

# I principi nella meccanica di d'Alembert

*Francesco Bevacqua*

## L'organizzazione della teoria meccanica di d'Alembert

Ai tempi di Newton non c'era uniformità di pensiero. La teoria fisica di Newton si era affermata produttivamente su quella cartesiana, ma non per questo era esente da critiche. Spesso ci si dimentica di un terzo approccio quello di Leibniz (forse perché non scrisse mai opere sistematiche di meccanica) che, per quanto ridotto si pone come alternativo alle due precedenti formulazioni.

D'Alembert si pone all'interno di questo dibattito con un atteggiamento molto vicino (anche se a modo suo) alla proposta di Leibniz. Non a caso la stessa parola dinamica che lui inserisce nel titolo del suo libro era stata conosciuta dallo stesso Leibniz. Nella prefazione del *Traité de Dynamique* (1743), viene indicato (come era d'uso all'epoca) il programma generale; meglio esplicitato nei capitoli successivi.

Il primo concetto fondante della meccanica di d'Alembert è il *movimento* (e le sue proprietà generali). In questo crea già un primo distinguo con i cartesiani, che invece consideravano come concetto fondante della meccanica *l'estensione* e dopo l'idea di moto (inteso come spazio più tempo). Lo stesso concetto di massa per i cartesiani era l'estensione dello spazio a densità diversa. Per d'Alembert bisogna distinguere due tipi d'estensioni (la prima, impenetrabile è quella che definiamo correntemente massa l'altra e quella che definiamo estensione quella, cioè, che ci permette di misurare la distanza tra i corpi. Il rapporto tra la geometria e la meccanica viene specificato dal loro diverso modo che hanno di trattare il moto: la geometria considera il moto solo come traiettoria spaziale, la meccanica considera anche il tempo impiegato dal mobile a percorrere lo spazio. Notiamo che la massa, ricordata in precedenza, da d'Alembert non viene considerata esplicitamente. Questa facilità a trascurare la massa è una caratteristica del pensiero di d'Alembert.

La definizione di forza acceleratrice è data nel seguente modo: «...[intenderemo] per forza acceleratrice la quantità alla quale l'accrescimento della velocità è proporzionale» (*Traité*, pag.18-19); mentre s'intenderà in generale «.. per la forza motrice, il prodotto della massa che si muove per l'elemento della sua velocità o, che

è la stessa cosa, per lo spazio percorso in un istante dato in virtù della causa che accelera o ritarda il movimento; per forza acceleratrice noi intenderemo semplicemente l'elemento della velocità» (*Traité*, pag.19). In queste ultime due definizioni si noti che, come si faceva nel 1700, si considera "l'elemento di velocità" che è da intendere come la variazione di velocità (o velocità acquisita partendo da velocità nulla) cui anche Newton nel suo enunciato pone uguale la forza:  $f = m\Delta v$ ; ma in realtà egli considera la variazione nell'unità di tempo, il che fa recuperare la vera accelerazione.

Si noti che vari commentatori interpretano la forza acceleratrice  $\phi$  come introdotta dalla relazione  $\phi dt = du$  tra il tempo  $t$  e la velocità  $u$ , cioè tra soli elementi cinematici. D'Alembert ragionerà su  $\phi$ , quasi dimenticandosi della massa che d'altronde non definisce mai. Ciò è coerente con la sua pretesa di "tirare tutti i principi della Meccanica dal movimento solamente."

Ma chiaramente ciò non è sufficiente a dargli una forza o un'energia o una quantità di moto. Questo è un difetto della sua formulazione. Queste ambiguità nelle definizioni delle grandezze fondamentali (accelerazione, forza) rendono non semplice la comprensione dei testi di d'Alembert come d'altra parte, in generale, degli autori del 1700 che mantengono spesso queste ambiguità.

