SC' si scriverà

$u=dx/dt$
$v=dx'/d\}t'$

Per le (9)

$\mathrm{d}t'= c$
$\mathrm{d}x'= C\mathrm{d}t + E\mathrm{d}x$

e quindi

$v=(C\mathrm{d}t + E\mathrm{d}x)/(A\mathrm{d}t + B\mathrm{d}x)=(C+Eu)/(A+Bu).$

Utilizziamo ora il teorema di cui al paragrafo 2; si avrà manifestamente

$u=(v+w)/(1+vw/c^2),$

ossia anche

$v=(u-w)/(1-vw/c^2).$

Per la (10)

$C/A=-w \qquad E/A\}=1 \qquad B/A= -w/c^2.$

Le (9) diventano

$t'=A(t-\{w/c^2x)$

$x'=A(-wt+x)$

$y'=y$

$z'=z$

Rimane da calcolare A; ricordando che la velocità della luce, che si propaga lungo l'asse x, è un invariante avremo

$x^2-c^2t^2=x'^2-c^2t'^2$

oppure

$t^2-x^2/ c^2=t'^2-x'^2/c^2.$

Supponiamo che in un certo istante $t=0$ e $t'=0$ le due origini O e O' di SC ed SC' coincidano. Successivamente O' si è portato in $x=wt$ rispetto ad SC. Un osservatore in O' misurerà il tempo t' dato, in base alla (12), dalla formula

$t'^2=t^2-w^2t^2/c^2=t^2(1-w^2/c^2).$

Se particolarizziamo le prime delle (11) agli istanti t e t' con gli osservatori (con orologi) in O e O' otterremo

$t'=A(t-w^2t/c^2)=At(1-w^2/c^2).$

che, elevata al quadrato, fornisce

$t'^2=A^2t^2(1-w^2/c^2)^2.$

Per la (13) si deduce

$t'^2=t^2(1-w^2/c^2) =A^2t^2(1-w^2/c^2)^2,$

ossia

$A=1/(1-w^2/c^2)^{1/2}.$

Sostituendo la (15) nelle (11) si ricavano le formule

$t'=(t-wx/c^2)/(1-w^2/c^2)^{1/2}$

$x'=(x-wt)/(1-w^2/ c^2)^{1/2}$

$y'=y$

$z'=z,$

ossia quelle delle trasformazioni di Lorentz.

4. Considerazioni conclusive anche alla luce dell'epistolario Einstein--Born

E' stato qui riportato il metodo assiomatico di E. T. Whittaker e ne sono state poste in evidenza la semplicità e l'eleganza. Queste idee dell'autore erano in parte presenti nel testo ``History of the Theory of the Ether''. Da esaminare con interesse sono una lettera di M. Born e la relativa risposta di A. Einstein, contenute nell'epistolario ``Briefwechsel 1916--1955'' (tradotto e pubblicato in italiano, vedi bibli. 2). Ecco il brano della lettera di M. Born.

Edimburgo 26.9.53
84, Grange Loan

Caro Einstein
molto spesso sento il bisogno di scriverti, ma me ne astengo per evitarti il fastidio di rispondermi. Oggi però ho un motivo preciso per farlo, ed è il seguente. Il vecchio matematico Whittaker, professore emerito qui ad Edimburgo e mio buon amico, ha preparato una nuova edizione del suo vecchio libro *History of the Theory of the Ether*, della quale è già uscito il secondo volume. Esso contiene tra l'altro una storia della relatività in cui stranamente questa scoperta viene attribuita a Lorentz e Poincaré, mentre i tuoi lavori sono messi in secondo piano. Sebbene il libro sia pubblicato a Edimburgo, non credo davvero che tu possa pensare che dietro questa faccenda ci sia io. In realtà, da tre anni a questa parte ho fatto tutto il possibile per distogliere Whittaker da quest'impresa, che egli vagheggiava già da tempo e della quale amava parlare. Ho riletto i vecchi lavori originali (in particolare alcuni saggi minori di Poincaré) e ho procurato a Whittaker le traduzioni dei testi tedeschi: ad esempio gli ho tradotto in inglese, con l'aiuto del mio assistente Dottor Schlapp, molte pagine dell'articolo di Pauli nell'*Enzyklopädie*, per aiutarlo a formarsi un'opinione. Ma tutto è stato inutile: egli insiste sul fatto che la parte essenziale della teoria era già presente in Poincaré e che Lorentz ne aveva ben chiara in mente l'interpretazione fisica. Ora io ricordo bene quanto fosse scettico Lorentz e quanto ci sia voluto perché diventasse un ``relativista''; ho raccontato tutto ciò a Whittaker, ma senza risultato. Sono inquieto per questa faccenda, perchè egli è un'autorità nel mondo scientifico anglosassone e molti gli crederanno.

e quello della relativa risposta
12.10.53

Caro Born
non darti pensiero del libro del tuo amico. Ognuno si comporta come gli sembra giusto, oppure - detto in forma deterministica come può. Se riesce a convincere gli altri, questo è affar loro. Da parte mia ho certamente trovato soddisfazione nelle mie fatiche, ma non mi sembra giudizioso voler difendere la

``proprietà" di certi miei risultati come un vecchio avaro difenderebbe i quattro soldi faticosamente racimolati. Non ho nulla contro Whittaker e tanto meno, naturalmente, contro di te.

Questo scambio di lettere è importante per due aspetti. Il primo riguarda il dibattito storico sulla fondazione dei principi della teoria della relatività, come si è sviluppato sino a circa metà del XX secolo. Il secondo riguarda più gli aspetti umani e spirituali di A. Einstein.

BIBLIOGRAFIA

1. E. T. WHITTAKER. ``From Euclid to Eddington", Dover Publications, Inc. New York (1958).

2. A. EINSTEIN, H. e M. BORN, ``Scienza e vita", Lettere 1016-1955, Einaudi, Torino (1973).