

Riflessioni su un fondamentale articolo einsteiniano del 1905

Vittorio Banfi

E' generalmente ritenuto che il teorema dell'inerzia dell'energia sia stato enunciato, per la prima volta nella storia della scienza, da Einstein in un articolo dal titolo "Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?" (bibl. 1). In esso si afferma nella conclusione che «la massa di un corpo è una misura del suo contenuto di energia». Scopo di questa nota è quello di analizzare questo interessante articolo.

Esso si basa sulla TRR (teoria della relatività ristretta) che il Nostro autore aveva annunciato pochi mesi prima, al mondo scientifico, con la sua assai più celebre memoria del 1905 (bibl. 2). Il ragionamento si fonda quindi su un confronto fra l'energia totale e l'energia cinetica di un corpo e il contenuto energetico della radiazione elettromagnetica emessa dal corpo stesso, in due sistemi di riferimento inerziali S ed S' , nella consueta configurazione tipica illustrata in Figura 1.

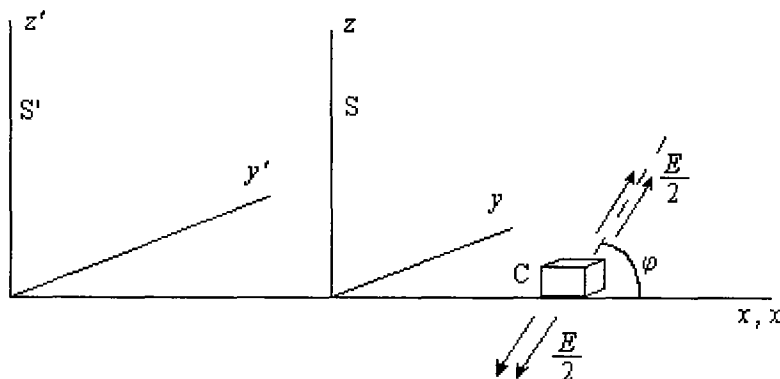


Figura 1 - Sistemi inerziali S ed S' in configurazione tipica (direzioni x ed x' coincidenti). Il corpo emittente C è solidale con il sistema S .

Nel sistema S il corpo è in quiete mentre rispetto al sistema S' il corpo si muove di moto rettilineo uniforme con velocità costante v . Un treno d'onde piane luminose monocromatiche, avente durata finita (ossia un flash), si propaga nel sistema S in direzione tale da formare un angolo φ con l'asse positivo x (supponiamo per semplicità che i raggi d'onda abbiano direzioni parallele al piano x,z). Essendo E il

valore finito dell'energia del treno d'onda, se trasformiamo detta energia nel sistema S' avremo, per il ben noto fenomeno dell'aberrazione relativistica,

$$E' = E \frac{1 - \beta \cos \varphi}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad [\text{con } \beta = \frac{v}{c}]. \quad (1)$$

Stabilita questa relazione di base supponiamo che il corpo emittente possieda l'energia totale E_0 ; sia E_0' l'energia totale rispetto ad S'. Se questo corpo emette, secondo l'angolo φ (rispetto all'asse x), nei due sensi opposti in modo uguale, l'energia $E/2$ (misurata nel sistema S), allora il valore dell'energia totale sarà, in S,

$$E_1 = E_0 - \left(\frac{E}{2} + \frac{E}{2} \right) = E_0 - E \quad (2)$$

mentre in S', per la (1),

$$E_1' = E_0' - \left(\frac{E}{2} \frac{1 - \beta \cos \varphi}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{E}{2} \frac{1 + \beta \cos \varphi}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = E_0' - \frac{E}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3)$$

Sottraendo membro a membro la (2) dalla (3) otteniamo

$$E_1' - E_1 = E_0' - E_0 - E \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right). \quad (4)$$