## **Il Principio di Inerzia**

Questo principio segna il passaggio tra la fisica moderna e la fisica "antica" (come affermazione della equivalenza tra la quiete ed il moto). Era stato enunciato da Cartesio e ripetuto da Newton e Leibniz. D'Alembert lo ripete nel seguente modo: «...sarà sempre un fatto incontestabile che una volta supposta l'esistenza del moto, la legge più semplice che un mobile può osservare nel proprio moto è la legge di uniformità; ed è quella che di conseguenza esso deve seguire.» (*Traité*, p. IX) Quindi d'Alembert l'accetta come principio, ma ne vuole chiarire i fondamenti.

La versione che d'Alembert dà del *Principio di Inerzia* è di difficile interpretazione sia per la complessità di questa versione, sia per il rapporto fisica-metafisica che viene implicato e, non ultimo, anche per la forma in cui viene presentato. Esso è scomposto in due casi, la quiete ed il moto; e per ogni caso si dà una frase non equivalente all'altro; in mezzo poi c'è un "corollario" ed una definizione. Abbiamo tentato di ricostruirlo seguendo la logica dell'esposizione contenuta nel *Traité*.

### **« I LEGGE**

3. Un corpo in riposo vi persisterà a meno che una causa estranea non lo tiri via. Poiché un corpo non può mettersi in moto da solo.» (p. 3)

In questo enunciato d'Alembert parla di "un corpo". Qui si nota una differenza con la definizione data da Newton ("ogni corpo ..."), dove si parla platonicamente di tutti i corpi d'ogni tempo e di ogni luogo; in d'Alembert invece la situazione descritta appare non astratta, tipica di una situazione sperimentale.

Poi però d'Alembert ripete il concetto del "persevera" di Newton con il suo verbo "persiste", anche se questi verbi non hanno contenuto fisico, ma morale. Infine d'Alembert conclude la prima legge dicendo: «... a meno che una causa esterna non lo tiri via.» Questa affermazione è molto simile, ma differente da quella di Newton «...finche' non interviene una forza esterna a modificare tale stato»; infatti qui Newton parla scorrettamente di forza, cioè di una grandezza fisica di cui non ha ancora dato la definizione; il concetto verrà precisato solo con il suo II principio (a meno di intendere la "forza" come "forza-causa" metafisica, data a priori della teoria fisica).

D'Alembert giustamente non parla delle forze; al costo d'essere generico, parla di "causa esterna". Però la parola "causa" non dà problemi se ci si riferisce solo ad interazioni di contatto, così come di solito fa d'Alembert; allora la causa è un altro corpo urtante. Ma se d'Alembert si riferisce ad interazioni generiche, così come lascia pensare il testo, allora la parola "causa" lega il suo principio alla metafisica, alla quale solamente appartiene il discorso sulle cause.

D'Alembert sente il bisogno di chiarire la parola; allora tenta di definirla, ma anche lui dopo la I Legge, cioè dopo che l'ha usata in questa I legge. E comunque d'Alembert non dà una definizione valida di questi concetti perché entra in un circolo vizioso:

«5. Si chiama in generale *potenza* o *causa motrice* tutto ciò che obbliga un corpo a muoversi.»

Questo concetto è lo stesso espresso dalla prima legge, solo che la definizione ha ribaltato il definens con il definendum. Quindi i problemi su indicati restano irrisolti. (Le due dizioni, *potenza* o *causa motrice*, sono tipicamente leibniziane, anche se in Leibniz esse corrispondono al moderno concetto di energia e non di forza).

