Le *Recherches sur la libration de la lune* di Lagrange e il principio dei lavori virtuali

Danilo Capecchi

1. Introduzione

Lo scritto *Recherches sur la libration de la Lune*, rappresenta la prima delle numerose memorie di astronomia prodotte da Lagrange ed è il lavoro che egli presentò, vincendolo, al concorso bandito dall'Accademia delle scienze di Parigi nel 1764 sull'argomento: "se si può spiegare tramite qualche motivo fisico perché la Luna presenta sempre verso di noi la medesima faccia; e come si può determinare tramite le osservazioni e tramite la teoria se l'asse di questo satellite è soggetto a qualche movimento proprio, simile a quello che si conosce per l'asse della Terra, e che produce la precessione degli equinozi".

Il tema della librazione della Luna, "cioè quel bilanciamento che la Luna sembra fare intorno al suo centro, e per cui, nel corso di ogni mese, essa ci mostra e ci nasconde alternativamente, verso i suoi bordi, qualche parte della superficie", era un argomento di moda nel XVIII secolo. Prima di Lagrange si erano cimentati su di esso i più grandi scienziati; in particolare Euler, Clairaut e d'Alembert. Altri argomenti classici dell'epoca erano la teoria planetaria e la teoria dei satelliti di Giove. In tutti i casi si trattava di risolvere, in modo approssimato, un particolare caso del problema dei tre corpi (A. Berry, 1907). Nelle *Recherches* Lagrange fornì, per primo, una spiegazione soddisfacente del perché la Luna mostri alla Terra sempre la stessa faccia; qualche incertezza lasciò in altri aspetti della librazione; in particolare non era spiegata l'uguaglianza tra il moto dei nodi dell'equatore lunare e quello dei nodi dell'orbita della Luna. Egli ritornò sull'argomento nel 1780 con la *Theorie de la libration de la Lune*, fornendo una risposta più soddisfacente.

Il mio interesse per le *Recherches*, e anche per la *Theorie*, non è solo nei risultati raggiunti ma anche, e specialmente, per il modo con cui sono stati raggiunti. L'opera appartiene al periodo italiano di Lagrange, a poco tempo dopo che egli giovanissimo, all'età di soli diciannove anni, entrò come docente presso le Regie scuole di artiglieria e di fortificazioni di Torino. In (Borgato e Pepe, 1987) sono riportati elementi di un certo interesse per la ricostruzione della formazione scientifica di Lagrange; analizzando i lavori prodotti dal 1755 al 1759, si capisce come le idee principali che lo hanno reso famoso fossero già sostanzialmente definite. Nel 1757 Giuseppe Angelo Saluzzo (1734-1810), Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813) e Giovanni Francesco Cigno (1734-1790) fondarono la *Società privata torinese* con lo scopo di promuovere ricerche nel campo delle scienze matematiche e naturali. Nel 1759 uscì il primo volume dei Miscellanea philosophica mathematica Societatis privatae taurinensis, con le tre memorie di Lagrange: *Recherches sur la methode de maximis et minimis, Sur l'integration d'une equation differentielle a differences finies, qui contient la theorie des suites recurrentes, Recherches sur la nature e la propagation du son.* Le prime due memorie riguardano argomenti di carattere matematico e non sono particolarmente interessanti; la terza è invece un lungo lavoro sulla soluzione dell'equazione delle corde vibranti che mostra già i segni della grandezza di Lagrange; lo stesso Euler espresse un parere lusinghiero su di essa (Borgato e Pepe, 1987).

Nel 1762 uscì il secondo volume delle Miscellanea, in cui c'è ancora una memoria sulla natura della propagazione del suono ma principalmente vi sono le due memorie: *Essai d'une nouvelle methode pour determiner les maxima et les minima des formules integrales indefinies* e *Application de la methode precedente a la solution de differents problemes de dynamique.* Nella prima memoria Lagrange pone i fondamenti per il calcolo delle variazioni; la seconda memoria costituisce il suo primo trattato di meccanica basato sul principio della minima azione, affrontato con il metodo delle variazioni. L'anno successivo, il 1763, Lagrange terminò la *Recherches sur la libration de la Lune* e, nel 1766, prima di abbandonare definitivamente Torino per andare a ricoprire la carica di direttore della classe di matematica dell'Accademia delle Scienze di Berlino, scriverà ancora un lavoro fondamentale di astronomia, *Recherches sur le inegalites des satellites de Jupiter causees par leur attraction mutuelle*, del 1765.

Nelle *Recherches*, per la prima volta, Lagrange ottiene le equazioni dinamiche del moto utilizzando un "nuovo principio della Meccanica" alternativo a quello della minima azione: il principio del lavori virtuali (PLV). Un'analisi interessante e abbastanza completa sui tempi e sui modi del passaggio da un principio all'altro è riportata in (Galletto, 1991). Qui, ma anche altrove (Fraser, 1982; Borgato e Pepe, 1987), si fa l'ipotesi che Lagrange avesse sviluppato il suo metodo durante la preparazione dei corsi per la Scuola di artiglieria di Torino, dove l'approccio con il principio del lavori virtuali sarebbe stato recepito meglio dagli allievi rispetto a quello basato sul principio della minima azione, che invece richiedeva nozioni di analisi troppo complesse per quei tempi. Purtroppo non ci sono prove che ciò sia vero e forse non ci saranno mai, poiché i manoscritti delle lezioni di meccanica di Lagrange sono risultati introvabili.

