Antonino Drago[1]

LA NASCITA DEL PRINCIPIO D'INERZIA IN CAVALIERI E TORRICELLI SECONDO LA MATEMATICA ELEMENTARE DI WEYL

1. Introduzione

Nell'opinione comune degli storici il principio d'inerzia (=**PIZ**) segna lo spartiacque tra la fisica moderna e la fisica dell'antichità: il principio fu inventato da Cartesio ed è scritto in *Le Monde*, pubblicato nel 1644. Per lui era l'espressione dell'intervento iniziale di Dio sul mondo, tale da mantenere delle quantità conservate in eterno. Per Newton invece il PIZ è espressione di una mancanza di forze. Ricordo la versione di Newton del PIZ: "Corpus omne perseverare in statu suo quiesciendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare."[2]

E' noto però che nella versione di Newton il PIZ esprime l'infinito in atto almeno nei seguenti aspetti: nella lunghezza del percorso considerato, nella precisione assoluta delle misure sia della velocità del corpo (nella direzione e nella grandezza), sia della forza-causa nulla.[3] Newton, in effetti, non ebbe indecisioni; discutendo il suo metodo solo per accenni, ha scelto l'infinito in atto non solo nella fisica del PIZ, ma anche nella sua matematica.[4] Pertanto questa proposizione iniziale è molto impegnativa per la teoria fisica, la quale ha sempre preteso, e tanto più al tempo della sua nascita davanti agli aristotelici, di essere strettamente sperimentale, senza ricorso alla metafisica dei filosofi.

Newton attribuì la nascita di questo principio a Galilei: che invece, a detta degli storici, lo avrebbe enunciato in forme parziali e anche devianti (avrebbe affermato la perpetuità del moto circolare attorno alla Terra).

Molti storici hanno studiato il problema della nascita del PIZ. Lo studio più famoso è quello di Koyré. Secondo il suo punto di vista generale, la scienza moderna è nata perché ha introdotto in maniera essenziale il concetto di infinito a fondamento della teoria. E per di più questo concetto è duplice, l'infinito solo potenziale (quello che è sempre più approssimabile) e l'infinito in atto (quello idealizzato come compiuto, che l'uomo non ha mai sperimentato e mai sperimenterà). La sua analisi può essere sintetizzata con le due frasi lapidarie da lui usate per concludere il suo studio su "Galilei e la legge d'inerzia": "Galilei studia il reale con l'ideale,.... Cartesio e Newton... con l'impossibile. Galilei... non lo fa."[5]

Però tutta la interpretazione è stata accusata di essere idealistica perché Koyré non ha avuto quell'atteggiamento cautelativo che è tipico del positivismo verso le idee generali (come infinito, spazio, ecc.). Pertanto tutta la storiografia di Koyré è rimasta *sub judice.* Tanto più dopo che il libro di Kuhn ha avuto così tanto successo,[6] riproponendo una storiografia che pretende di basarsi su idee solamente sociologiche o psicologiche, cioé senza idee filosofiche, come è sembrata l'idea di infinito nella scienza, proposta da Koyré.

---

[1] Gruppo di Storia della Fisica - Dip. Sci. Fis. - Università "Federico II" Napoli - adrago@na.infn.it

[2] I. Newton: **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica**, London, 1687, p. 12.

[3] N.R. Hanson: "Newton's first Law: A philosopher's door in natural philosophy", in R.G. Colodny (ed.): **Beyond the Egde of Certainty**, Prentice-Hall, Englewood, 1965, 6-28.

[4] A. Drago: "A Characterization of Newtonian Paradigm", in P.B. Scheurer, G. Debrock (eds.): **Newton's Scientific and Philosophical Legacy**, Kluwer Acad. P., 1988, 239-252.

[5] A. Koyré: **Études Galiléennes**, Hermann, Paris, 1966, p. 276.

[6] T.S. Kuhn: **La struttura delle rivoluzioni scientifiche**, (1962) Einaudi, Torino, 1969.

Di fatto però non ci sono stati altri storici rilevanti che non abbiano abbandonato le posizioni strettamente positiviste; inoltre il problema di interpretare la nascita del PIZ è rimasto un problema aperto.[7]

Qui si vuole presentare una nuova interpretazione ottenuta studiando il rapporto fisica-matematica. Tutti sono disposti a concedere che esso è fondamentale per la teoria, ma di fatto nessuno storico lo mette in conto; eccetto appunto Koyré: "E tuttavia non è a torto che la tradizione storica ha visto in Galilei il padre della scienza classica: è per la prima volta che nella storia del pensiero umano si realizza l'idea della fisica matematica...; la costituzione di una scienza fisica... presuppone di aver prima risolto il problema - filosofico - della natura e della struttura di questa scienza [astronomica]. Il che vuol dire, *in concreto*, che si tratta di sapere qual'è il ruolo delle matematiche nella costituzione della scienza del reale."[8]

Però Koyré ha studiato l'argomento in maniera intuitiva e/o filosofica. Il mio vantaggio è quello di utilizzare recenti studi sui fondamenti della matematica che hanno messo in luce un pluralismo di matematiche; queste sono essenzialmente diverse sulla base del loro uso dell'infinito, o solo quello potenziale o anche l'infinito in atto (a vari gradi). Quindi il loro nucleo è sostanzialmente uguale, ma sono differenti nei rispettivi metodi e risultati, in maniera qualitativamente molto rilevante; e, di conseguenza, ognuna di esse suggerisce tecniche matematiche, concetti, ipotesi e principi fisici differenti da quelli di un'altra matematica.[9] Cosicché la distinzione filosofica di Koyré è diventata formale. Di conseguenza, anche la interpretazione storica di una teoria fisica può tener conto di queste differenze: esse sono riconoscibili nella struttura della teoria, non solo in termini intuitivi-filosofici, ma in precisi termini formali appartenenti ad un particolare tipo di matematica.

In precedenti lavori storici ho già applicato queste differenze tra le matematiche; ma separando le varie matematiche secondo una partizione grossolana: la dicotomia tra la matematica che è senza l'infinito in atto (una sola matematica, la cosiddetta "costruttiva") e tutte le altre matematiche che hanno l'infinito in atto (tra le quali, quella usuale, detta "rigorosa"). Ne ho ricavato una nuova visione storica della evoluzione delle teorie fisiche e anche nuove interpretazioni di casi storici particolarmente difficili (grazie al fatto che le precise differenze matematiche rivelano aspetti finora ignorati o chiariscono aspetti fino ad ora giudicati filosofici).[10]

In particolare, ho rivalutato la versione del PIZ di Lazare Carnot come l'unica che è esprimibile in matematica costruttiva.[11] Allora è apparso evidente quel problema che solo qualcuno aveva sollevato: la esatta definizione del problema storico indagato e cioé la definizione di ciò che si cerca in Galilei.[12] Infatti i

---

[7] Si veda la polemica suscitata, non troppo tempo fa, da D. Shapere: **Galileo, A philosophical study**, U. Chicago P., Chicago, 1974; tra le risposte segnalo quella di M. Finocchiaro in *Brit. J. Phil. Sci.*, **26** (1975), 255-264.

[8] A. Koyré: op. cit., p. 277.

[9] La novità principale è quella della matematica costruttiva. E. Bishop: **Foundations of Constructive Mathematics**, Mc Graw-Hill, New York, 1967. Per una introduzione elementare, si può vedere: A. Drago, G.A. Gerla: " Le implicazioni didattiche del contrasto tra matematica classica e matematica costruttiva", *Periodico di Matematiche,* **57** (1981), 76-95.

[10] A. Drago: " Storia delle teorie fisiche secondo le loro due scelte fondamentali: la matematica e l'organizzazione della teoria", in S. D'Agostino, S. Petruccioli (eds.): **Atti V Congr. Naz. St. Fisica**, Accademia dei XL, Roma (1984), 365-373. A. Drago: "The choice of the kind of mathematics in historiography: The case-study of S. Carnot", in L. Kovacs (ed.): **History of Science in Teaching Physics**, Studia Physica Savariensia, Szombathély, 1995, 102-112.