Nella (4), che è correttamente dedotta seguendo la TRR, con E_0 ed E_0' è indicata l'energia totale del corpo prima dell'emissione, relativa ad S ed S' rispettivamente, con E_1 ed E_1' l'energia totale dopo l'emissione. A questo punto Einstein "annuncia" implicitamente (cioè senza dirlo) la tesi del teorema in istudio. Ricostruiamo il ragionamento non espresso; se la massa del corpo è variata, rispetto ad S, passando da prima a dopo l'emissione dal valore m_0 al valore m_1 , l'energia cinetica rispetto a S' è diventata¹

$$T_0' = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \quad \text{prima dell'emissione,} \quad (5)$$

$$T_1' = m_1 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \quad \text{dopo l'emissione.} \quad (6)$$

Le (5) e (6), come vedremo più tardi, conducono subito alla tesi del teorema (che si deve invece dimostrare). Ma Einstein suggerisce, anziché le (5) e (6), un'ipotesi che dimostreremo del tutto equivalente. Citiamo il testo: «É allora chiaro che $E' - E$ differisce dall'energia cinetica T' , riferita al sistema S', solo per una costante

¹ Dato il fatto dell'emissione, non potrà che variare l'energia cinetica e quindi m .

additiva C , che dipende dalle costanti arbitrarie di E' ed E . Poiché C non varia durante l'emissione, possiamo porre

$$E_0' - E_0 = T_0' + C \quad E_1' - E_1 = T_1' + C \quad (7)$$

Fin qui la citazione "verbatim" dall'articolo di Einstein; sono solo stati sostituiti i simboli H, E, K con i più consueti E', E, T' . La memoria in oggetto prosegue deducendo, dalle (7), la seguente

$$(E_0' - E_0) - (E_1' - E_1) = T_0' - T_1'$$

e per la (4)

$$(E_0' - E_0) - (E_1' - E_1) = T_0' - T_1' = E \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right].$$

Poiché

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cong 1 + \frac{v^2}{2c^2},$$

trascurando i termini aggiuntivi $O(\frac{1}{c^{2n}})$ [con $n > 1$], ricaviamo quindi

$$T_0' - T_1' = \frac{Ev^2}{2c^2}.$$

La conclusione dell'articolo è «se un corpo emette un'energia E sotto forma di radiazione, la sua massa diminuisce di $\frac{E}{c^2}$ ». Tutto ciò è esatto; sono stati omissi, per brevità, i seguenti gradini dimostrativi e cioè

$$T_0' - T_1' = \frac{1}{2}(m_0 - m_1)v^2$$

cosicché

$$\frac{1}{2}(m_0 - m_1)v^2 = \frac{Ev^2}{2c^2}$$

e dunque

$$m_0 - m_1 = \frac{E}{c^2}.$$

Ma la suddetta dimostrazione di Einstein è affetta da una manchevolezza logica. Una petizione di principio, infatti, come prima si è accennato, è stata notata e dimostrata da H. E. Ives (bibl. 3); essa è anche riportata in un testo di M. Jammer (bibl. 4). Prima di esaminare il ragionamento di Ives è bene osservare che nel 1907, cioè solo due anni dopo, M. Planck (bibl. 5) aveva già affermato in un suo scritto:

«Einstein ha già tratto essenzialmente la stessa conclusione mediante l'applicazione del principio di relatività ad un processo di radiazione speciale; comunque sotto un'assunzione, che si può concedere solo come prima approssimazione, ossia che l'energia totale di un corpo è composta additivamente dalla sua energia cinetica e dalla sua energia totale riferita ad un sistema con cui esso è a riposo». In termini matematici Planck dunque critica le (7). Vediamo ora come Ives conduce la critica. Sottraendo, membro a membro, la (6) dalla (5), deduciamo

$$T_0' - T_1' = (m_0 - m_1)c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right]$$

ossia anche

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 = \frac{T_0' - T_1'}{(m_0 - m_1)c^2}.$$