Il principio del lavori virtuali è oramai diventato, nelle mani di Lagrange, uno strumento più generale di quello della minima azione; tra l'altro consente l'esame di sistemi soggetti a forze non conservative. L'originalità della presentazione del PLV nelle *Recherches* non è sempre compresa pienamente; infatti è opinione diffusa tra gli storici della scienza che gli ingredienti che consentirono a Lagrange, nel 1763, l'utilizzo del PLV per lo studio dei problemi dinamici fossero già pronti da tempo. In realtà non è così. Il PLV, anche dopo gli ultimi "ritocchi" apportati da Johann Bernoulli, non era uno strumento operativo; restavano grosse difficoltà teoriche, per l'epistemologia dei tempi, a presentarlo come un principio perché, come affermerà lo stesso Lagrange nella *Mecanique*, "va detto che esso non è sufficientemente ovvio di per sé per essere eletto a principio fondante". C'erano poi difficoltà tecniche come quelle che riguardavano i tipi di spostamenti ammissibili da considerare. Nelle applicazioni che fa nella sua *Mecanique ou statique* del 1725, limitatamente alle macchine semplici, Pierre Varignon, assume anche spostamenti virtuali non compatibili con i vincoli, senza essere smentito da Bernoulli. Lagrange generalizzò la formulazione di Bernoulli a sistemi con molti punti materiali, al limite infiniti nel caso del corpo rigido, e impose l'annullarsi del lavoro virtuale solo e per tutti gli spostamenti ammissibili con i vincoli.[1]

Ma il PLV non è sufficiente da solo per fondare la dinamica, e Lagrange gli affianca il principio di d'Alembert (PdA), interpretandolo in quel modo che è ormai classico, sebbene non rispondente alla formulazione originale: le forze di inerzia equilibrano le forze applicate. Nel corso dell'articolo cercherò di giustificare come Lagrange abbia potuto presentare il PdA in questa forma. Anche in questo caso, come per il PLV, va dato credito a Lagrange di una notevole originalità e creatività.

Il presente studio, in realtà non unico a trattare le *Recherches*, vedi ad esempio (Fraser, 1982; Barroso Filho, 1994), si concentra sugli aspetti fondativi della meccanica lì posti, fornendone un'esposizione sufficientemente dettagliata, ma specialmente con una particolare attenzione al modo di uso del PLV. Le *Recherches* sono un lavoro di lunghezza considerevole, 61 pagine, classificabile secondo la terminologia moderna come un rapporto di ricerca; infatti vi sono esposti, con qualche dettaglio, anche aspetti marginali e specifici sviluppi analitici. È diviso in due parti di consistenza paragonabile; la prima parte, paragrafi da 1 a 18, è dedicata a stabilire le equazioni differenziali del moto della Luna intorno al proprio centro; la seconda parte, paragrafi da 19 a 31, è invece dedicata alla soluzione delle equazioni del moto; in questo lavoro riferisco solo della prima parte. Nei primi due paragrafi Lagrange introduce il problema astronomico; lo scenario è semplificato: comprende, oltre alla Luna, solo la Terra e il Sole (si tratta quindi del classico problema dei tre corpi, in cui però l'attenzione è concentrata sulla Luna e si ammette che il moto del Sole e della Terra siano noti e non siano influenzati dalla Luna). Nel terzo paragrafo, con l'utilizzo del PLV e del PdA, secondo uno stile estremamente laconico, perviene direttamente a quella comunemente nota come equazione simbolica del moto, che viene commentata nel quarto paragrafo. I paragrafi dal quinto al sedicesimo sono dedicati all'espressione dell'equazione simbolica del moto in funzione di tre coordinate indipendenti, individuate da Lagrange negli angoli euleriani, che definiscono la posizione della Luna intorno al proprio centro. Nel paragrafo diciassettesimo Lagrange esplicita tre equazioni differenziali di moto che devono essere soddisfatte dalle coordinate indipendenti; nel paragrafo diciottesimo infine confronta, solo verbalmente, le sue equazioni con quelle analoghe ottenute da d'Alembert nel 1754. I paragrafi successivi dedicati alla soluzione delle equazioni trovate nel paragrafo diciassettesimo, rivelano la grande abilità tecnica di Lagrange; egli riesce, in qualche modo a risolvere le tre equazioni del moto che sono accoppiate, ottenendo nell'ordine le espressioni della rotazione intorno al proprio asse, della nutazione e della precessione degli equinozi lunari. Dimostra in modo soddisfacente che il fatto per cui la Luna presenta sempre la stessa faccia alla Terra non è casuale ma dipende dalla forma della Luna che non è una sfera perfetta ma piuttosto un ellissoide leggermente schiacciato.