[11] A. Coppola, A. Drago: "La storia delle formulazioni dei principi della meccanica classica alla luce della matematica costruttiva", P. Tucci (ed.): **Atti IV Congr. Naz. St. Fisica**, Como, 1983, 122-127; "Galilei ha inventato il principio d'inerzia? Proposta di una nuova interpretazione della sua opera", in S. D'Agostino, S. Petruccioli (eds.): **Atti V Congr. Naz. St. Fisica**, Accademia dei XL, Roma (1984), 319-327.

[12] J.A. Coffa: "Galileo's concept of inertia", *Physis*, **10** (1968) 1-21; E. Bellone: "L'inerzia e il metodo", *Scientia*, **118** (1982) 313-326.

precedenti storici hanno indagato se in Galilei c'è qualcosa di generico, che si può indicare come l'intuizione, lo spunto, l'anticipazione di quello di Newton; dando però per scontato che il PIZ non abbia altre possibili versioni.

Qui affinerò la partizione delle varie matematiche, passando da due a tre classi: dalle matematiche con l'infinito in atto separerò quella che Weyl propose nel 1918, per restare più adeguato alle necessità della fisica e che perciò è più limitata di quella usuale. Il suo infinito in atto è risultato essere alla minima potenza.[13] Perciò con questa triplice partizione delle matematiche potrò esaminare più in dettaglio il processo storico che, a partire da concetti e tecniche solo operative e matematicamente costruttive, ha introdotto l'infinito in atto in fisica teorica. Lo farò attraverso quell'evento cruciale per la nascita della scienza moderna che è il PIZ.[14]

Dimostrerò che le soluzioni di Cavalieri e di Torricelli sono ambedue anticipazioni della "matematica elementare" di Weyl, ottenute riportando nella fisica teorica il metodo degli indivisibili secondo due modalità differenti. Siccome Galilei non ha accettato questo metodo ed è rimasto all'interno di una fisica sostanzialmente operativa, gli dedicherò i paragrafi 2 e 3, sia per precisare il punto di partenza storico dei due suddetti teorici sia per far notare il guadagno teorico che si ottiene introducendo la matematica di Weyl nell'analisi storica del PIZ.

Inoltre le due versioni del PIZ risultano precedenti a quella di Cartesio: per cui nasce una questione di priorità, di non secondaria importanza. Infine, otterrò la rivalutazione della storiografia di Koyré, il quale, pur compiendo un lavoro letterario di interpretazione ermeneutica dei testi scientifici, ha avvicinato molto bene il risultato qui ottenuto.

La lettura del seguito non richiederà nozioni specifiche di matematica costruttiva o di matematica di Weyl oltre quelle che verranno spiegate volta a volta; nè il metodo di indagine ricorrerà a formalismi particolari.

2. Le idee di Galilei e il principio d'inerzia

Per chiarire il problema poniamo il termine dal quale si parte usualmente, il grande contributo di Galilei. Esso è autorevole sia perché Galilei iniziò il nuovo metodo scientifico, sia perché diede un suo contributo specifico al problema dell'inerzia. Inoltre ricordiamo che sia Cavalieri che Torricelli furono discepoli di Galilei e restarono in relazione continua con il maestro finché egli fu in vita (1642), morendo anche essi inopinatamente anche essi poco dopo (1647).

Galilei, si ricordi, non aveva leggi matematiche affidabili in astronomia, là dove c'era la più grande tradizione scientifica; d'altra parte nella teoria più recente, quella del moto, egli aveva cumulato solo le leggi del moto di corpi soggetti alla gravità (anche in maniera parziale: piano inclinato, pendolo, ecc.); il che è molto poco per generalizzare ad altre situazioni o per abbozzare una teoria sistematica.[15] Nonostante ciò egli si è sforzato di giungere ad affermazioni generali, di principio.

---

[13] H. Weyl: **Il continuo** (1918), Bibliopolis, Napoli, 1978. A. Mostowsky: "On various degrees of Constructivism", in A. Heyting (ed.): **Constructivity in Mathematics**, North-Holland, 1959, 178-194, p. 183-4.

[14] Ho già studiato la prima introduzione dell'infinito in atto nella storia della matematica: "Misurazioni fisiche, geometria e infiniti nel pensiero di Torricelli", in A. Finelli, G. Medri (eds.): **La misura delle grandezze fisiche**, Soc. Scienze e Lett., Faenza, 1997, 217-232; "New Interpretation of Cavalieri's and Torricelli's method of indivisibles", in J. Folta (ed.): **Science and Technology in Rudolfinian Time**, in Nat. Techn. Museum, Praha, 1997 (150-167); "L'intuizione geometrica come chiave di volta della scienza moderna: Cavalieri e la matematica di Weyl", in B. D'Amore e C. Pellegrino (eds.): **Conv. per i 65 anni di F. Speranza**, Pitagora, Bologna, 1997, p. 40-44. Rimando a questi scritti il lettore desideroso di maggiori particolari matematici su quanto dirò in seguito.

[15] "... la nuova scienza non poteva contare su un sistema definito di principi, ma doveva, per così dire, costruirseli, in un paziente e complesso processo metodico di risoluzione dell'esperienza". A. Banfi in G. Galilei: **Antologia**, La Nuova Italia, Firenze, 1940, p. 32. Cfr. anche L. Geymonat: **Galileo Galilei**, Einaudi, 1957, pp. 233-234.

A proposito del PIZ, notiamo che Galilei illustra la esperienza (frequentemente citata) del doppio piano inclinato (con un piano ad inclinazione variabile che, se abbassato fino all'orizzontale, farebbe andare fino all'infinito un corpo che inizia a cadere dall'altro lato); ma subito dopo egli dice che questa è una approssimazione archimedea, con tutto l'infido che lasciavano le dimostrazioni per esaustione di Archimede.

Egli dice che se un proiettile di cannone in moto non fosse deviato dalla gravità andrebbe in moto rettilineo infinito (ma curvando sulla superfice terrestre; *Dialogo VII*, 173, 218, 220, 225; *Discorsi, VIII*, 215, 236) "...lungo un piano orizzontale il moto è uniforme poiché non subisce né accelerazione né ritardo..." e "... ogni velocità, una volta impressa ad un corpo in moto, sarà strettamente mantenuta fino a che le cause esterne dell'accelerazione o del ritardo siano rimosse, una condizione che è data (sperimentalmente) solo sul piano orizzontale...". Se questa velocità agisse da sola "porterebbe il corpo a velocità costante all'infinito..." Ma egli aggiunge che tutto questo è valido solo sulla superfice terrestre (*Discorsi VIII*, 215, 274, (III Giornata) *Dialogo VII*, 52-3).

Inoltre egli compone bene i moti (cosa rivoluzionaria concettualmente per la fisica precedente, che invece vedeva una competizione tra i moti da comporre; *Dialogo VII*, 173, 191, 254). Ma nell'astronomia egli è contrario a pensare ad un moto rettilineo infinito, perché altrimenti ci sarebbe disordine nell'universo. p. 43 e in margine, p. 53 in margine e p. 56).

3. Il principio d'inerzia, Galilei e gli storici

Gli storici sostengono inoltre che il risultato decisivo per arrivare al PIZ fu quello di concepire il moto come *stato*; e su questo terreno hanno trovato Galilei incerto.[16] E' chiaro che concepire il moto come stato implica saperlo caratterizzare da $-\infty$ a $+\infty$; ovvero, indifferentemente per un istante come per tutto il tratto del percorso; cioé implica l'infinito in atto nel tempo e nello spazio, le due grandezze coinvolte dal movimento.

Inoltre gli storici confrontano le affermazioni di Galilei non tanto con quelle di Cartesio, che ne fa una questione di metafisica, ma giustamente con quelle di Newton; le quali, inserite in una teoria scientifica sistematica, organizzata deduttivamente da alcuni precisi principi, costituiscono il termine finale della tradizionale evoluzione storica del PIZ.

Shea suggerisce i seguenti passi come fondamentali nell'evoluzione del PIZ da Galilei a Newton: l'inerzia

i) viene riconosciuta come principio fondamentale

ii) implica la rettilineità

iii) viene generalizzata dal moto terrestre ad ogni altro moto

iv) è associata alla massa come quantità di materia.