Notiamo infine che la prima legge termina curiosamente con l'affermazione: « .... poiché un corpo non può mettersi in moto da solo». In buona logica il "poiché" indica che la prima frase discende dalla seconda; la quale quindi sarebbe più generale della prima; perciò il vero principio sarebbe la seconda frase e non la prima. Allora la ricostruzione logicamente precisa del periodo della prima legge sarebbe la seguente: "Un corpo non può mettersi in moto da solo. Quindi se non c'è una causa esterna che lo disturba, un corpo in riposo vi persisterà." Ma la frase che ora è antecedente e che ora è diventata la più importante (e difatti d'Alembert l'enuncia anche a p. VIII, quando incomincia a parlare di dinamica) in realtà è un'espressione del principio di ragione sufficiente; quindi essa esprime sì un'affermazione generalmente sperimentale, ma soprattutto un principio euristico. (Si noti che l'espressione di d'Alembert di pag. IX, citata precedentemente invoca la "semplicità" per stabilire la legge d'inerzia; qui "semplicità" è equivalente al

principio di ragion sufficiente). Ora però, da un principio euristico non discende deduttivamente una affermazione positiva di fatto; né, tanto meno, ne può discendere un'affermazione sulla causa, che non veniva nemmeno menzionata nella attuale frase antecedente. Quindi il periodo di d'Alembert non è coerente logicamente, sia per il poiché messo in mezzo al principio, sia perché ricostruendo la sequenza logica delle frasi, esse non risultano legate deduttivamente. In più, sorprende il fatto che, tra prima e seconda legge d'Alembert pone stranamente un "Corollario":

«4. Si vede da qui che un corpo messo in moto da una causa qualsiasi, non potrà da solo accelerare né ritardare [il moto]».

In realtà non è affatto chiaro come questa affermazione possa essere un corollario, cioè un'ulteriore affermazione facilmente dedotta dalla sua prima legge. Primo perché una cosa è la statica (la prima legge), una cosa la dinamica di cui tratta il corollario; secondo perché la seconda frase del corollario è un'altra espressione del principio di ragion sufficiente;

« II LEGGE 6. Un corpo una volta messo in movimento da una causa qualsiasi, deve persisterci sempre uniformemente ed in linea retta, fino a quando una nuova causa, diversa da quella che l'ha messa in movimento, agirà su di lui; cioè, a meno che una causa diversa dalla motrice agirà sul corpo, questo si muoverà indefinitamente in linea retta e percorrerà spazi uguali in tempi uguali.» (p. 4)

Qui c'è un'altra novità importante rispetto a Newton; dicendo "una volta ..." d'Alembert non afferma che è sempre possibile conoscere empiricamente quando con esattezza un corpo è in movimento e quando no: infatti sappiamo che la cosa è impossibile, sia per gli errori sperimentali sul valore  $v = 0$ , che per la difficoltà di scegliere un dato sistema inerziale con precisione assoluta. Quindi, l'affermazione che un corpo è in movimento dipende da delle nostre decisioni-convenzioni, secondo cui la misura della velocità è sicuramente  $\neq 0$  e il sistema è con buona approssimazione inerziale; similmente all'affermazione su quando si sa sperimentalmente che un corpo non è in moto. Però questa novità viene contraddetta da quanto d'Alembert afferma ancor prima della prima legge: «ora un corpo è necessariamente nello stato di riposo o in quello di movimento» (p. 3); il che afferma proprio la capacità di decidere sempre ("è necessariamente") quando  $v \neq 0$  e quando no.

Comunque, dal punto di vista logico, tutta la II Legge appare una chiara conseguenza del Corollario della I Legge; in quanto non fa che specificare ulteriori particolari tecnici di quando il corpo è in moto uniforme. Notiamo inoltre che anche la II Legge, similmente alla I Legge, ha un doppio enunciato. Ma è curioso che le due frasi della II legge siano con lo stesso contenuto fisico (e metafisico sulle cause); salvo un cambiamento d'ordine dei vari pezzi delle due frasi e una variazione nella maniera di indicare il moto uniforme. Qui la seconda frase esprime

lo stesso concetto della prima, ma vedendo il moto come un processo composto da passi successivi; mentre il primo enunciato esprime lo stesso concetto (per tutti i tempi e tutti i luoghi), dell'enunciato newtoniano.

