Mario Guidone[1]

MAXWELL E LE TRAFORMAZIONI ELETTROMAGNETICHE DI GAUGE

I - Introduzione.

Maxwell ha presentato le sue grandi innovazioni, la corrente di spostamento e la prima teoria della luce, nel lavoro “On Physical Lines of Force”, sostenute da un sofisticato modello di etere idrodinamico-elastico[2]. Le equazioni generali del campo e.m. furono poi stabilite, indipendentemente dalla varietà dei moti dell’etere e dalla sua costituzione, nel 1865, con il lavoro “A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field”[3].

Si tratta di venti equazioni scalari tra quantità e.m.: l’eccedenza, rispetto alle ‘equazioni di Maxwell’ dei manuali correnti, è dovuta essenzialmente alla presenza dei potenziali e.m..

Maxwell afferma esplicitamente di aver ‘dedotto’ il sistema di equazioni dalla ben nota fenomenologia e.m. scoperta tra gli altri da Oersted e Faraday, e si muove in direzione di una ricostruzione matematica della teoria, che culminerà con la publicazione del Trattato, nel 1873[4].

Nella trattazione maxwelliana i potenziali e.m. non hanno egual rango. Quello che lo stesso Maxwell nel 1873 ha denominato ‘potenziale vettore’ è nato come corrispettivo matematico di una realtà fisica, lo ‘stato elettrotonico’ di Faraday[5][6]; e i molti nomi che Maxwell ha trovato per questo costrutto fisico-matematico nei diversi contesti, sono un segno che la ricerca maxwelliana era volta ad ampliare la concezione originaria di Faraday.

Mantenne invece il suo rango di semplice ausilio matematico il potenziale scalare, ereditato dalla fisica matematica di Laplace, Poisson, Green; com’è noto, solo con la teoria della Relatività i due potenziali entreranno a far parte di un unico quadrivettore.

La posizione di Maxwell nei confronti del potenziale scalare è manifesta nella critica rivolta ripetutamente al potenziale scalare di Riemann (1858), che soddisfa l’equazione delle onde; è perciò un potenziale ritardato, e propaga a distanza le azioni elettriche, con la velocità finita della luce.

Maxwell riteneva inammissibile la propagazione di un potenziale scalare, che è un simbolo matematico sprovvisto di una controparte fisica, e di un mezzo in cui propagarsi, (Trattato, pag, 862); nè ha mai scritto l’equazione delle onde per il potenziale scalare; nella derivazione delle equazioni delle onde e.m. il potenziale vettore ha invece un ruolo centrale: questo potenziale descrive uno stato fisico, che può propagarsi nell’etere.

La dicotomia accennata è, come vedremo, la causa principale della eliminazione dei potenziali e.m. dalle equazioni di Maxwell originarie. Esamineremo ora, sinteticamente, la ricerca maxwelliana intesa ad ampliare e approfondire le idee di Faraday sullo stato elettrotonico, e il ruolo di primo piano accordato al potenziale vettore.

II - I molti nomi del potenziale vettore.[(5)]

Faraday chiamò ‘elettrotonico’ un particolare stato della materia[7] che è soggetta a induzione e.m. Nel Trattato (§. 540), Maxwell lo spiega in questo modo: se un circuito chiuso è immerso in un campo magnetico, e il sistema è stazionario, lo stato elettrotonico non ha modo di mostrarsi; ma durante le variazioni dell’intensità del campo, quando ad esempio si porta bruscamente al

[1] GNSF - Pavia

[2] The Scientific Papers of James Clerk Maxwell, ed. by W.D. Niven, Cambridge, 1890, 2 voll., Dover, N.York, I, pp. 451 - 513

[3] J.C. Maxwell, ibid., pp. 527 - 597

[4] (3) J.C. Maxwell, Trattato di Elettricità e Magnetismo, a cura di E. Agassi, UTET, Torino, 1973.

[5] τòνos significa ‘tensione’, per lo più in medicina.

[6] Useremo sempre il termine ‘potenziale vettore’ liberamente secondo l’uso moderno.