I primi tre passaggi sono di Cartesio, il quarto è di Newton.[17] E' essenzialmente in base agli ultimi tre punti che Koyré esclude il PIZ in Galilei; questi avrebbe rifiutato di concepire lo spazio come essenzialmente infinito, con tutto ciò che ne consegue, compresi percorsi infiniti rettilinei; e non avrebbe distinto massa da gravità (la gravità apparterrebbe al concetto stesso di corpo, cosicché l'astrarre da essa annullerebbe il corpo).

Ora, a parte il primo punto, sul quale torneremo più avanti, *tutti gli altri coinvolgono l'infinito in atto*. Infatti, il secondo significa aver affinato a tal punto le nostre misure da saper distinguere la rettilineità da un moto circolare con raggio molto grande; in effetti, Galilei sa distinguere le due situazioni ogni volta che parla di moto su un piano orizzontale, ma tende a confonderle. Inoltre il terzo punto, generalizzazione dal moto terrestre ad ogni moto celeste, significa andare al di là della sperimentabilità ripetitiva.[18] Infine il quarto passaggio, associazione

---

[16] A. Koyré: "Galilée et Platon", in: **Études d'Histoire de la Pensée Scientifique**, Gallimard, 1966, 166-195 dice che il PIZ comporta a) l'isolamento del corpo (cioé f=0), b) spazio omogeneo ed infinito, c) quiete e moto concepiti come stati.

[17] W.R. Shea: "Introduction" a W.R. Shea (ed.): **Nature Mathematised**, Reidel, Boston, 1983, 1983, p. 7.

[18] E' per questa mancata generalizzazione che molti storici non gli riconoscono la paternità del PIZ. S. Drake parla in proposito di "abortive scientific revolution".

dell'inerzia alla massa, significa, secondo la famosa discussione di Mach sull'inerzia,[19] restringere in una caratteristica individuale del corpo tutta la sua interazione con l'universo. Come si vede, questi punti sono estrapolazioni e generalizzazioni che possiamo anche ritenere che Galilei, ovemai le avesse pensate, fece bene a non proporre, perché illazioni non sostenute da dati di fatto.

Questo rapporto del PIZ di Newton con l'infinito in atto viene indicato anche dal fatto che esso si inserisce in modo coerente nelle *altre idealizzazioni* che Newton ha presentato come basilari per la sua teoria meccanica (senza quelle idealizzazioni, egli avrebbe dovuto parlare di sistemi di riferimento e di reazioni vincolari, coinvolgendosi in complicati problemi fondazionali):

a) spazio assoluto
b) tempo assoluto
c) corpi puntiformi
d) infinita divisibilità dello spazio e del tempo (applicabilità del calcolo infinitesimale a tutto il mondo fisico).

Ora, Newton stesso dichiara che a) e b) sono idealizzazioni metafisiche rispetto alle operazioni matematiche e fisiche.[20] Inoltre nella fisica sperimentale c) vale solo come processo di approssimazione; e così è anche nella matematica costruttiva. Infine, d) vale come operazione potenziale (così come è nella matematica costruttiva) e non come operazione ottenuta, così come è considerata dall'analisi di Newton; il quale, col suo calcolo infinitesimale addirittura introdusse di fatto gli iperreali dell'analisi non standard, una matematica che è ancora più potente della matematica rigorosa. Ancora una volta Galilei fece bene, dal punto di vista sperimentale e della matematica costruttiva, a non anticipare queste idealizzazioni di Newton; le quali poi comportarono senza problemi un moto *perpetuo* uniforme, inteso come moto "naturale", tale da non richiedere spiegazioni.

Infine c'è da aggiungere che Newton introdusse sin dal primo principio il *concetto di forza*; concetto che Leibniz, D'Alembert, Lagrange e tanti altri non esitarono a definire "metafisico", perché essenzialmente legato al concetto non fisico di causa. Galilei non volle mai utilizzare questo concetto (anche se talvolta discusse delle cause dei fenomeni).

In conclusione, il contrasto di impostazioni metodologiche tra i grandi fisici del '600 che pensavano il PIZ non può essere considerato in termini di un progresso unilineare, che sarebbe schematizzabile con una fase pre-newtoniana e una fase post-newtoniana; per cui Galilei sarebbe stato l'arretrato e Newton l'avanzato; poiché quel contrasto di impostazioni riguarda il rapporto con la matematica, che oggi sappiamo essere plurimo. Si tratta invece di indagare su quel contrasto. Sotto questa luce, l'atteggiamento di Galilei non fu di rifiuto retrogrado o espressione di una incapacità; ma può essere ben interpretato come la scelta di restare operativo e matematicamente costruttivo anche nei principi.

Già alcuni storici del PIZ si sono resi conto intuitivamente di questo pluralismo. Enriques e de Santillana e poi Geymonat[21] hanno sostenuto che in Galilei il PIZ c'è, "ma non come principio astratto". Enriques e de Santillana sostengono che tutte "le leggi (galileiane) della caduta dei gravi... esprimono di fatto le leggi generali del moto, sia pur enunciate per un particolare campo di forze" (quello della superfice terrestre).[22] Anche Drake, che ha compiuto un lungo studio sui manoscritti inediti di Galilei, afferma: "La legge di inerzia ristretta di Galilei, relativa a corpi pesanti sulla superfice terrestre, era, in un certo senso, tutto quello che era necessario o giustificabile nella fisica fino al tempo in cui Newton scoprì la legge della gravitazione universale. Ogni speculazione da parte di Galileo sul comportamento dei corpi nello spazio interstellare, al suo tempo sarebbe stata essenzialmente metafisica."[23]

---

[19] E. Mach: **La meccanica nel suo sviluppo storico-critico**, (1883) Boringhieri, Torino, 1963, 2.5.

[20] I. Newton: op. cit., p. 5.

[21] F. Enriques: "Introduzione" a G. Galilei: **Dialogo sui due massimi sistemi**, Sandron, Roma, 1945, p. 17; L. Geymonat: op. cit., p. 218-219.

[22] F. Enriques, G. de Santillana: **Compendio di Storia del pensiero scientifico**, Zanichelli, 1936, p. 341.

[23] S. Drake: "Galileo and the law of inertia", *Am. J. Phys.*, **32** (1964) 601-608, p. 608. Forse in conseguenza delle critiche che ha subito da parte di P. J. Losee: "The law of inertia", *Am. J. Phys.*, **34** (1966) 430-432, Drake ha cambiato idea in:

Piuttosto questi storici non notano il fatto che successivamente a Newton ci fu una scuola di autorevoli meccanici che, rifiutando il concetto di forza, giunse, con L. Carnot (1803), a presentare dei *principi della dinamica completamente sperimentali, e quindi matedmaticamente costruttivi.*[24] In particolare il PIZ è enunciato così da L. Carnot: "Un corps, une fois mis en repos, ne saurait en sortir de lui-même, et une fois mis en mouvement ne saurait de lui-même changer ni sa vitesse ni la direction de cette vitesse".[25]

Consideriamo allora le affermazioni di Galilei alla luce di questa versione. E' ben noto che sin dal 1607 Galilei aveva insegnato "che occorre un movente per iniziare il moto, ma che l'assenza di resistenza è sufficiente a giustificare la sua continuazione".[26] Ad es., egli dice che "un corpo sull'orizzontale non si muove per una pur minima resistenza, ma è libero di muoversi dovunque per una minima forza."[27] Gli storici (ad es. Drake) hanno svalutato queste affermazioni perché il moto "naturale" che ne conseguirebbe non terrebbe conto delle forze, mancando il concetto di forza nella teoria di Galilei. Si può ribattere che se Galileo avesse pensato il PIZ solo per gli urti (per i quali non occorre considerare la forza continua gravitazionale, che invece per la teoria di Newton è la forza basilare), il moto naturale sarebbe indicato in maniera più che chiara. Di fatto le frasi di Galilei coincidono con quella iniziale dell'enunciato pienamente sperimentale del PIZ di L. Carnot 180 anni dopo; però manca la seconda parte, quella relativa al moto uniforme; esse dicono "continuazione", ma non dicono di quale tipo essa è.