Giustamente d'Alembert le lega con un "cioè". Ma non si capisce il perché di questa ripetizione. Per il resto, la prima e la seconda frase del testo della seconda legge sono simili, benché più prolisse, a quella newtoniana. In più d'Alembert aggiunge una parola ("indefinitamente") che suggerisce la possibilità reale del moto perpetuo; ancora una volta d'Alembert non ha problemi a lasciare un'idea metafisica dentro l'enunciato di un principio fisico.

### Principio dell'equilibrio

Il principio dell'equilibrio viene presentato a p. 37 del *Traité*, curiosamente come teorema:

«Se due corpi, le cui velocità sono in ragione inversa alle rispettive masse, hanno direzioni opposte, in modo tale che l'uno non possa muoversi senza spostare l'altro, allora tra questi due corpi si avrà equilibrio.» (*Traité*, p.37).

Osserviamo che:

- 1) Evidentemente d'Alembert vuole vedere la statica (equilibrio) come caso particolare della dinamica.
- 2) Siccome il principio si conclude con l'affermazione di un equilibrio, le velocità di cui si parla non possono che essere virtuali. (Se invece le velocità fossero effettive si avrebbe il fenomeno dell'urto; per farsi equilibrio, cioè per fermarsi, i due corpi debbono allora essere perfettamente plastici detto in termini moderni); Allora noi qui riconosciamo il principio dei lavori virtuali applicato alle macchine semplici:

$$\sum_i f_i \delta s_i = 0, \sum_i m_i g \delta s_i = 0,$$

che in un tempo  $dt$  dà

$$\sum_i m_i g v_i = \sum_i m_i v_i = 0$$

Quest'ultima è l'idea tradizionale dei cartesiani, per cui il principio della conservazione della quantità di moto vale anche per i moti vincolati: un errore, salvo quando le forze sono ad uguale accelerazione costante; o sono, come pensavano Newton e d'Alembert perfettamente duri; che, cioè, non hanno affatto elasticità. Ma dal seguito si vedrà che non è questo il fenomeno in mente a d'Alembert.

La sua "dimostrazione" non è che l'esame di alcuni casi, dal più banale ( $mv$  uguali) a quello con masse che stanno in un rapporto razionale o irrazionale. Essa non fa che appellarsi sempre al principio di ragione sufficiente: «non c'è ragione per cui l'uno si muova piuttosto che l'altro ... » (pag. 37), senza fare riferimento a prove o a casi sperimentali. E conclude: «Da ciò sorge questo assioma, che corpi aventi quantità di moto uguale e opposta si fanno equilibrio.» (p. 39-40). Dove ora chiama "assioma" quello che all'inizio aveva enunciato come tesi di un teorema e ancor prima "principio". Il tutto allora prende senso se per "dimostrazione" intendiamo supporto argomentativo della tesi, di tipo tentativo-intuitivo (e anche metafisico).

### **Il principio di d'Alembert**

Nel cap. II l' "Esposizione del principio" è articolata in più punti: introduzione al principio, definizione di velocità vettoriale e definizione di quantità di moto, esposizione del problema generale dell'urto e, infine, soluzione di questo.

d'Alembert comincia con l'osservare che i corpi possono agire fra loro in tre differenti modi:

«I corpi agiscono gli uni su gli altri solo in tre modi a noi noti: o attraverso un impulso immediato, come nell'urto ordinario; o per mezzo di qualche corpo interposto tra loro ed al quale sono attaccati in qualche modo; o, infine, per attrazione reciproca, così come il Sole ed i pianeti nel sistema Newtoniano. Gli effetti di quest'ultima specie d'azione sono stati sufficientemente esaminati, mi limiterò a trattare del moto dei corpi che si urtano in un modo qualunque, e di quelli che si tirano con dei fili o aste inflessibili.» (p. 49).

In effetti l'attrazione gravitazionale era stata già criticata da d'Alembert come aristotelica; Elegantemente egli non ripete la critica, comunque esclude quella interazione dalla sua attenzione concentrandosi solo su quelle dei primi due tipi di interazione.