Ritornando alla (4) (del tutto corretta) sostituiamo in essa il membro a sinistra della precedente; quindi

$$E_1' - E_1 = E_0' - E_0 - E \left(\frac{T_0' - T_1'}{(m_0 - m_1)c^2} \right). \quad (8)$$

Quest'ultima è ricavabile dalle due seguenti [dove C è la costante delle (7)]:

$$E_0' - E_0 = \frac{E}{(m_0 - m_1)c^2} (T_0' + C) \quad E_1' - E_1 = \frac{E}{(m_0 - m_1)c^2} (T_1' + C) \quad (9)$$

semplicemente sottraendo membro a membro la seconda dalla prima così

$$(E_0' - E_0) - (E_1' - E_1) = \frac{E}{(m_0 - m_1)c^2} (T_0' - T_1').$$

Ecco quindi ottenuta la (8). Ma le (9) sono le (7) allorché risulti

$$\frac{E}{(m_0 - m_1)c^2} = 1. \quad (10)$$

Facciamo allora il punto; se si ammettono le (7) (che a loro volta discendono dalle (5) e (6)), automaticamente si introduce la tesi. In altre parole si assume la (10) in una versione formalmente un po' diversa [ossia le formule (7)] a provare l'enunciato, che è contenuto nello stesso titolo dell'articolo. Ci troviamo di fronte ad una "petizione di principio", intendendosi per "principio richiesto" la tesi stessa che si doveva dimostrare.

Tutto ciò che precede non sminuisce, naturalmente, l'importanza del contributo offerto da Einstein su questo punto, dal momento che la relazione tra massa ed energia è una conseguenza necessaria della teoria della relatività e si può dedurre dalle ipotesi fondamentali della TRR con vari metodi (sviluppati più tardi da lui

stesso in memorie e testi). Al contrario si vuole indicare al lettore questo breve scritto come modello di processo d'intuizione fisica, nella sua forma più alta. Esaminiamo infatti le ultime quattro righe dell'articolo in questione: «Non è da escludere che la teoria trovi conferma nel caso di corpi a contenuto energetico fortemente variabile, come i sali di radio. Se la teoria è conforme ai fatti, allora la radiazione trasporta inerzia tra corpi emittenti e corpi assorbenti». Einstein immaginò un atomo, o qualche altra particella, che decadesse radioattivamente emettendo radiazione luminosa e/o raggi gamma. Oggi conosciamo molti esempi di questi decadimenti, ma nel 1905 lo studio della radioattività e di decadimenti simili a quello immaginato da Einstein non erano stati ancora analizzati in dettaglio. Ma ciò che intuì Einstein, e che appare chiaro anche dalla frase citata, è che quando una particella radioattiva decade in radiazione luminosa, ad esempio, questa trasformazione avviene naturalmente: un po' di massa si trasforma in energia raggianti.

Infine, negli anni 1905-1920, restava ancora aperta la questione se tutta la massa fosse trasformabile, senza residuo, in energia. La risposta, definitiva e affermativa, venne nel 1933 da Blackett e Occhialini e più tardi da Kemplerer con l'esperimento dell'annichilazione della coppia elettrone-positone (bibl. 4).

Bibliografia

1 – A. Einstein (1905), “Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?”, *Annalen der Physik*, sez. 4, XVIII, pp. 639-41. La traduzione italiana “L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di energia?” si trova in: A. Einstein (1988), *Opere scelte*, Bollati Boringhieri.

2 – A. Einstein (1905), “Zur Elektrodynamik bewegter Körper”, *Annalen der Physik*, sez. 4, XVII, pp. 891-921.

3 – H. E. Ives (1952), *Journal of the Optical Society of America*, 42, pp. 540-543.

4 – M. Jammer (1974), *Storia del concetto di massa*, Feltrinelli.

5 – M. Planck (1907), *Sitz. der Preuss. Akad. Wiss.*, Physik 13.