Ma si noti che quando ci si restringe al solo infinito potenziale, allora si deve intendere *il moto del PIZ come un processo* (così come un numero intero è il risultato di un processo di calcolo iterativo). Notiamo che, mentre l'enunciato di L. Carnot sembra solo pendere verso l'idea di inerzia come processo, certamente *Galilei esprime questa idea* (in un brano che è famoso ma non è stato visto sotto questa luce): ".. perché se, [per assurdo] assegnato qualche tempo quanto, nel primo istante di tal tempo ed anco nell'ultimo il mobile si trovasse aver il medesimo grado di velocità, potrebbe da questo secondo grado esser parimenti sospinto in su per altrettanto spazio, sì come dal primo fu portato al secondo e per l'istessa ragione passerebbe dal secondo al terzo, e finalmente continuerebbe il suo moto uniforme infinito."[28] Dove per infinito è chiaro, dal contesto, che si deve intendere "senza limite", cioé l'infinito potenziale; e quindi quello della matematica costruttiva.

4. Galilei e il primo principio metodologico della meccanica

Ma, si può obiettare, Galilei non ha mai dichiarato un principio della fisica. E' esatto. Qui allora dobbiamo trattare un altro problema, quello della scelta della organizzazione della teoria scientifica.

Galilei pioniere della scienza, Muzzio, 1992, p. 171, 239; si è ritirato nel dire che Galilei non aveva bisogno di una dinamica (intendendo per dinamica le forze newtoniane!). Ma, secondo me, gran parte del suo articolo precedente resta validissimo alla luce della matematica costruttiva e della meccanica di Carnot.

[24] R. Dugas: **Histoire de la Mécanique**, Griffon, Neuchâtel, 1956, p. 312.

[25] L. Carnot: **Principes fondamentales de l'équilibre et du mouvement**, Deterville, Paris, 1803, p, 49; v. anche A. Drago, S.D. Manno: "Le ipotesi fondamentali della meccanica secondo Lazare Carnot", *Epistemologia,* **12** (1989), 305-330; A. Drago: "Storia critica dei principi della dinamica classica", *Boll. Società dei Naturalisti Napoli,* **100**,(1991) 117-135.

[26] S. Drake: "Galileo's experimental confirmation of horizontal inertia: Unpublished manuscripts (Galileo gleanings XXII)", *ISIS*, **64** (1973) 291-305, p. 293. Egli si riferisce in particolare a G. Galilei: **Opere**, **10**, p. 170.

[27] G. Galilei: **Le Mecaniche**, p. 180.

[28] G. Galilei: **Opere**, Ed. Naz., Firenze, VIII, p. 201. E' da indagare in che misura il PIZ, concepito come processo e inteso come relativo alla meccanica dei moti non celesti (cioé per quei tempi, non naturali) sia coerente con tutto ciò che Galilei ha scritto in proposito. Enriques enuncia il principio d'inerzia in modo analogo (dopo una luminosa analisi della dinamica newtoniana): F. Enriques: "Le principe d'inertie et les mécaniques non-newtoniennes", *Rivista di Scientia,* **3** (1909) 21-34, p. 28, ora in **Natura, ragione, storia**, Einaudi, Torino, 1958, pp. 110-120.

La organizzazione di una teoria scientifica è concepita di solito come deduttiva da alcuni principi-assiomi. Questi, per sintetizzare in poche frasi un campo sterminato di fenomeni disparati, sono quasi sempre frasi idealizzanti. Possiamo sintetizzare le idealizzazioni tipiche dei principi attraverso una loro formulazione di logica matematica.[29] Ogni principio fisico può essere espressa mediante la formula $x \;\; yA(x,y) \rightarrow B(x,y)$. Però ogni volta che si sperimenta sui fenomeni, si ottiene (al più, se *A* è reale) la sola correlazione: $A(x_1)\,\&\,B(y_1)$ (e non un'implicazione).

Come hanno potuto i teorici risalire dalla seconda formula alla prima senza abbandonare la pratica sperimentale? Galilei non fece mai ciò, per fedeltà al metodo sperimentale. La forma dialogica delle sue due ultime e principali opere indica con chiarezza che egli si pone al di fuori di ogni sistema deduttivo di cui ricercare i principi iniziali (benché egli conoscesse bene il modello aristotelico di scienza apodittica):[30]

E quando alla fine dovette enunciare una sua affermazione generale (sul "moto naturale"), egli ammise di stare superando l'evidenza sperimentale (è a questo punto che egli dichiarò spregiudicatamente di essere "buon cozzon di cervelli, che ve lo farò confessare a forza"; .*Dialogo*, p. 173).

L'*organizzazione alternativa* di una teoria scientifica è quella che pone un *problema cruciale e si indirizza secondo un principio metodologico*. Nei testi originali di teorie organizzate in questo modo un principio metodologico è espresso con *una frase doppiamente negata*. Notiamo che la versione di Carnot del PIZ è proprio una frase doppiamente negata ("ne... de lui-même [=si non par d'autrui]").

Galilei non ha affermazioni analoghe per quel che riguarda il corpo in moto. Però notiamo che la versione del PIZ di L. Carnot è una espressione di un principio più generale, valido ad es. nella meccanica di L. Carnot e nella termodinamica di S. Carnot: la "impossibilità del moto perpetuo". *In Galilei c'è una affermazione di questo tipo*; essa è quella forma del suddetto principio di impossibilità del moto perpetuo che è specifica per la meccanica terrestre: il principio attribuito (impropriamente) a Torricelli.

(Salviati) "L'aver voi maggior difficultà in questa che nell'altre istanze, pare a me che dependa dall'esser gli uccelli animati, e poter perciò usar forza a lor piacimento contro al primario moto ingenito nelle cose terrene, nel modo appunto che gli veggiamo, mentre che son vivi, volar anco all'insù, moto impossibile ad essi come gravi, dove che morti non possono che non cadere a basso;..."

(Simplicio) "Credo che cominci subito, perché non avendo chi lo sostenti, non può essere che la propria gravità non operi."

(Salviati) ".... poiché, sì come è impossibile che un grave o un composto di essi si muova naturalmente all'in su, discostandosi dal comun centro verso dove cospirano tutte le cose gravi, così è impossibile che egli spontaneamente si muova, se con tal moto il suo centro di gravità non acquista avvicinamento al sudetto centro comune..."[31]

Qui non c'è un enunciato formale di questo principio, ma il suo ruolo è chiarissimo, anche nel caso paradossale del volo all'in su degli uccelli. Invece il PIZ di Newton è proprio la affermazione che il moto perpetuo uniforme esiste ed è "naturale".

Se poi guardiamo la termodinamica, notiamo che questa teoria presenta anche un principio metodologico formalizzato: il terzo principio. Una analisi di questo principio porta a concludere che in realtà esso riguarda il rapporto fisica-matematica, esprimendo *la scelta della matematica* costruttiva.[32] Sappiamo che in Galilei il problema della scelta del tipo di matematica è proprio il problema cruciale di tutta la fisica galileiana. Di fatto, tutta la giornata III dei *Discorsi*

---

[29] E. Nagel: **La struttura della scienza**, Feltrinelli, Milano, 1968, p. 53.

[30] V. De Luise, A. Drago: "L'organizzazione della teoria e la logica in Galilei", in F. Bevilacqua (ed.): **Atti XI Congr. Naz. Storia Fisica**, Trento, 1990, 123-140.

[31] G. Galilei: **Dialogo su due massimi sistemi**(1632), BUR, Milano, 1959, p. 227-228; 237. **Discorsi su due nuove scienze**, (1638), Boringhieri, Torino, 1958, 203. Sottolineature aggiunte per evidenziare le doppie negazioni.

[32] A. Drago: "Thermodynamics vs. Mechanics: A new look and a new teaching", in M.P. Giaquinta et alii (eds.): **Proc. Taormina Conference on Thermodynamics**, Acc. Pel. Pericolanti, Messina, 1992, 311-329.