2. Posizione del problema astronomico

Nello studio del movimento della Luna attorno al suo centro di gravità Lagrange assume un sistema di coordinate centrato nel baricentro lunare (punto O). Come primo piano coordinato sceglie un piano τ parallelo all'eclittica, cioè all'orbita della Terra intorno al Sole. L'asse X è diretto verso il primo punto dell'Ariete ♈, l' asse Y è perpendicolare a X e contenuto in τ e l'asse Z è perpendicolare a τ. La Luna è considerata come un corpo rigido di forma non necessariamente sferica. Un generico elemento di essa, che Lagrange indica con α e che nel seguito indicherò con dm, è soggetto alle forze di gravità della Luna stessa, considerata nel suo complesso, della Terra e del Sole. L'azione della gravità lunare è ignorata perché ritenuta ininfluente in quanto la Luna è considerata come un corpo rigido e la risultante delle forze che essa esercita su tutti i suoi elementi dm è nulla; diverso è il discorso delle forze dovute alla Terra e al Sole, dirette da dm al centro dei due corpi celesti, che hanno l'espressione rispettivamente:

$$\frac{T}{R^2}dm, \qquad \frac{S}{R'^2}dm \tag{1}$$

ove T e S sono la masse e R e R' sono le distanze dalla Luna, della Terra e del Sole rispettivamente – Lagrange, come era costume dell'epoca tralascia di esplicitare la costante gravitazionale. Oltre a queste azioni vanno considerate anche quelle che, con una terminologia probabilmente mutuata da d'Alembert, sono chiamate forze acceleratrici[2], date da:

$$\frac{d^2X}{dt^2}dm, \quad \frac{d^2Y}{dt^2}dm, \quad \frac{d^2Z}{dt^2}dm \tag{2}$$

con X, Y e Z che definiscono la posizione di dm. Lagrange, anticipando l'enunciato del principio di d'Alembert (PdA), afferma testualmente: "queste forze [acceleratrici] prese in senso contrario e combinate con le forze $\alpha T/R^2$ e $\alpha S/R^2$, mantengono il sistema di tutti i punti α [dm], cioè l'intera massa della Luna, in equilibrio intorno al suo centro di gravità, supposto fisso".

L'analisi del sistema di riferimento e delle forze agenti è completata nei primi due paragrafi. Dopo ottanta anni dalla pubblicazione dei *Principia*, Lagrange non sente il bisogno di addurre giustificazioni di tipo metafisico sulla natura delle forze. Egli non prende parte rispetto alla concezione della forza di Eulero, per cui $f = m\,a$ è una legge né rispetto a quella di d'Alembert, per cui si tratta al più di una definizione, anche se conosce bene le posizioni dei due scienziati, con i quali ha avuto o avrà, seppure in tempi diversi, rapporti profondi sia a livello umano sia a livello scientifico. Nella *Mecanique analytique*, agli inizi, Lagrange si limiterà a dire "si intende in generale per forza o potenza la causa, quale che essa sia, che imprime o tende a imprimere un movimento ai corpi ai quali si suppone applicata; ed è anche per la quantità di movimento impresso, o che può essere impresso, che si deve esprimere la forza. Nello stato di equilibrio la forza di fatto non agisce; essa non produce che una semplice tendenza al movimento; la si può sempre misurare per l'effetto che produrrebbe se essa non fosse contrastata". La forza viene quindi salomonicamente, e ambiguamente, identificata sia con la causa sia con l'effetto. In questo approccio di Lagrange alla forza in particolare e alla meccanica in generale si è voluto vedere una forma di strumentalismo (Pulte, 1998).

Il sistema di riferimento assunto, rispetto a quello solidale all'eclittica, è soggetto solo a moto traslatorio in quanto, trascurando la precessione degli equinozi della Terra, l'asse *X* ha direzione invariante. Se si vuole considerare inerziale il sistema di riferimento solidale all'eclittica, con origine nel Sole, allora il sistema adoperato da Lagrange è inerziale nei limiti in cui la velocità della Luna, in modulo, può essere considerata uniforme. Lagrange assume tacitamente che il suo sistema di riferimento sia inerziale; senza aggiungere commenti su questa posizione e sugli errori che comporta il trascurare le forze di trascinamento[3].

Poiché qui non si tratta che del movimento che la Luna deve avere attorno al suo centro di gravità, in virtù dell'azione del Sole e della Terra, è evidente che si può riguardare il centro della Luna immobile in confronto alla Terra e al Sole, trasferendo a questi due pianeti, in senso contrario, il movimento che la Luna ha in realtà intorno a essi; cioè immaginando che la Terra e il Sole si muovano attorno al centro della Luna, supposta fissa, come li vedrebbe un osservatore situato nel suo centro (Recherches, pag. 7).

3. L'equazione simbolica della dinamica

Il paragrafo III è certamente uno dei più importanti di tutta l'opera. Esso inizia con l'affermazione:

Esiste un principio vero in generale in Statica, secondo cui, se un sistema qualsiasi di quanti corpi o punti si voglia, sollecitato ciascuno da potenze [forze] arbitrarie, è in equilibrio e se qualcuno dà al sistema un movimento piccolo, arbitrario, in ragione del quale ciascun punto percorre uno spazio infinitamente piccolo, la somma delle potenze moltiplicata ciascuna per lo spazio percorso dal punto cui essa è applicata, seguendo la direzione di questa potenza, sarà sempre zero (Recherches, pagg. 8-9).