[7] A. Bork, Maxwell and the Vector Potential, Isis, vol. 58, 1967, pp. 210 - 222

suo valore di regime, si produce nel circuito una corrente; e se ne produce una di senso opposto, quando si allontanano rapidamente i magneti e i circuiti associati al campo.

Maxwell ricercò tanto una concezione meccanica di largo respiro dello stato elettrotonico, quanto un'adeguata veste matematica per il concetto fisico.

Quest'ultima appare già nella prima grande memoria e.m., 'On Faraday's Lines of Force', del 1855[8].

Maxwell presenta tre 'funzioni elettrotoniche', le tre componenti di un potenziale vettore $\underline{A}$. Se $\underline{B}$ è l'induzione magnetica, il potenziale vettore $\underline{A}$ è definito, come oggi, da:

$$\times A = B \qquad \text{(a)}$$

con la condizione ausiliaria:

$$A = 0 \qquad \text{(b)}$$

Nei lavori di N. Thomson ai quali Maxwell si è ispirato[9], la condizione (b) deriva dalla caratterizzazione di un modello fisico, come l'incompressibilità di un solido ideale; ma Maxwell si è ispirato anche ad un lavoro di Stokes[10], più generale: la (b) non è l'unica possibile; e non si deduce, ma si impone al potenziale.

Della condizione (b) vedremo l'importanza nelle derivazioni maxwelliane delle equazioni delle onde; ma osserviamo subito che la trasversalità delle onde e.m. era cruciale per la teoria e.m. della luce, e la (b) è la condizione di trasversalità per le onde $\underline{A}$.

Se infatti il potenziale vettore si rappresenta con:

$$A = A_0 \varepsilon \quad \exp\left[i\left(k \quad x - \omega t\right)\right]$$

Dove $\underline{\varepsilon}$ è un versore di polarizzazione e $\underline{k}$ il vettore d'onda, dalla (b) si deriva immediatamente la condizione di traversalità:

$$\varepsilon \quad k = 0$$

Nel lavoro sulle linee di forza di Faraday, Maxwell ottenne un risultato di grande valore per la teoria di campo perseguita, derivando la relazione locale tra forza elettromotrice [campo elettrico $\underline{E}$] indotta e la causa inducente $\dot{A}$ [11].

$$E = \dot{A} \qquad \text{(c)}$$

La (c) esprime in forma locale la legge dell'induzione di Faraday, dalla quale è scomparso il riferimento alle linee di forza magnetiche, che attraversano il circuito indotto lontano dalla periferia dove ha luogo l'effetto. Causa ed effetto sono ora spazialmente sovrapposti.

Una prima interpretazione meccanica dello stato elettrotonico si trova nel lavoro 'On Physical Lines of Force': questo è fatto corrispondere all'impulso meccanico che agisce su una macchina, quando la ruota motrice viene fatta passare istantaneamente dalla quiete all velocità di regime; se si arresta la

---

[8] J.C. Maxwell, Scientific Papers, cit., pp 154 - 229

[9] J.C. Maxwell, ibid., pp. 188,196,199.

[10] J.C. Maxwell, ibid., p. 476.

[11] Maxwell accenna all'elettrodinamica di Weber, «così elegante, così matematica, così interamente differente» da tutto il suo lavoro: ma conclude che, nonostante i successi, non è la vera teoria. (pp. 207 - 208). Dalla legge dell'induzione nella forma di Weber, G. Kirchhoff aveva già derivato la (c). G. Kirchhoff, Gesammelte Abhanlimgen, Barth, Leipzig, 1892, pp. 42 - 55.

macchina arrestando la ruota motrice, ogni ruota riceve un impulso uguale ed opposto a quello iniziale[12].

È importante che in ogni punto della macchina l'impulso possa essere calcolato con le leggi della meccanica: l'impulso viene detto 'momento ridotto' in quel punto, e la dinamica lagrangiana è lo strumento di analisi elettivo.