(oltre che buona parte del *Dialogo)* è dedicata a questo problema. Qui si trovano le frasi doppiamente negate:

(Sagredo) "... essendo il tempo subdivisibile in infinito, ne séguita che, diminuendosi sempre con tal ragione la antecedente velocità, grado alcuno non sia di velocità così piccolo, o vogliamo dir di tardità così grande, nel quale non si sia trovato costituito l'istesso mobile dopo la dipartita dall'infinita tardità, cioé dalla quiete:..";

(Sagredo) " E perché l'effetto della percossa si regola dalla velocità del medesimo percuziente, chi vorrà dubitare che lentissimo sia 'l moto e più che minima la velocità dove l'operazione sua sia impercettibile?";

(Salviati) "... ma quando ciò sia, non veggo che si possa dubitare che nel diminuirsi la velocità del sasso ascendente, consumandola tutta, possa pervenire allo stato di quiete prima che passar per tutti i gradi di tardità."[33]

Le frasi suddette non fanno che decidere il tipo di matematica che deve essere introdotta nella fisica teorica di Galilei: non quella discreta o dei razionali, cioé quella alla quale i Greci si erano sempre attenuti; né quella dei quanti di velocità che era stata sostenuta dalla teoria dell'impetus e teorie simili;[34] ma quella del continuo; ancorché essa fosse una matematica difficilissima, perché piena di problemi; che riguardano proprio quella opzione ulteriore tra infinito potenziale e infinito in atto che Galilei ha l'ardire di affrontare scientificamente al fine di costruire la nuova teoria. Quindi possiamo ipotizzare che *il vero primo principio di Galilei era un principio metodologico e riguardava la scelta del rapporto fisica-matematica.*

Anche il PIZ di Newton costituisce, di fatto, la scelta di una matematica (che altrimenti non verrebbe mai dichiarata dalla teoria): sicuramente quella del continuo, come in Galilei; ma anche di più, perché si può sostenere che la parola "persevera" (e non "prosegue", o "continua") indica ben adeguatamente l'infinitesimo (o iperreale) dell'atto di moto; o anche una tensione prolungata fino all'infinito in atto (è implicito il concetto di "sempre"); quindi si può sostenere che quella parola implicitamente indica una scelta della analisi infinitesimale, ovvero dell'analisi non standard.

In conclusione, possiamo affermare che la matematica costruttiva ha evidenziato *un dualismo nella evoluzione della meccanica.* Questo dualismo era stato già rilevato da alcuni storiografi;[35] qui viene confermato e precisato come fondamentale; esso percorre tutta l'evoluzione della meccanica sin dalla sua nascita in Galilei, attraverso il primo principio della meccanica.

Galilei, rispetto alle due tradizioni di enunciarlo, non si è mai coinvolto con quella infinitista in atto (ovvero, metafisica) che caratterizzerà la versione di Cartesio e di Newton. Invece si è avvicinato alla versione empirica e costruttivista di L. Carnot. Inoltre, a seconda della organizzazione della teoria, il PIZ può essere un principio di tipo deduttivo o di tipo metodologico; e nell'ultimo caso può riguardare sia il rapporto fisica-matematica, sia un contenuto specifico della teoria. *Galilei, sia pur in un campo gravitazionale costante (quello terrestre), ha espresso tre versioni del principio, che sono quelle costruttive e di tipo metodologico* (anche se in astronomia ammetteva il moto circolare infinito in atto nel tempo; ma, si noti, perché "finito e determinato"[36]).

5. Il pluralismo nei fondamenti della matematica: la matematica di Weyl

[33] G. Galilei: **Discorsi**, op. cit., 181, 183, 183; sott. agg..

[34] S. Drake: "Impetus theory and *quanta* of speed before and after Galileo", *Physis*, **16** (1974), 47-65.

[35] Le referenze ai vari autori e una illustrazione di questo pluralismo è in A. Drago e S.D. Manno: "La meccanica nel Settecento, un secolo di ambiguità e polemiche per la teoria meccanica", *Giornale di Fisica,* **27** (1986), 291-307.

[36] **Dialogo**, p. 31. Il fatto che Huygens lesse attentamente ***Le Monde*** di Cartesio eppure non riportò mai il suo PIZ può essere spiegato col medesimo rifiuto dell'infinito in atto, rifiuto che in Huygens è acclarato. Basti vedere la voce "C. Huygens" in C.C. Gillispie (ed.): **Dictionary Scientific Biography**, Scribner, New York, 1971.

Per lungo tempo il problema di come interpretare il metodo degli indivisibili di Cavalieri e Torricelli è rimasto irrisolto.[37] Oggi però appare chiaro che gli studi del passato[38] hanno avuto sempre una particolare preconcezione: quella dell'unicità della fondazione del calcolo differenziale; prima gli storici seguirono la fondazione degli infinitesimi, poi quella "rigorosa" dei limiti. Qui invece considereremo rapidamente il questo metodo alla luce del pluralismo delle matematiche; il che suggerisce il ruolo cruciale avuto dalla matematica di Weyl.

Nel 1918 il fisico-matematico Weyl iniziò a formalizzare una "matematica elementare che seguisse il più possibile l'atteggiamento cautelativo che la fisica teorica ha verso l'infinito" in atto. Essa si permette solo quello che fa un fisico sperimentale; il quale, ricavando dagli esperimenti al più una sequenza di numeri razionali, li estrapola (in una legge, cioé in una) funzione di numeri reali. Detto in termini logici, si ammette un solo quantificatore (totale) su un insieme numerabile di oggetti discreti. Questa matematica è stata ripresa successivamente da Grzegorczyk, Kondô, Casari, Feferman[39] ed è risultata la più semplice estensione della matematica costruttiva all'infinito in atto; quindi, pur essendo più limitata della matematica rigorosa, è più potente della matematica costruttiva, in quanto in essa valgono le seguenti proprietà caratteristiche (che sono d'interesse per il seguito):

1) *la regola di inferenza* ω: se $\phi(n)$ vale per ogni numerale, allora $n\phi(n)$;

2) *le proprietà geometriche* (determinazione esatta dei massimi e dei minimi di una funzione, dei punti intermedi, degli zeri di una funzione che assuma valori positivi e negativi, ecc.);

3) *l'esistenza del minimo estremo superiore* (e massimo estremo inferiore), purché si sappia estrarre una sequenza convergente di razionali.

6. Il metodo degli indivisibili in Cavalieri e la matematica di Weyl

Al tempo di Cavalieri, una teoria dei numeri reali era ancora lontana di due secoli (1870); in geometria tutto era concepito a partire dai numeri razionali. Ma lo studio delle equazioni algebriche prima e poi delle curve in geometria analitica aveva spinto ad accettare i numeri irrazionali e trascendenti con infinite cifre decimali; questa familiarità con l'infinito invitava ad affinare l'intuizione geometrica, fino a chiederle decisioni non operative, come saper localizzare con precisione assoluta un punto, le cui coordinate sono irrazionali.

Il metodo degli indivisibili di Cavalieri è stato famosissimo tra i matematici ed è persistito fino alla fine del settecento. Esso si basa sulla intuizione con precisione assoluta; però non tanto l'intuizione degli elementi costitutivi di una figura, ma delle totalità.

Sia data una figura piana, che egli vuole dimostrare equivalente ad un'altra nota: egli scompone ambedue in tanti elementi (segmenti) tra loro paralleli, gli "indivisibili". Poi, per ricomporre l'interezza della figura ai fini del calcolo; Cavalieri indica questi ultimi con la parola *omnes*. Con essa egli intende designare una precisa grandezza matematica, anche se questa fosse composta da infiniti elementi; perché per lui essa è rapportabile alle altre grandezze, quelle

---

[37] K. Andersen: "Cavalieri's Method of Indivisibles", *Arch. Hist. Ex. Sci.*, 31 (1985) 291-367, p. 304, 308. Vedasi anche E. Giusti: **Bonaventura Cavalieri and the Theory of Indivisibles**, Zanichelli, Bologna, 1980. Un'ottima rassegna di tutti gli autori di quel secolo, relativa ai temi della matematica e della logica, è quella di P. Mancosu: **The Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century**, Oxford, 1996.