Senza nessun altro commento, senza nemmeno dire che il "principio vero della Statica" è il principio dei lavori virtuali (PLV), noto ai suoi tempi come principio delle velocità virtuali, Lagrange comincia a "calcolare" nel modo seguente: "si immagini che, per una variazione infinitamente piccola della posizione della Luna intorno a suo centro, le linee *X, Y, Z, R, R'*, assumano il valore

$$X+\delta X,\ Y+\delta Y,\ Z+\delta Z,\ R+\delta R,\ R'+\delta R'$$

è facile vedere che le differenze

$$\delta X,\ \delta Y,\ \delta Z,\ \delta R,\ \delta R'$$

esprimono gli spazi percorsi nello stesso tempo dal punto *dm* nella direzione opposta a

$$\frac{d^2X}{dt^2}dm\ ,\quad \frac{d^2Y}{dt^2}dm\ ,\quad \frac{d^2Z}{dt^2}dm\ ,\quad \frac{T}{R^2}dm\ ,\quad \frac{S}{R'^2}dm$$

che agiscono su tale punto; si avrà dunque, per la condizione [necessaria] dell'equilibrio, l'equazione generale[4]:

$$\int_L \left[\frac{d^2X}{dt^2}dm\,(-\delta X)+\frac{d^2Y}{dt^2}dm\,(-\delta Y)+\frac{d^2Z}{dt^2}dm\,(-\delta Z)+\frac{T}{R^2}(-\delta R)\,dm+\frac{S}{R'^2}(-\delta R')\,dm\right]=0$$

(3)

cioè, cambiando segno":

$$\int_L \left[\frac{d^2X}{dt^2}\delta X+\frac{d^2Y}{dt^2}\delta Y\,\frac{d^2Z}{dt^2}\,\delta Z\right]dm+T\int_L \frac{\delta R}{R^2}\,dm+S\int_L \frac{\delta R'}{R'^2}dm=0 \qquad (4)$$

I commenti di Lagrange sul modo con cui si perviene all'equazione simbolica sono estremamente scarni, come se i concetti utilizzati fossero di dominio pubblico; il che non era vero. Egli rimedierà, ma solo in parte, alla sua laconicità nel paragrafo successivo. D'altronde il linguaggio delle formule è sufficientemente chiaro, si tratta di sommare (integrare) i lavori elementari delle forze acceleratrici e di gravità e poi imporre pari a zero tale somma. I segni negativi nell'equazione (3), anche se Lagrange non dice nulla a proposito, è verosimile siano dovuti: per i primi tre termini, al PdA secondo cui le forze acceleratrici vanno considerate con segno cambiato; per gli ultimi due termini alla convenzione sulle forze di gravità solare e terrestre che si considerano positive se attrattive e quindi agenti in verso contrario rispetto alla variazione di distanza.

Le due equazioni sopra riportate, in specie la (3), vanno oggi sotto il nome di equazioni simboliche della dinamica; nella *Mecanique analytique*, Lagrange si riferirà ad esse come alle formule generali della dinamica. Per ottenerle egli usa due principi indipendenti; il primo principio, riferito come generale, è quello dei lavori virtuali, riportato con un linguaggio scarno, molto simile a quello usato da Johann Bernoulli, mentre il secondo principio, che consiste nell'uso delle forze acceleratrici, con segno invertito, come forze ordinarie, è, come sarà chiarito meglio in seguito, la versione del principio di d'Alembert fornita da Lagrange. Non è assolutamente vero, né per il principio dei lavori virtuali né per il PdA, che si trattasse di principi largamente noti e condivisi dai Geometri; anzi si può sostenere con buone ragioni (Galletto, 1991) che sia stato Lagrange per la prima volta a enunciarli con chiarezza e a diffonderli. E infatti Lagrange nella *Mecanique analytique*, avrà un approccio diverso con i due principi; per il PLV presenterà, nella seconda edizione, una dimostrazione e per il PdA fornirà un commento e riferirà un'analisi storica abbastanza estesi.

Il paragrafo IV è qualificato come scolio, cioè nota, ed è teso al chiarimento di quanto esposto nel paragrafo precedente. Data la chiarezza dell'esposizione di Lagrange, conviene riferire per esteso i suoi commenti al PLV:

Il principio della Statica che vengo a esporre non è in fondo che una generalizzazione di quello che è chiamato di solito principio delle velocità virtuali, e che è noto da tempo ai Geometri come principio fondamentale dell'equilibrio. M. Jean Bernoulli è il primo, che io sappia, che ha visto questo principio in forma generale e applicabile a tutte le questioni della Statica, come si può vedere nella sezione IX della Nuova meccanica di M. Varignon, ove tale abile Geometra, dopo avere riportato il principio di Bernoulli in esame, fa vedere, in diverse applicazioni, che esso [principio] conduce alle stesse conclusioni di quello della composizione delle forze ... (Recherches, pag. 10).

3.2 Generalizzazione del principio delle velocità virtuali

Non è completamente chiaro che cosa Lagrange intenda con il termine generalizzazione usato nel brano di apertura del paragrafo IV: "Il principio della Statica che vengo a esporre non è in fondo che una generalizzazione di quello che è chiamato di solito principio delle velocità virtuali". Da un lato la formulazione del PLV di Johann Bernoulli che si riferisce a forze concentrate – applicate a più a punti materiali, viene certamente estesa a forze distribuite e viene specificato meglio l'ambito di validità. Da un altro lato la generalizzazione riguarda l'estensione del principio dei lavori virtuali alla dinamica con l'assimilazione delle "forze" acceleratrici a forze ordinarie.