Con la Dynamical Theory, il momento ridotto della meccanica è associato al potenziale vettore, che ora è denominato "momento elettromegnetico"[13].

Il potenziale vettore non è solo un tramite tra le idee di Faraday e la matematica di Maxwell: permette anche di far corrispondere, alla trattazione lagrangiana del momento ridotto, la teoria del campo e.m.: la meccanica di Lagrange consente di lasciare l'etere imprecisato.

Dalla definizione del momento e.m., Maxwell poté dedurre l'espressione dell'energia distribuita nel campo; e le leggi fondamentali (primitive) dell'elettromagnetismo: le leggi di Coulomb, di Ampére, di Faraday.

Il momento e.m. è ora «il vero e proprio momento meccanico della sostanza dell'etere, secondo la richiesta maxwelliana di essere preso alla lettera quando parla d'energia»[14].

III - Il potenziale vettore nel Trattato.

La denominazione 'potenziale vettore' compare per la prima volta nel § 404 del Trattato in una pubblicazione (Maxwell la aveva usata in precedenza nella corrispondenza scientifica).

Si tratta qui del 'potenziale vettore dell'induzione', adibito alla trattazione della magnetostatica;

Lo si ritrova come 'momento elettrocinetico', che misura in ogni punto del campo l'impulso ricevuto da una carica unitaria, quando circuiti e magneti sono rapidamente allontanati.

Lo spazio che Maxwell riserva al potenziale vettore, nel Trattato, è cospicuo; e il "potenziale vettore delle correnti elettriche" (§. 616 - 17) è direttamente connesso con la derivazione delle equazioni delle onde e.m..

Al §. 619 si legge: «Una delle principali peculiarità di questo trattato è la dottrina in esso sostenuta secondo cui la vera corrente $\underline{C}$, cioè quella da cui dipendono i fenomeni e.m., non è la stessa di $\underline{k}$, la corrente di conduzione, ma che, quando si valuta il movimento totale dell'elettricità, bisogna anche tener conto della variazione temporale di $\underline{D}$, cioè dello spostamento elettrico, per cui si deve scrivere:

$$\underline{C} = \underline{k} + \dot{\underline{D}}$$ (Equazione delle vere correnti)» (d)

L'equazione di Ampère è ora l'equazione di Maxwell - Ampère:

$$4\pi \underline{C} = \quad \times \underline{H} \qquad \text{(e)}$$

e, introducendo il potenziale vettore:

$$\underline{A} = \quad \times \mu \underline{H} \qquad \text{(f)}$$

la (e) diviene:

$$4\pi\mu \underline{C} = \quad J - \quad \underline{A} \qquad \text{(g)}$$

Maxwell effettua la trasformazione del potenziale vettore:

$$\underline{A} = A' - \quad \chi \qquad \text{(h)}$$

[12] J.C. Maxwell, Scientific Papers, cit., pp. 478 - 479.

[13] J.C. Maxwell, Scientific Papers, cit., p. 555.

[14] J. C. Maxwell: Una Teoria Dinamica del campo magnetico, a cura di S. D'Agostino, Tecknos, Roma, 1997, p. XXIII.

dove: $^2\chi = J$, che equivale a

$$\chi = \frac{1}{4\pi}\int J\frac{dV}{r} \qquad \text{(i)}$$

Ottiene perciò:

$$A' = 0 \qquad \text{(l)}$$

con il che la (g) diviene:

$$A' = -4\pi\mu C \qquad \text{(m)}$$

ed ha l'integrale:

$$A' = \mu\int C\frac{dV}{r} \qquad \text{(n)}$$

Maxwell commenta:

«Possiamo perciò adottare, quale definizione di $\underline{A}$, che esso è il potenziale vettore della corrente elettrica, il quale sta con la corrente elettrica nella stessa relazione in cui il potenziale scalare sta con la materia di cui esso è il potenziale».