[38] Danno rapidi resoconti delle passate interpretazioni K. Andersen:, op. cit., 361-3 e E. Giusti: "Dopo Cavalieri. La discussione sugli indivisibili", in O. Montaldo (ed.): **Storia delle Matematiche in Italia**, Cagliari, 1982, 85-114, p. 107-109.

[39] A. Grzegorczyk: "On elementarily definable analysis", *Fund. Math.* **41** (1953) 311-336; M. Kondô: "Sur les ensembles nommables et le fondements de l'analyse", *Jap. J. Math.*, **28** (1958) 1-116; E. Casari: **Questioni di logica**, Feltrinelli, 1964, p. 166-182 ne dà una presentazione; S. Feferman: "Weyl vindicatus: *Das Kontinuum* 70 years later", in C. Cellucci et al. (eds.): **Temi e prospettive della logica e della filosofia della scienza contemporanee**, CLUEB, 1988, 59-93 ne indica le proprietà suindicate e ne valuta la rilevanza per il lavoro sui fondamenti della matematica e per il rapporto fisica-matematica.

relative agli elementi finiti. In passato si è interpretato *omnes* con le operazioni matematiche Σ o ∫; ma gli studi più recenti hanno definitivamente escluso queste ipotesi. *La mia ipotesi è che omnes corrisponde semplicemente al quantificatore totale* _ , applicato ad una sequenza di numeri razionali.

Cavalieri sa bene che per considerare la totalità di linee come una grandezza non deve fuoriuscire dalle antiche regole definitorie date da Eudosso per le grandezze finite. Perciò il metodo di Cavalieri risulta dallo sforzo di soddisfare quelle regole: egli dimostra che "tutte le linee" sono: a) ordinabili (ad es., secondo il movimento parallelo e progressivo di un piano che interseca le due figure date nelle linee considerate); b) sommabili (anche se qui egli non usa sempre le stesse tecniche di dimostrazione); c) misurabili tra loro rispetto ad una *regula* (linea di riferimento), e quindi secondo rapporti espressi da numeri razionali.[40] Solo dopo questa verifica egli si permette di parlare del rapporto di due *omnes* linee, così come si può fare con una qualsiasi altra coppia di grandezze finite.

Le precedenti tre restrizioni sull'infinito in atto della totalità delle linee infinitesime configurano una situazione matematica precisa: una sequenza di numeri razionali, sulla quale si fa uso, mediante l'*omnes*, di un solo quantificatore; proprio come fa, in maniera caratteristica, la matematica di Weyl. Il che può essere tradotto con le formule seguenti:

$a_1:b_1=.....=a_n:b_n$

comporta la espressione formale con quantificatori (i quali traducono fedelmente le parole *omnes* di Cavalieri):

$a_1:b_1= \ a_i: \quad b_i;$

ciò traduce la sua famosa sintesi del metodo: *ut unum ad unum, sic omnia ad omnia*.

L'ipotesi suddetta vale anche per il secondo metodo di Cavalieri (che lui in verità, vorrebbe "senza il concetto di infinito"). Un'altra prova inequivocabile del suo passaggio alla matematica di Weyl è il celebre teorema di Cavalieri: "Data una corda di una cruva, esiste un punto della curva la cui tangente è parallela alla corda data." Qui la tesi (e anche la dimostrazione) è centrata sull'uso di un quantificatore, però quello esistenziale (che si può ottenere da quello totale con una negazione).

Cavalieri è cosciente del passo cruciale che egli compie. Quando risponde delle obiezioni che lui stesso solleva, fa notare che di infiniti (in atto) ce ne sono due, uno "assoluto" e uno "relativo"; quest'ultimo è infinito solamente rispetto a certe proprietà e quindi è maneggiabile secondo certe regole;[41] proprio come è parziale (si potrebbe dire) l'infinito introdotto dalla matematica di Weyl, che lo è solamente sotto l'aspetto dell'introduzione di un solo quantificatore sui razionali.Quindi Cavalieri di fatto introduce la matematica elementare di Weyl nella geometria analitica: dall'intuizione dell'infinito come incapacità e negatività degli "empirici", egli passa a quella di un infinito che è dato attraverso alcune sue proprietà.

Quindi né la filosofia né la intuizione del movimento meccanico - come fu poi per Leibniz e Newton -, ma la logica, sostenuta dalla intuizione geometrica, ha permesso a Cavalieri di introdurre l'infinito in atto in matematica, producendo così un abbozzo di calcolo differenziale.

7. Intuizione geometrica e matematica di Weyl in Torricelli

Torricelli era noto solo come fisico quando nel 1642 successe nella cattedra di Galilei. Questi era critico sul metodo di Cavalieri[42]). Ma Torricelli (dopo un primo periodo di dubbi) lo accolse con entusiasmo; egli ottenne in poco tempo molti risultati sorprendenti di integrazione (tra l'altro, anche un risultato strabiliante per l'intuizione geometrica tradizionale: il valore solo finito del volume di un solido, l'iperboloide di rotazione troncato alla base, che è infinito in altezza).

Purtroppo Torricelli morì relativamente presto, lasciando vari inediti; in uno di essi aveva ottenuto per primo il risultato centrale del calcolo differenziale, il teorema inverso ("Le operazioni di derivata e di integrale sono l'una l'inversa dell'altra"); con quel teorema il calcolo differenziale sarebbe stato completato quarant'anni prima di Leibniz e Newton; anche se lo sarebbe stato non nella

---

[40]B. Cavalieri: **Geometria**, Teorema I, p. 201.

[41] B. Cavalieri: **Exercitationes**, p. 202-3.

[42]K. Andersen: op. cit., p. 249.

analisi non standard degli infinitesimi, ma nella matematica elementare di Weyl; infatti quel teorema viene dimostrato da Torricelli richiedendo l'esistenza di un singolo punto preciso.[43]

Come poté il fisico operativo Torricelli giustificare questo metodo?

Innanzitutto notiamo che Torricelli sembra materializzare il metodo di Cavalieri; nel senso che gli indivisibili che nel primo geometra non avevano spessore, nel secondo lo hanno; quasi che Torricelli voglia rendere fisico tutto ciò che non è essenzialmente matematico. (Però, anche se gli indivisibili diventano a spessore finito, lui considera sempre un processo, il quale, tendendo all'infinito, viene chiuso dall'*omnes).*

Inoltre Torricelli, sapendo che sta compiendo un passo ardito, di solito accompagna ogni sua dimostrazione con ulteriori dimostrazioni, in particolare quella secondo l'antico metodo di esaustione. In effetti questo calcolo e la sua teoria rendono evidente a lui e agli altri geometri che questo tipo di infinito è ormai efficace, dando luogo a risultati validi e straordinari; anche se si sta lavorando sull'infinito in atto, con quel metodo lo si può considerare alla pari degli altri enti matematici.

Quindi è il successo di tanti risultati fuori dell'ordinario che gli fa ormai considerare l'*omnes* di Cavalieri come un concetto che permette di passare al limite con sicurezza. Per cui Torricelli include nella matematica *gli elementi finali* delle serie degli indivisibili o di una sequenza qualsiasi di elementi ottenuti "per astrazione". Anzi, egli proclama che questo è il *beneficium* tipico del geometra.[44]

Il che aprì la strada a risultati in cui la intuizione geometrica andava sempre oltre, facendo abituare i matematici al *passaggio al limite, inteso, secondo la matematica di Weyl, come il minimo estremo superiore di una sequenza di razionali.*

Con questo anche la concezione classica della geometria dovette cambiare, così come notò Mersenne: ciò che era intuitivo nella vecchia maniera non era più sicuro; e anche il concetto di spazio dovette essere concepito diversamente. Nella scienza era definitivamente nata una nuova intuizione; o come dice felicemente Brunschvigc, una "sovraintuizione" geometrica,[45] che infatti sappiamo corrispondere alla matematica di Weyl (proprietà geometriche) e non alla matematica col solo infinito potenziale, cioé costruttiva.