3.2.1 Generalizzazione del caso "statico"

Il principio delle velocità virtuali annunciato da Johann Bernoulli nel 1717 e pubblicizzato da Pierre Varignon nella *Mecanique ou statique* del 1725, non giustifica completamente le applicazioni di Lagrange.
1 - Le "velocità virtuali" considerate da Bernoulli non sono necessariamente compatibili con i vincoli; egli assume infatti un sistema di forze generiche, in equilibrio, che possono contenere anche le reazioni vincolari (Capecchi, 1999);
2 - la classe di "velocità virtuali" ammissibili è limitata agli atti di moto rigido;
3 - gli spostamenti di moto rigido affettano anche le forze; se ad esempio l'atto di moto rigido è una rotazione, l'intero sistema di forze equilibrato – anche le reazioni vincolari – subisce questa rotazione.
4 - L'enunciato delle "velocità virtuali" di Bernoulli è in forma geometrica, cioè considera i vettori forza e spostamento come segmenti orientati;
5 - è limitato a sistemi di punti materiali e a forze concentrate;
6 - è un teorema, che esprime la solo la condizione necessaria per l'equilibrio;
7 – infine, non fa riferimento a nessuna giustificazione di carattere metafisico, come invece si trova in tutte le enunciazioni precedenti;

Lagrange modificherà tutti questi punti, con una significativa eccezione per l'ultimo di cui riferirò nel paragrafo successivo[5].
1 – Per Lagrange, gli "spostamenti virtuali", in accordo con le formulazioni classiche (Galilei, Cartesio, Wallis) del PLV, sono sempre compatibili con i vincoli, implicitamente assunti olonomi;
2 - gli spostamenti virtuali hanno una variabilità definita dal numero dei gradi di libertà del sistema; questo aspetto sarà chiarito quando parlerò dello sviluppo dell'equazione simbolica;
3 - le forze non subiscono nessuno spostamento nella deformazione infinitesima;
4 - le applicazioni di Lagrange sono puramente analitiche, egli lavora per componenti e non ha quindi bisogno di considerare la proiezione delle forze nella direzione degli spostamenti, poiché le componenti delle forze e quelle degli spostamenti hanno la stessa direzione - si noti per inciso che l'enunciato di Lagrange, anche se la cosa non fa differenza da un punto di vista applicativo, parla di proiezione degli spostamenti nella direzione delle forze e non di proiezione delle forze nella direzione degli spostamenti come invece fa Bernoulli;
5 - le forze non sono necessariamente concentrate; anzi nelle *Recherches* sono solo distribuite. L'idea di considerare forze distribuite diverse da quelle del peso, e in particolare forze acceleratrici, non si ritrova in forma chiara prima del 1750, anno in cui Leonhard Euler propose, in una memoria dell'Accademia delle Scienze di Berlino, che il principio del momento lineare ($f=ma$) si potesse applicare anche a entità diverse dai punti materiali, ad esempio a un elemento infinitesimo di un continuo

($df=dm\ a$). Da questo punto di vista la generalizzazione, da forze concentrate a forze distribuite, non appare banale. Però nell'analisi delle forze che agiscono sull'elemento *dm* resta in ombra il come trattare le reazioni vincolari interne e tutto procede come se esse non esistessero. In realtà gli elementi *dm* non sono in equilibrio sotto le sole forze acceleratrici e quelle di gravità; l'equilibrio è condizionato anche dalle reazioni vincolari imposte dai vincoli di corpo rigido. Lo stesso Euler, nel suo studio sul moto dei corpi rigidi del 1750, decise di non considerare l'influenza delle forze interne sulla base del principio euristico che esse apparivano come passive e perciò non potevano dare un contributo al moto d'insieme. Per un'analisi completa e soddisfacente delle forze interne, bisognerà aspettare il lavori di Cauchy del 1822 (pubblicato nel 1823), in cui egli esporrà in modo preciso il concetto di tensione nei continui, come forza interna di contatto.
6 - Lagrange assume implicitamente il PLV anche come condizione sufficiente di equilibrio, cioè se un sistema di forze rende nullo il lavoro virtuale, allora esso è equilibrato. L'enunciato di Bernoulli diviene così un vero principio, e si presta a una formulazione alternativa della meccanica newtoniana.

3.2.2 Generalizzazione al caso dinamico.

Questa seconda generalizzazione, secondo Lagrange, è possibile grazie alle idee di d'Alembert; con il solito stile laconico, scrive: "Il principio della Statica che io vengo a esporre, combinato con il principio della dinamica dovuto a d'Alembert, costituisce una specie di formula generale che contiene la soluzione di tutti i problemi che riguardano il moto dei corpi (Recherches, pag. 12)". Lagrange conosce bene i lavori di d'Alembert e sa che lui non ha mai detto nulla a proposito del poter assimilare la forza acceleratrice cambiata di segno a una forza ordinaria. Nella *Mecanique analytique*, Lagrange sarà più esplicito. Ecco un brano, tratto dalla seconda edizione:

Questo modo di ridurre le leggi della Dinamica a quelle della Statica è meno diretto di quello che risulta dal principio [originario] di d'Alembert, ma offre maggiori semplicità nelle sue applicazioni. È simile a quello di Hermann e di Euler che lo hanno applicato alla soluzione di molti problemi della Meccanica e si trova talvolta nei trattati sotto il titolo di Principio di d'Alembert (Lagrange, Mecanique, pag. 12).