Infatti, la (n) :

$$A'(x,t) = \mu\int C\frac{dV}{r} = \mu\int (k + D)\frac{dv}{r} \qquad \text{(o)}$$

Insieme con l'espressione del potenziale scalare:

$$\varphi(x,t) = \int \rho\frac{dV}{r} \qquad \text{(p)}$$

dove ρ è la densità di elettricità, dà una soluzione, matematicamente valida[15], delle equazioni del campo e.m.. Si tratta in realtà di un sistema di equazioni integro-differenziali, perché il calcolo di $\underline{A}$ presuppone la conoscenza di $\underline{D}$, e di uso generalmente malagevole.

Ma la vera perplessità viene dal carattere istantaneo dei potenziali, che senbra violare la causalità.

Maxwell conosceva i potenziali ritardati di Lorenz[16](, nei quali non figura la corrente di spostamento, e dove la condizione detta di Lorentz $A + \dot{\varphi} = 0$ prende il posto di $A = 0$.

Che questi potenziali costituiscano una soluzione generale delle equazioni di Maxwell-Hertz è stato dimostrato solo nel 1897 da Tullio Levi Civita[17](.

[15] Non tutte le soluzioni delle equazioni di Maxwell matematicamente valide lo sono anche fisicamente: basta pensare a potenziali anticipati.

[16] T. Levi Civita, Sulla riducibilità delle equazioni elettrodinamiche di Helmholtz alla forma hertziana, Nuovo Cimento, 1897, pp. 93 - 106.

[17] L. Lorenz, Über die Identität der Schwingungen der Lichts mit den Electrischen Strömen, Ouvres Scientifiques, Copenaghen, 1896, vol.I,1967, pp. 243 - 263. Nella letteratura scientific, molto raramente si attribuisce a Lorenz la prima scoperta dei potenziali ritardati.

IV - Le equazioni delle onde e.m. nella Dynamical Theory: le onde magnetiche.

La 'Teoria dinamica del campo e.m.' è un lavoro di transizione: i modelli meccanici sembrano non fornire più ispirazione, e Maxwell cerca ora una ricostruzione matematica della sua teoria, che culminerà nel Trattato (1873).

Vi si dice che le equazioni del campo e.m. sono 'dedotte' da fatti noti; i moti e la costituzione elastica dell'etere sono sullo sfondo, non specificati. Ma è significativo che l'equazione costitutiva:

$$E = kD \qquad (1)$$

tra campo e spostamento elettrico, sia chiamata 'equazione della elasticità elettrica': le analogie modellistiche sono ancora fonti di metafore costruttive[18].

L'altra equazione costitutiva, tra forza magnetica $\underline{H}$ e induzione $\underline{B}$ non presenta novità e si scrive:

$$B = \mu H \qquad (2)$$

Si è visto che l'equazione delle 'vere correnti', comprensiva della corrente di spostamento $\dot{D}$, se $\underline{C}$ è la corrente totale ('vera') si esprime con:

$$C = k + \dot{D} \qquad (3)$$

Ma poiché si considera un dielettrico perfetto, in cui non c'è corrente di conduzione $\underline{k}$, la (3) diviene:

$$\underline{C} = \underline{\dot{D}} \qquad (4)$$

Con φ, *A* si designano i potenziali e.m.; le relazioni con i campi sono:

$$E = - \quad \varphi - \dot{A} \qquad (5)$$

$$B = \quad \times A \qquad (6)$$

Perché la (4), la equazione di Maxwell-Ampère diviene:

$$\times B = 4\pi\mu \dot{D} \qquad (7)$$

Applicando alla (7) l'operatore x , si ottiene:

$$^2 \underline{A} - \quad J = -4\pi\mu\dot{D} \qquad (8)$$

Dove si è posto:

[18] Si veda l'introduzione a: J.C. Maxwell, Una teoria dinamica, cit., di Salvo D'agostino.