8. Cavalieri e Torricelli sul principio d'inerzia

Koyré giustamente si chiede: ".. come avviene che questa concezione [del PIZ] davanti alla quale si è fermato lo spirito di Galilei, è potuta apparire facile, evidente, che va da sé, ai suoi discepoli e successori?"[46] Infatti, dice Koyré, con i discepoli, Cavalieri in particolare, "Il grande problema filosofico è risolto. Va da sé che la fisica è una matematica e il passaggio dallo studio - puramente geometrico -... a quello degli "effetti" sulla realtà fisica avviene con continuità. I corpi che Cavalieri mette in movimento sono ormai dei corpi matematici." In particolare non c'è più la vecchia distinzione antropomorfa seguita spesso da Galilei, tra moto "violento" e moto "naturale". Cavalieri inoltre riesce a sollevarsi alla generalità necessaria per dimostrare che la traiettoria di ogni moto di caduta è una parabola.[47] Ormai, possiamo aggiungere noi, la matematica fa definitivamente da mondo speculare e ideale alla realtà fisica, così come Husserl aveva notato essere avvenuto nella scienza moderna.[48]

---

[43] C. Boyer: **The History of Calculus and Its Conceptual Development**, Pergamon P., 1986, p. 185 fa notare che la dimostrazione, che non è come quella moderna, richiede l'esistenza di un punto, cioé il quantificatore esistenziale La dimostrazione del valore finito del tronco di iperboloide di rotazione è, in termini moderni, la seguente: il disco di altezza infinitesima dy haa volume $\pi x^2 dy = \pi x^2(-1/x^2)dx = -\pi dx$, che, integrato tra gli estremi a e 0, dà πa.

[44] E. Torricelli: **Opera geometrica**, p. 10.

[45] P. Mancosu: op. cit., p. 138. L. Brunschvigc: op. cit., cap. III C.

[46] A. Koyré: É**tudes**..., op. cit., p. 293.

[47] ibidem, p. 295.

[48] Secondo Koyré, questo doppio binario costituiva la caratteristica già del suo maestro Galilei; A. Koyré: "Galilei e Platone", op. cit.. E' il doppio binario che poi Husserl ha considerato come caratteristica della scienza occidentale,

Vediamo allora *il PIZ in Cavalieri*.

"Dico più oltre, che considerando il moto che da un proiciente viene spinto verso alcuna parte, se non havesse altra virtù motrice, che la cacciasse verso un'altra banda, andrebbe nel luogo segnato dal proiciente per dritta linea, mercé della virtù impressali pur per dritta linea, dalla quale drittura non è ragionevole, che il mobile si discosti, mentre non vi è altra virtù motrice che ne lo rimova, e ciò quando fra li duoi termini non sia impedimento. Come per essempio una palla d'Artiglieria uscita dalla bocca di un pezzo... Dico ancora, che quel proietto non solo andrebbe per dirtta linea... ma che in tempi eguali passerebbe per spatij eguali della medesima linea."[49]

Notiamo che la prima espressione contiene la stessa idea del PIZ di L. Carnot. Anche questa è con doppie negazioni, come avviene per i principi metodologici (ma le negazioni sono riferite al nostro modo di concepire la realtà - "non è ragionevole.." - invece che alla realtà stessa; cioé questa espressione è più filosofica - perché vicina al principio di ragion sufficiente - che quella di L. Carnot).

Notiamo che qui Cavalieri è in un mondo ideale nel quale può porre f=0, non approssimativamente, così come faceva Galilei (nel piano orizzontale limitato, nel doppio piano inclinato, nella nave che viaggia in mare tranquillo); o come la si può concepire con le misure operative, le quali danno sempre come risultato un intervallo; o con la matematica costruttiva, nella quale x=0 esattamente è indecidibile; ma egli pone f=0 *esattamente*, così come si può cencepirla nel mondo ideale dell'intuizione geometrica e della matematica di Weyl.

Koyré nota giustamente che qui Cavalieri ha separato la gravità dalla realtà, come se gravità e corpo fossero due realtà distinte, così come noi diciamo modernamente quando le identifichiamo rispettivamente con la massa e con la forza. Qui la fisica matematica è giunta ad una autosufficienza rispetto alla realtà, che viene rappresentata con variabili indipendenti tra loro all'interno di un mondo astratto che, pur copiando la realtà, ne è indipendente. E' chiaro che questa *idealizzazione totale della realtà* è potuta avvenire solo nella misura in cui i concetti basilari della matematica (punto, linea, ecc.) sono stati visti nella loro realtà ideale ultima, con l'infinito in atto; al contrario, Galilei, che in generale, si limitava all'operativo, non poteva passare a dare realtà totale ad un mondo matematico, che se pur concepito come ideale e come linguaggio, era irraggiungibile dalle approssimazioni dell'infinito solo potenziale. Qui è quella distinzione che Koyré esprime mirabilmente con il contrasto dei due concetti: "l'ideale" e "l'impossibile"; oppure con quella sua frase caratteristica: "dal mondo del press'a poco all'universo della precisione".

Purtroppo Koyrè, basandosi sulla sola sua intuizione scientifica, non può notare il passaggio di Cavalieri sul PIZ come un passaggio ad un livello di astrazione superiore a quello di Galilei (benché, sin dall'inizio della sua analisi Koyré abbia sottolineato la novità essenziale della fisica teorica del discepolo rispetto al maestro). Per questo motivo giudica inadeguati e insufficienti le affermazioni di Cavalieri, tanto più che le confronta con la versione di Cartesio-Newton, preconcettamente concepita come l'unica possibile. Quindi qui la matematica di Weyl suggerisce una correzione dell'analisi di Koyré, sottolineando che Cavalieri ha fornito la prima versione del PIZ tipica della matematica di Weyl (invece che nella analisi non standard).

Passiamo ora a Torricelli. Egli considerava come accertato e concreto tutto ciò che suggerisce la geometria. "Tra le discipline liberali, solamente la geometria acuisce l'ingegno e lo rende idoneo ad ornare le città in tempo di pace e a difenderle in tempo di guerra: e a parità di altre cose, lo spirito che sia esercitato nella palestra geometrica di solito ha una forza particolare e virile: sempre è valido e anzi eccelle negli studi di Architettura, tecnica militare, nautica, ecc.,...".[50]

Torricelli propone una originale versione del PIZ. Koyré nota che egli non distingue (come Galilei) tra geometria e fisica; perciò egli trasferisce in fisica

---

attribuendone la nascita a Cartesio. E. Husserl: **La crisi delle scienze europee e la fenomenologia trascendentale**, Il Saggiatore, Milano, 1966.

[49] B. Cavalieri: **Lo Specchio Ustorio, overo Trattato delle Settioni Coniche**, Bologna, presso Clemente Ferroni, 1632, cap. XXXIX, p. 153 e p. 155; sott. aggiunte.

[50] E. Torricelli: **Opera Geometrica**, II, p. 7.

teorica il "privilegium" del geometra: trattare come ben definito il valore di una grandezza ottenuto con il passaggio al limite su una sequenza di numeri interi (o razionali, o ottenuti da misure fisiche). In particolare Torricelli usa l'intuizione geometrica anche sulla realtà fisica (si può dire: quando dal mondo ideale, della intuizione geometrica o della matematica di Weyl, ritorna alla realtà). Ad es. egli usa il *beneficium* del geometra quando sostiene il parallelismo perfetto delle aste verticali di una bilancia a due bracci; benché sia chiaro che questo parallelismo può essere vero solo al limite, quando il centro della Terra fosse all'infinito in atto.

Di fatto egli enuncia il principio di inerzia ponendosi *al limite della assenza completa della gravità*. Sia pur nella seconda frase di una dimostrazione (della Proposizione 2, che afferma che l'apice della traiettoria parabolica è sulla verticale, in corrispondenza al punto medio della corda orizzontale), egli enuncia quella che è una proposizione di PIZ: "Un mobile sia lanciato da A con una inclinazione qualunque. E' chiaro che, senza l'attrazione di gravità, il mobile procederebbe di moto rettilineo ed equabile lungo la direzione AB. Ma siccome la gravità opera dall'interno, subito incomincia a declinare, con una derivazione sempre crescente, ...".[51] Quindi la sua affermazione del PIZ dà per provato ciò che si ottiene al limite di una sequenza di misure fisiche, come nella matematica di Weyl. (Notiamo che il suo "procederebbe" esprime una progressività locale e potenziale, la quale è in accordo con la operatività fisica e la costruttività matematica; e non un atto di moto infinitesimo, o una tensione prolungata all'infinito, come esprime il "persevera" della versione newtoniana).