Da dove si capisce che, secondo Lagrange, il principio delle forze acceleratrici cambiate di segno non è il vero PdA. Ancora oggi, grazie anche a questi interventi di Lagrange, con il termine di "PdA" si intendono cose diverse: il principio originario di d'Alembert, il PdA secondo Lagrange (forze di inerzia trattate come forze statiche) e addirittura l'equazione simbolica della dinamica.

Recentemente il principio originario di d'Alembert è stato oggetto di studi approfonditi intesi a chiarirne il significato (*vedi* ad esempio (Faser, 1982; Drago, 2000); ciò nonostante dubbi rimangono ancora sul suo stato logico né sono state chiarite le motivazioni di Lagrange per l'attribuzione a d'Alembert del principio che egli espone. Nel seguito sviluppo solo qualche commento per quanto riguarda la possibile equivalenza della formulazione del PdA con i "principi" di Hermann ed Euler[7]. Riporto un brano tratto da *Sur la vibrations des cordes* di Euler del 1750, contemporanea al suo fondamentalle lavoro di meccanica *Decouvert d'un noveuax principe de mecanique,* che illustra abbastanza chiaramente il "principio" di Euler e la sua possibile equivalenza con il principio di d'Alembert-Lagrange. Considerazioni analoghe appaiono anche in scritti successivi, come ad esempio, in *Genuina principia doctrinae de statu aequilibri et motu corporum tam perfecte flexibilium quam elasticorum*, del 1770, che si riferisce ancora alla corda vibrante (pag. 57-58).

Siccome attualmente si tratta di determinare il movimento della corda a causa della forza sollecitante, sia AB = P, la forza acceleratrice per cui il punto M della corda è accelerato verso l'asse, è chiaro che tutte quelle forze, da cui ciascun elemento della corda è sollecitato contro l'asse AB, prese nel complesso devono equivalere alla forza da cui la corda è di fatto tesa, e che abbiamo indicato con AF=F; ebbene se concepiamo delle forze contrarie e uguali a P, applicate secondo ML su ciascuno dei punti M della corda, allora esse si devono trovare in equilibrio con la forza che tende la corda AF=F, e da questa proprietà si potrà determinare la vera forza acceleratrice P, per cui ciascun elemento Mm della corda è attualmente sollecitato[6](Euler, Sur la vibration des cordes, pagg. 66-77).

Il ragionamento di Euler si può comprendere più facilmente considerando l'equazione del moto di un punto materiale di massa m, soggetto alle forze F_1, F_2, ..., F_n. La forza acceleratrice, secondo la definizione di Euler (*vedi* nota 2), è data da $\varphi = \frac{1}{m}\sum F_i$, e quindi la forza acceleratrice cambiata di segno è equilibrata con le forze F_i. Una volta determinata φ è noto anche il moto, perché per la seconda legge, si ha $\varphi = a$, essendo a l'accelerazione del punto materiale. Il ragionamento valido per un punto materiale si può estendere anche a un sistema di punti e/o di corpi comunque vincolati; le F_i comprenderanno adesso anche le reazioni vincolari. In questi casi l'esame del cinematismo fornirà indicazioni sulla direzione della forza acceleratrice; per esempio, nel brano sopra riportato Euler assume che la forza acceleratrice sia verticale. Alla luce di quanto sopra, si può intendere il passaggio di Lagrange in modo più innocente di quanto si faccia normalmente, quando lo si accusa di utilizzare il concetto di dubbia fondazione metafisica di "forze di inerzia". Egli considera ancora l'equilibrio tra le forze F_i e le forze acceleratrici, ma per lui le forze acceleratrici sono date dal membro a destra della relazione $\varphi = a$.

Qualunque sia la reale origine delle idee di Lagrange, una volta concepite le forze acceleratrici cambiate di segno come forze ordinarie, non è poi difficile pensare al PLV come a un possibile mezzo per risolvere l'equilibrio che consente tra l'altro di risolvere il problema pratico e concettuale rappresentato dalle reazioni vincolari. C'è certo una difficoltà di ordine logico, dovuta al fatto che il PLV, secondo l'epistemologia ancora accettata ai tempi di Lagrange, è valido in quanto ha una sua fondazione metafisica e questa regge solo quando si considera una configurazione di equilibrio, caratterizzata dalla quiete; se si generalizza l'idea di equilibrio al caso dinamico, intendendolo come bilancio di forze acceleratrici e forze attive, tutte le argomentazioni dei sostenitori del PLV, tra cui Aristotele, Galilei e Vincenzo Angiulli, cadono. Non cadono però le argomentazioni di Bernoulli (vedi punto 6) perché esse non sono di carattere metafisico. Il principio delle velocità virtuali di Bernoulli è enunciato facendo riferimento solo a forze in equilibrio; quindi adesso è un teorema di geometria che afferma che se *n* vettori v_i sono caratterizzati dalle relazioni $\sum_i v_i = 0$; $\sum_i OP_i \times v_i = 0$, ove $\times$ è il segno di prodotto vettoriale e OP_i è il vettore che va da un punto fisso generico *O* al punto di applicazione P_i di v_i, allora necessariamente il lavoro virtuale è nullo. In questa enunciazione non c'è nessuna difficoltà a inserire le forze acceleratrici come equilibranti le forze applicate.