$$J = \quad A \qquad (9)$$

L'equazione delle perturbazioni magnetiche si ottiene dalla (8) utilizzando la definizione (6):

$$^{2}B = -\frac{4\pi}{k}\mu\ddot{B} \qquad (10)$$

La perturbazione è trasversale ($\underline{B}$ = 0), e la velocità delle onde è:

$$V = \sqrt{\frac{K}{4\pi\mu}}$$

V è identica a c, rapporto tra unita e.m. ed elettrostatiche di carica, o di corrente, misurato da Weber e Kohrausch nel 1856, «facendo uso della luce solo per osservare gli strumenti». E l'accordo di c con la velocità della luce secondo Foucault «sembra mostrare che la luce e il magnetismo sono affezione della stessa sostanza, e che la luce è una perturbazione del campo e.m. propagata attraverso il campo secondo le leggi e.m.». Questa formulazione della teoria e.m. della luce è più forte dell'annuncio dato nel 1862, in 'Physical Lines of Force', perché è indipendente dal modello dettagliato di etere che si trova in questo lavoro.

V - Le onde del potenziale vettore.

Se riscriviamo la (9):

$$^{2}A - \quad J = \frac{4\pi}{k}\mu \qquad (11)$$

ed operiamo su di essa la trasformazione del potenziale vettore:

$$A' = A - \quad \chi \qquad (12)$$

essendo χ la soluzione di:

$$^{2}\chi = J \qquad 13)$$

si ottiene subito la condizione di trasversalità per $\underline{A}'$:

$$A' = 0 \qquad (14)$$

Per effetto della trasformazione (12) la (11) si muta in:

$$\nabla^2 \underline{A}' - \frac{4\pi}{k}\mu \ddot{\underline{A}}' = \frac{4\pi}{k}\mu \left[\frac{d}{dt} \nabla (\varphi + \dot{\chi}) \right] \quad (15)$$

Se vale la condizione:

$$\frac{d}{dt}(\varphi + \dot{\chi}) = 0 \qquad (16)$$

La (15) conduce all'equazione delle onde per $\underline{A}'$:

$$\nabla^2 \underline{A}' - \frac{4\pi}{k}\mu \ddot{\underline{A}}' = 0 \qquad (17)$$

Le onde sono trasversali, per la (14), se dalla parte che dipende da χ nella (15) non provengono perturbazioni residue. Per la verifica, Maxwell applica alla (16) l'operatore ∇^2, e perviene alla:

$$\frac{d}{dt}\left(\nabla^2 \varphi + \dot{J}\right) = 0 \qquad (18)$$

avendo tenuto conto della (13). Nell'ipotesi che φ soddisfi l'equazione di Poisson come in elettrostatica, se ρ è la densità volumica di elettricità, si può scrivere:

$$\nabla^2 \varphi = -k\rho \qquad (19)$$

In un isolante perfetto, ρ è statica e φ indipendente dal tempo; ne segue «che il valore di J è costante, oppure è zero, oppure cresce uniformemente o diminuisce nel tempo; perciò nessuna perturbazione dipendente da J può essere propagata sotto forma di onda»[19].

L'argomentazione è debole; e che la prova dell'asserto $J = 0$ offra a Maxwell qualche difficoltà è confermato dalla bozza della memoria, in cui aveva scritto: «J cresce continuamente o decresce con il tempo, se ρ rimane costante, cosa che nessuna quantità fisica può fare. Perciò J è zero......»[20]. È una giustificazione fisica altrettanto debole.

Nel Trattato (§. 783) si ripetono gli stessi argomenti: Maxwell afferma che la condizione (18) è praticamente soddisfatta, perciò « $\nabla^2 \varphi$, che è proporzionale alla densità volumica dell'elettricità libera, è indipendente dal tempo; J è allora una funzione lineare del tempo, o una costante, o zero, e si e si potranno perciò tralasciare φ e J nel considerare perturbazioni periodiche».

Tralasciare J equivale a porre $\nabla \cdot \underline{A} = 0$, condizione di trasversalità per le onde $\underline{A}$. In linguaggio moderno, si può dire che il problema non risolto da Maxwell era di imporre al potenziale vettore la condizione di 'gauge' $\nabla \cdot \underline{A} = 0$ ('gauge di Coulomb' o 'trasversale').