Inoltre dichiara il suo programma di lavoro «Io mi fermerò tanto più volentieri su quegli argomenti dei quali i più grandi geometri tuttora non hanno risolto che un piccolo numero di problemi, e [con ciò] spero, per il metodo generale che vado a dare, di mettere tutti quelli ai quali sono noti i principi del calcolo e della meccanica, nelle condizioni di risolvere i più difficili problemi di quel tipo ». (p. 49-50)

#### **«PROBLEMA GENERALE**

Sia dato un sistema di corpi disposti in un modo qualunque gli uni rispetto gli altri, e supponiamo di imprimere a ciascuno di essi un particolare moto, che però non può essere compiuto a causa dell'interazione con gli altri corpi; trovare, in queste condizioni, il moto che ogni singolo corpo deve prendere.

## SOLUZIONE DEL PROBLEMA

Siano A, B, C, .. ecc, i corpi che compongono il sistema, e supponiamo che siano stati loro impressi i moti  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , e che essi siano costretti, a causa dell'interazione reciproca, di cambiarsi nei moti  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ... ecc.; è chiaro che si può riguardare il moto  $a$ , impresso al corpo A, come composto dal moto  $a$  che egli ha [effettivamente] preso e di un altro moto  $\alpha$ . Allo stesso modo possiamo riguardare i moti  $b$ ,  $c$ , ecc. come composti [rispettivamente] dai moti  $b$  [e]  $\beta$ ;  $c$  [e]  $\kappa$ ; ecc. Ne segue che il moto dei corpi A, B, C, ecc. tra loro sarebbe stato lo stesso se al posto degli impulsi [dei moti]  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ecc. si fossero date le coppie di impulsi [dei moti]  $a$  [e]  $\alpha$ ;  $b$  [e]  $\beta$ ;  $c$  [e]  $\kappa$ ; ecc. Ora, per ipotesi, i corpi A, B, C, ecc.; sono andati a prendere i moti  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ecc., dunque i moti  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\kappa$  devono essere tali da non disturbare affatto i moti  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ecc.. Cioè, se i corpi avessero ricevuto soltanto i moti  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\kappa$  ecc., questi avrebbero dovuto distruggersi mutuamente ed il sistema rimanere a riposo.

Da ciò segue il principio seguente [che serve] per trovare il moto di più corpi che interagiscono gli uni su gli altri.

Decomposto ognuno dei moti  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ecc., impressi ad ogni corpo, in [coppie di] altri due  $a$  [e]  $\alpha$ ;  $b$  [e]  $\beta$ ;  $c$  [e]  $\kappa$  ecc., tali che se ai corpi fossero stati impressi solo i moti  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ecc., essi avrebbero potuto conservare questo moto senza disturbarsi reciprocamente; e se si fossero loro impressi solo i moti  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\kappa$  il sistema sarebbe restato a riposo.

[Allora] è chiaro che  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ecc. sono i moti che questi corpi prenderanno in virtù della loro azione. Quello che era da trovare.»

E' evidente dal testo che il famoso "Principio di d'Alembert" non ha nulla a che fare con quella meccanica delle forze continue, alla quale la didattica universitaria di Meccanica Razionale lo associa; esso riguarda solo la meccanica dell'urto. Se esso sia sufficiente allo scopo proposto o no è una questione complessa<sup>1</sup>.

Inoltre questo "Principio", noto che è indicato con questo nome anche da d'Alembert non è l'enunciato di un assioma, il testo che abbiamo letto è la risoluzione di un "problema generale"; o meglio il principio è il metodo di soluzione di un problema universale di urto o di moto vincolato; pertanto esso è un principio metodologico per indirizzare la ricerca teorica o la soluzione di problemi. Cioè un tipo di affermazione che non è mai indicato dalla letteratura sull'argomento, che preferisce giocare sull'equivoco dato dalla parola isolata "principio" per farlo intendere come principio-assioma.