L'enunciazione del PLV nelle *Recherches*, così semplice e senza commenti, anche se forse è implicita la sua subalternità alle leggi newtoniane del moto, si presenta più pulita di quella della *Mecanique analytique* dove Lagrange pretende di dimostrare il PLV della Statica, senza essere completamente convincente (basandosi sulla legge della carrucola e quindi indipendentemente dalle leggi di equilibrio delle forze) e estende poi il PLV alla dinamica, senza nessuna giustificazione valida.

3.1 *La conservazione delle forze vive.*

Sempre nel paragrafo IV, Lagrange mostra come dal PLV e dal PdA, da lui riformulato, si possa ottenere facilmente la legge della conservazione delle forze vive. La dimostrazione fornita da Lagrange, oltre a essere più generale, è più semplice di quella che aveva fornito d'Alembert nel *Traité de dynamique* del 1743; è anche più convincente di quella riferita da Daniel Bernoulli nei *Remarques sur le principe de la conservation des forces vives pris dans un sens general* del 1748, che è fondata su una generalizzazione dei concetti sviluppati da Huygens. La dimostrazione, che riporto in forma sostanzialmente integrale, si riferisce a un sistema di punti materiali di masse *m, m'*, ..., oggetto di forze centrali qualsiasi.

Siano *P, Q, R* le forze che agiscono sulla massa *m* e *P', Q', R'* quelle che agiscono sulla massa *m'* e siano *p, q, r* e *p', q', r'* le distanze tra le masse e i centri delle forze. Siano inoltre *v* e *v'* le velocità, *m dv/dt, m' dv' /dt* le forze acceleratrici, *ds, ds'* gli spostamenti effettivi concordi a *v* e *v'*, *dp, dq, dr* le variazioni di distanza tra i centri delle forze e le masse. Applicando il principio degli spostamenti virtuali a tutte le forze agenti, considerando quali spostamenti virtuali quelli veri ($\delta s = ds$), ottiene:

$$-\frac{mdv}{dt}ds + m\ P(-dp) + m\ Q\ (-dq) + m\ R\ (-dr) +$$
$$-\frac{m'dv'}{dt}ds' + m'P'(-dp') + m'Q'(-dq') + m'R'(-dr') +$$
$$-\frac{m''dv''}{dt}ds'' + m''P''(-dp'') + m''Q''(-dq'') + m''R''(-dr'') = 0 \qquad (5)$$

Ove il segno negativo davanti a *dp, dq* e *dr* deriva dalle ragioni già esposte a proposito dell'equazione (3). Sostituendo a *dt* i suoi valori rispettivi *ds/v, ds'/v'*, ... e integrando, ottiene infine:

$$mv^2 + m'v'^2 + \cdots = mV^2 + m'V'^2 + \cdots - 2m\int (Pdp + Qdq + Rdr + \cdots) - 2m'\int (P'dp' + Q'dq' + R'dr' + \cdots) - \cdots \tag{6}$$

"in cui *V, V'* sono i valori iniziali di *v, v'* e quest'espressione riafferma, come si vede, il teorema della conservazione delle forze vive".

Al solito, Lagrange si guarda bene dal commentare il risultato. Non dice nulla sul termine sotto integrale (che oggi è conosciuto come il lavoro fatto dalle forze attive) e su che cosa succederebbe se le forze *P*, *Q*, *R* ..., non dipendessero ciascuna separatamente da *p*, *q*, *r*,.., come è implicito nella *Recherches*, ma congiuntamente da esse. Nelle *Applications* egli aveva comunque considerato questa eventualità e aveva dimostrato di possedere il concetto di quelle che oggi si chiamano forze conservative (Fraser, 1982) ; solo in questo caso infatti l'integrale del secondo membro ha significato (in termini moderni rappresenta l'energia potenziale) senza dover specificare la traiettoria lungo cui è calcolato.

Si noti che, sebbene Lagrange non sia esplicito al proposito, la dimostrazione del teorema delle forze vive ha un suo valore solo se il sistema è vincolato, cioè se le masse *m*, *m'*,...... non possono muoversi indipendentemente l'una dall'altra; in questo caso l'uso del PLV, consentendo di ignorare le reazioni di vincolari, è estremamente vantaggioso. In caso contrario, ogni punto massa può essere studiato separatamente e il teorema della conservazione delle forze vive si ottiene banalmente come integrale primo della relazione *f=m a*, pensata indifferentemente o come legge newtoniana, oppure come risultato del "suo" principio di d'Alembert.

4. Sviluppo dell'equazione simbolica

L'equazione simbolica della dinamica contiene gli spostamenti virtuali non analizzati; di essi non è definito lo spazio dei valori ammissibili. Lagrange esprime l'idea di ammissibilità facendo uso del concetto di variabili indipendenti (dette oggi variabili lagrangiane) introdotto già nell'*Applications* del 1762 (Capriglione, 1992) e sviluppato dopo le *Recherches*, nella *Theorie* e nella *Mecanique analytique* e riconoscendo che il PLV porta a tante equazioni di bilancio quante sono le variabili indipendenti. Nel problema dei tre corpi che Lagrange sta studiando, formato da Terra, Sole - rappresentati da un punto materiale localizzato nel loro baricentro - e Luna - trattata come copro rigido -, si hanno, rispetto al sistema di coordinate scelto, tre gradi di libertà ciascuno per Terra e Luna (i tre spostamenti del baricentro) e tre gradi di libertà per la Luna (le tre rotazioni). In totale si hanno nove gradi di libertà e l'equazione simbolica della dinamica consente di ottenere nove equazioni di bilancio[8]. Nella trattazione semplificata dei tre corpi che Lagrange sta considerando, egli assume note – senza mai esplicitare chiaramente tale assunzione – le posizioni della Terra e del Sole e pertanto gli spostamenti virtuali da considerare sono solo i tre moti possibili della Luna cui, tramite l'equazione simbolica della dinamica, sono associate tre equazioni di bilancio.