Ciò che manca, nella trattazione della Dynamical Theory, è la trasformazione del potenziale scalare:

---

[19] J.C. Maxwell, Scientific Papers, cit., pp. 581 - 82.

[20] P.M. Heimann, Maxwell and the Modes of Consistent Representation, Archive for History of Exact Science, vol, 6, n.3,1970, pp. 191 - 92.

$$\varphi' = \varphi + \dot{\chi} \qquad (20)$$

che è richiesta dalla invarianza del campo: $\boldsymbol{E} = - \quad \varphi - \dot{\boldsymbol{A}}$. (per la (12), $\underline{B} = \quad \leftrightarrow \underline{A}$ è invariante)

Nella trasformazione completa, φ' (e non φ) soddisfa l'equazione di Poisson, e poiché φ' è indipendente dal tempo, è soddisfatta anche la condizione (16)

$$\frac{d}{dt}(\varphi + \chi) = \frac{d}{dt}\varphi' = 0 \qquad (21)$$

Nella gauge di Coulomb, costantemente perseguita da Maxwell, il potenziale scalare soddisfa l'equazione di Poisson, ma non sembra questo il motivo per cui Maxwell, nella dimostrazione ora vista, ha imposto al potenziale scalare l'equazione di Poisson (19).

La (19) non deriva da una gauge, ma dalla ordinaria elettrostatica; Maxwell riteneva che si propagassero solo i campi di radiazione, e non i campi elettrici e magnetici, associati a cariche statiche e correnti stazionarie. Che tutti i campi si propagano alla velocità della luce è una realizzazione di Hertz.

La dicotomia tra il potenziale vettore , stato elettrotonico che si propaga nell'etere, e il potenziale scalare, associato all'azione istantanea a distanza della elettricità statica, provocò vivaci discussioni nelle riunioni annuali della British Association, nel 1888 e nel 1890[21]; e si giunse alla estromissione dei potenziali e.m. dalle equazioni fondamentali di Maxwell per opera essenzialmente di O. Heaviside (1885) ed H. Hertz (1890).

VI - Il rango dei potenziali e.m.

Oliver Heaviside eliminò i potenziali maxwelliani perché riteneva che solo i campi si propagano fisicamente, e non i potenziali; ma anche perché in questo modo risolveva radicalmente il problema della condizione di trasversalità per le onde e.m.[22]. Per le onde luminose, Stokes aveva dimostrato che nessuna varietà di etere, tra quelle proposte, aveva saputo giustificare l'assenza di vibrazioni longitudinali, un fatto sperimentalmente ben provato.

Lo stesso problema si ripresentava per la teoria elettromagnetica della luce, e Maxwell, dopo un tentativo infruttuoso di dedurre riflessione e rifrazione per onde elastiche non longitudinali, nella Dynamical Theory, ammise che tanto la scienza ottica quanto quella e.m. «sono in difetto, quando si chiede loro di affermare o negare l'esistenza di vibrazioni longitudinali».

Questo, almeno in parte, è il motivo per cui Maxwell, nella "Note on the Electromagnetic Theory of the Light" del 1868[23], aveva anticipato Heaviside abbandonando i potenziali, dando così la sua più economica derivazione delle equazioni d'onda e.m.

Recuperò la concezione delle linee di forza che aveva esposto nel primo grande lavoro e.m., 'On Faraday's Lines of Force', e introdusse, con quattro teoremi esplicativi, questo sistema minimo di equazioni:

---

[21] T. Hirosige, Origin of Lorentz Theory of Electrons, Historical Studies on Physical Sciences, 1966, pp. 429 - 76.

[22] O. Heaviside, Electrical Papers, 2 voll., Londra, 1982, I, pp. 429 - 76.