9. Conclusioni

Si noti che senza un insieme sostanzioso di leggi sufficienti a proporre una teoria sistematica, non era possibile ottenere o proporre il PIZ come principio-assioma, così come fece Newton nella sua opera, che presenta per la prima volta una teoria meccanica deduttiva. Allora, in precedenza il PIZ poteva nascere solo come affermazione che idealizzava la realtà secondo o una concezione metafisica, così come fa Cartesio, oppure seguendo una matematica che includesse in maniera essenziale una idealizzazione all'infinito in atto, così come è avvenuto in Cavalieri e Torricelli, attraverso la intuizione geometrica. Si può quindi dire che veramente *è con l'intuizione geometrica che è iniziato l'uso dell'infinito in atto nel PIZ e nella teoria fisica* (ed è iniziata l'analisi infinitesimale). Questa valutazione sul ruolo cruciale avuto dalla geometria è confermata dai seguenti fatti:

1) Per J. Bernoulli è con la geometria che si è introdotto l'infinito (in atto) nella scienza; valutazione che viene ripetuta in particolare da L. Brunschvigc e da A. Koyré[52] (i quali ultimi infatti sostengono che in Galilei e nei suoi discepoli c'è un platonismo matematico, ma non fisico).

2) Contemporaneamente a Cavalieri e Torricelli, la introduzione dell'infinito in atto è stata suggerita anche da quella teoria fisica, l'ottica geometrica, che usava la geometria come sua matematica; questa teoria abituò ad usare formule (per le lenti sottili e per gli specchi) nelle quali era naturale considerare punti (sorgenti luminose, immagini, fuochi) all'infinito.

3) Tra le successive teorie scientifiche, quelle teorie che hanno voluto essere rigorosamente aderenti alle misurazioni sperimentali, o hanno rifiutato del tutto la geometria (meccanica di L. Carnot, chimica, termodinamica di S. Carnot), o hanno cambiato l'intuizione dello spazio (campo di linee di forza di Faraday, in elettromagnetismo); si può supporre che gli autori di queste teorie abbiano percepito nella geometria un cavallo di Troia per quell'infinito in atto che secondo loro era da rifiutare perché metafisico (benché, attraverso la analisi infinitesimale di Newton e di Leibniz, dominasse tutta la scienza).[53]

---

[51] E. Torricelli: **De Motu Projectorum**, 1644, l. II, p. 156.

[52] L. Brunschvigc: **Les étapes de la philosophie mathématique**, Gauthier-Villars, 1913, cap. III C ; A. Koyré: "Galilei e Platone", op. cit. pp. 166-195; nello stesso libro, in "Bonaventura Cavalieri et la géométrie des continus", p. 334-366 egli dice che Cavalieri "sa usare la intuizione geometrica con mano da maestro". Si veda anche E. Burtt: **The Metaphysical Bases of Modern Science**, Routledge & Kegan, 1924.

[53] Anche la rivoluzione nella storia della geometria, la nascita delle geometrie non euclidee è avvenuta solo quando Lobacevskij ha rinunciato alla intuizione

Ma il PIZ poteva nascere anche come principio metodologico, espressione di un processo operativo, tipico del solo infinito potenziale, così come poi lo espresse L. Carnot. E Galilei lo haavvicinato di molto (per lo meno nel campo gravitazionale terrestre).

Di fatto *sono state realizzate tutte queste possibilità*; ma con cambiamenti radicali nel rapporto fisica-matematica; i quali pertanto hanno generato delle *incommensurabilità*.[54] Già Koyré notava (inizio del par. 7) che si nota un cambiamento drastico tra la fisica teorica di Galilei e quella dei suoi discepoli; noi lo possiamo attribuire al passaggio definitivo dall'infinito solo potenziale (o comunque dall'indecisione sull'infinito) all'infinito in atto della matematica di Weyl.

Dopo Torricelli la meccanica di Newton non solo ha cambiato di nuovo il rapporto fisica-matematica (ovvero ha proposto l'infinito in atto senza restrizioni nel rapporto con la matematica); ma ha anche presentato una teoria meccanica totalmente deduttiva. Imponendosi poi come l'unica teoria della fisica teorica, la meccanica newtoniana ha oscurato il precedente rapporto fisica matematica e tutta la ricerca di un PIZ metodologico, facendo pensare che i principi metodologici restavano utili solo nella ricerca, ma non nella presentazione della teoria.

Si instaurò un vero e proprio paradigma, cioé un modello di teoria scientifica che ha dominato gli altri modelli fino ad oscurarli completamente. Tra gli storici, solamente Koyré aveva finora percepito la natura e la drammaticità degli avvenimenti concernenti la nascita del PIZ. Infatti, tutto quanto è stato mostrato in precedenza prova che sin dall'inizio il rapporto fisica-matematica è stato essenzialmente pluralista.

Ricordiamo ora che Cartesio scrisse *Le Monde* negli anni 1639-43, pubblicandolo come seconda parte di *Principes de Philosphie* nel 1644. Ora gli enunciati operativi e metodologici del PIZ di Galilei sono tutti precedenti questa data. Inoltre *il PIZ Cavalieri secondo la matematica di Weyl è del 1632, dodici anni prima di Cartesio*; mentre quello di Torricelli è della stesso anno di Cartesio. La precedenza è evidente. Inoltre si noti che mentre l'"argometazione" di Cartesio è "quite unconvincing" per chi non conosca già il PIZ,[55] perché di tipo metafisico; tutte le altre argomentazioni sono sostanziosamente scientifiche, quanto meno perché queste argometazioni aderiscono ad una matematica particolare, secondo un ben definito rapporto fisica-matematica; che giustamente Koyré pone come la rivoluzione culturale compiuta da Galilei e dalla scienza moderna rispetto alla tradizionale filosofia (e quindi alla tradizionale concezione del mondo). Con ciò viene stabilita con precisione *la data d'ingresso dell'infinito in atto nella fisica teorica attraverso il PIZ: 1632*.

Prende allora senso storico definito quanto aveva intuito il Loria presentando le opere di Toricelli: questo scienziato si colloca "ad uno svolto della storia." E la matematica della Rinascenza italiana è da paragonarsi ad una "lampada che, nell'istante in cui sta spegnersi, diffonde all'intorno uno sprazzo di luce fulgidissima."[56]

---

geometrica, per invece tornare a basarsi su operazioni fisiche al finito sui corpi solidi ed ha rifiutato la analisi degli infinitesimi (ricostruendola come analisi numerica). N.I. Lobacevskij, **Nuovi Principi di Geometria**, Boringhieri, 1965, introduzione e primi capitoli. In A. Drago e M.C. Laquintana: "La matematica elementare di Weyl nella storia della fisica", in F. Bevilacqua (ed.): **Atti dell'VIII Congr. Naz. Storia Fisica**, (Napoli), Pavia, 1987, 113-120 e in A. Drago: "How the mathematical concept of infinity matters Theoretical Physics?", in A. Diez, J. Echeverria, A. Ibarra (eds.): **Structure in Mathematical Theories**, Pais Vasco, San Sebastian, 1990, 141-146 ho esplicitato l'ipotesi storica del rifiuto della geometria da parte di alcune teorie fisiche.

[54] A. Drago: "Incommensurable scientific theories: The rejection of the double negated logical law", in D. Costantini, M.G.Galavotti (eds.): **Nuovi problemi della logica e della filosofia della scienza**, CLUEB, vol., 195-202.

[55] N.R. Hanson: op. cit., p. 34.

[56] G. Loria: "Introduzione" a E. Torricelli: **Opere**, 1919, Montanari, Faenza, p. III e XXVII.