## Conclusioni

Riassumendo: questi tre principi vengono considerati sufficienti a fondare la meccanica. Questo risponde alla richiesta iniziale di ridurre questi al minor numero

---

<sup>1</sup> Studiata recentemente da A. Drago

possibile « ... avendo istituito, sulla base di essi soli, tutte le leggi del moto, in circostanze qualsivoglia, come ho avuto cura di fare nel mio *Traité*».

E' evidente la differente impostazione di d'Alembert rispetto a quella di Newton. Per quest'ultimo le forze sono centrali nella fisica, come pure è centrale il tipo di matematica da utilizzare (le equazioni differenziali). Mentre in d'Alembert il rifiuto della forza come ente metafisico è la premessa per rendere la meccanica razionale cioè esprimibile secondo le leggi della razionalità universale «Tutto ciò che noi vediamo distintamente nel moto di un corpo, e che percorre un certo spazio impiegando per ciò un certo tempo. Da questa sola idea si dovranno estrarre i principi della meccanica quando questi avranno una dimostrazione netta e precisa, così non ci sarà sorpresa se in conseguenza di questa riflessione ho potuto, per così dire, isolare le cause motrici, [l punto di vista sulle cause motrici] per non considerare che unicamente il movimento che esse producono; che ho interamente proscritto [eliminato] le forze inerenti ai corpi in movimento, oscure e metafisiche in grado solo di riportare le tenebre su di una scienza chiara in sé» (p. XVI) Come si vede la rifondazione d'Alembertiana della meccanica è deliberatamente e programmaticamente ben diversa da quella newtoniana, così efficace e così famosa.

## Bibliografia

- Briggs, J. d'Alembert, in C.C. Gillispie (ed.) *Dictionary of scientific Biography*, Charles Scribner's Sons, 1971
- J. d'Alembert, *Traité de dynamique*, Culture et Civilisation, 1967
- D. Diderot, J. *Le Rond d'Alembert* (ed.) Enciclopedia francese, 1754, voce Meccanica
- A. Drago: *Il principio di d'Alembert non è un principio. Sua relazione con il principio dei lavori virtuali*, in P. Tucci (ed.) Atti del XIX Convegno Nazionale di Storia della Fisica e dell'Astronomia, 2000
- R. Dugas: *Histoire de la mécanique*, Griffon, Neuchatel, 1950, cap. II, V
- C. Fraser, *The original foundation and application in J. d'Alembert's Traité de dynamique*, Centaurus, vol. 28, pp. 31-61, 1985
- T.L. Hankins, *J. d'Alembert, science and enlightenment*, Clarendon press, Oxford, 1970



- E. N. Hiebert, *Historical roots of the principle of conservation of energy*, University of Wisconsin, Madison, 1962
- J.L. Lagrange, *Mécanique analytique*, Blanchard, Paris, 1965
- B. Lindsay e Margenau, *Foundations of physics*, Dover, 1963
- E. Mach, *La meccanica nel suo sviluppo storico critico*, Boringhieri, Torino, 1968
- G. Maltese: *Storia di  $F=ma$* , Olschki, Firenze, 1992, p.9
- I. Newton: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, London, 1687 pp.5-7
- M. Paty, J. d'Alembert, *portrait a plusieurs voix*, Centre International de Syntèse, editiones archives contemporaines, 1989
- G.S. Rousseau e R. Porter "Introduction", in G.S. Rousseau e R. Porter, *The ferment of knowledge*, Cambridge, 1980 pp.2-3.
- W. L. Scott, *The conflict between atomism and conservation theory 1664-1860*, New York , 1971
- C. Truesdell, *The rational Mechanics of Flexible or elastic bodies 1638-1788*, Introduction to: " L. Euler Opera omnia ", Fussli Turici, pp. 186 – 191 in P. Tucci (ed.) *Atti del XVI Convegno di Storia della Fisica e dell'Astronomia*, 1996, p. 383 – 402
- Ystvan Szabo, *Geschichte der Mechanischer Prinzipien*, Birkhaus, 1979