[23] J.C. Maxwell, Scientific Papers, cit., pp. 137 - 41.

$$\times \underline{H} = 4\pi \underline{\rho} \qquad \times \underline{E} = -\mu \underline{H}$$

$$\underline{C} = \underline{\dot{D}} \qquad \underline{E} = k\underline{D} \tag{A}$$

Maxwell considerò onde piane, polarizzate linearmente, che si propagano in direzione *z*. Tutte le grandezze dipendono da *z*, oltre che dal tempo *t*: infatti tutte le porzioni di un qualunque piano ortogonale a *z* sono nello stesso stato, allo stesso istante. Si verifica immediatamente la trasversalità delle onde. Se infatti il campo elettrico si scrive:

$$\underline{E} = \underline{E}_0 \cos\frac{2\pi}{\lambda}(\chi - vt) \tag{B}$$

dalle (A) si ottiene $E_0^z = 0$ per la componente del campo elettrico parallela al moto ondoso, e $H_0^z = 0$ per l'analoga componente del campo magnetico. Si suppone che $\underline{E}$ ed $\underline{H}$ siano polarizzate nella direzione *x,y* ; e Maxwell deduce facilmente l'equazione d'onda per H_y :

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \frac{4\pi}{k}\mu\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \tag{B}$$

e poi per $E_x, D_x, \dot{D}_x$; le soluzioni complete sono della forma (B).

Questa impostazione è stata riscoperta da Heaviside, da J.J. Thomson e da molti autori di manuali didattici.

Maxwell invece non perseverò per questa strada e, nel Trattato, reintegrò le 20 equazioni di Dynamical Theory, con qualche modifica[24].

Nel Trattato (§. 65) si legge che si sarebbero potute eliminare alcune relazioni, ma che almeno esprimere ogni relazione nota era più importante della compattezza delle formule. «Eliminare una quantità che esprime una idea utile sarebbe una perdita, più che un vantaggio».

Tra queste quantità Maxwell annoverava in primo luogo il potenziale vettore. Secondo Hertz, la ridondanza delle formule maxwelliane, era dovuta alla presenza di «idee rudimentali», che sarebbero state al loro posto solo nella vecchia teoria dell'azione a distanza. Un esempio era dato dal predominio del potenziale vettore nelle equazioni fondamentali[25].

Agli inizi della sua sperimentazione a Karlsruhe, Hertz aderiva alla concezione helmholtziana di una dualità di forze: forze elettrostatiche istantanee, e forze elettrodinamiche con velocità di propagazione finita.

L'interpretazione dei fatti sperimentali, prodotti in laboratorio, lo indusse a tornare alla concezione della unità delle forze, già avanzata nel 1884; e non ebbe esitazione nell'affermare che tutte le forze elettriche si propagano con la velocità della luce. «La divisione della forza elettrica in una parte elettrostatica ed una e.m., non comporta, in casi generali, alcun significato fisico, e neppure una

---

[24] La modifica più importante è la correzione della 'equazione dell'elettricità libera', che lega lo spostamento elettrico $\underline{D}$ alla densità di carica ρ. Nella Dynamical Theory appare nella forma $\underline{D} = -\rho$, in contraddizione con la $\underline{D} = \rho$ che correttamente si deduce da $\underline{J} = \rho$ e $\times \underline{H} = 4\pi(\underline{J} + \underline{D})$. La contraddizione deriva dal fatto che in Maxwell, accanto alla concezione tradizionale della carica elettrica, si faceva strada l'idea che la carica elettrica è un epifenomeno del campo che si manifesta nella discontinuità di $\underline{D}$, al confine fra conduttori e dielettrici.

[25] H. Hertz, On the fundamentals Equation of Electromagnetics for Bodies at Rest, Electric Waves, Dover, N.York, p. 236.

grande utilità matematica; cosicché, invece di seguire le vecchie analisi, sarà opportuno evitarle»[26].

S'impose allora la concezione che i potenziali e.m. hanno il rango secondario di ausili matematici ('Rechengrössn'); finché, nel 1959, D. Bohm e Y. Ahronov non risollevarono la questione di un possibile significato fisico dei potenziali[27].

---

[26] H.Hertz, cit., p. 196.

[27] H.D. Semon, Thoughts on the magnetic vector potential, American Journal of Physics, 64, 11, 1990, pp. 1361 - 69.