4.1 L'introduzione di coordinate astronomiche

Ecco come Lagrange sviluppa la sua procedura di esplicitazione dell'equazione simbolica (4) che, sebbene comprensibile, non è completamente esplicita e diretta; comincia, nel capitolo V, a esprimere le coordinate cartesiane X, Y e Z di ogni elemento dm e delle le sue distanze R e R' dalla Terra e dal Sole rispettivamente, in funzione delle coordinate lagrangiane, i tre parametri che definiscono la posizione della Luna, considerata come corpo rigido, nel sistema di riferimento $OXYZ$ e dei tre parametri che individuano dm nella Luna. Entrambi i tipi di coordinate sono astronomiche.

Per determinare la posizione della Luna nel sistema $OXYZ$ Lagrange sceglie le coordinate:

- π, l'inclinazione del piano dell'equatore lunare rispetto al piano dell'eclittica.
- ε, la longitudine del nodo discendente dell'equatore lunare, cioè l'angolo che la retta intersezione del piano equatoriale lunare e il piano dell'eclittica, forma con l'asse X (che passa per il primo punto dell'Ariete)
- ω, la distanza di un meridiano lunare scelto arbitrariamente, denominato primo meridiano, dal nodo discendente dell'equatore lunare, misurato sull'equatore lunare stesso.

Lagrange non sembra attribuire una particolare importanza all'uso degli angoli π, ε e ω come parametri indipendenti per definire la variazione di tutte le grandezze geometriche. Egli si limita a dire "è facile vedere che queste tre variabili sono sufficienti per determinare, in ciascun istante, la posizione della Luna rispetto al suo centro, che è pensato immobile; esse saranno anche le sole che bisognerà far variare nel differenziale delle grandezze X,Y,Z, R, R' ".

Per determinare la posizione dell'elemento dm, sceglie le coordinate polari:

r, la distanza di dm dal centro della Luna

P, l'angolo che r forma con l'equatore lunare, calcolata sul piano meridiano che passa per dm

Q, l'angolo che il piano meridiano per dm forma con il primo meridiano, o alternativamente

$Q' = Q+$ □ che è l'ascensione retta di dm (rispetto al sistema astronomico terrestre)

4.2 *Contributo delle forze acceleratrici*

Per esporre in modo più ordinato i suoi sviluppi analitici, Lagrange tratta per primi gli integrali dell'equazione simbolica che coinvolgono le sole forze di inerzia. A questo scopo egli deve esprimere X, Y e Z in funzione delle coordinate lagrangiane e delle coordinate polari che individuano dm nella Luna e considerarne la variazione in funzione delle sole coordinate lagrangiane. Con una serie di passaggi egli ottiene, nel paragrafo VI, le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} X &= r\cos P\cos Q'\cos\varepsilon - r\cos P\,\mathrm{sen}\,Q'\,\mathrm{sen}\,\varepsilon\cos\pi - r\,\mathrm{sen}\,P\,\mathrm{sen}\,\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\pi \\ Y &= r\cos P\cos Q'\,\mathrm{sen}\,\varepsilon - r\cos P\,\mathrm{sen}\,Q'\cos\varepsilon\cos\pi - r\,\mathrm{sen}\,P\cos\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\pi \\ Z &= r\,\mathrm{sen}\,P\cos\pi 0 - r\cos P\,\mathrm{sen}\,Q'\cos\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\pi \end{aligned} \tag{7}$$

Nel paragrafo VII, per calcolare i termini $d^2X/dt^2\,\delta X$ e simili - o meglio nella forma $d^2X\,\delta X$, in cui considera il differenziale invece della derivata - in funzione di π, ε e ω, Lagrange segue due vie; una prima via, diretta, calcolando le variazioni prime e seconde delle relazioni (7) e una seconda via, indiretta, che si presta a una trattazione sistematica estensibile ad altri casi. Do un accenno del metodo indiretto, più interessante, basato sull'osservazione che l'espressione delle variazioni prime e seconde in funzione delle variabili lagrangiane:

$$\begin{aligned} & d^2X\delta X + d^2Y\delta Y + d^2Z\delta Z = r^2\cos^2 P\,(d^2\omega\delta\omega + d(\cos\pi\, d\varepsilon)\delta\omega + d(\cos\pi\, d\omega)\delta\varepsilon + \\ & - \mathrm{sen}\,\pi\, d\omega d\varepsilon\delta\pi\ \ldots) + \ldots\ldots \end{aligned} \tag{8}$$

è sostanzialmente identica alla seguente espressione, ottenuta in modo naturale calcolando il differenziale secondo e alternando d e δ:

$$\begin{aligned} & dX\delta dX + dY\delta dY + dZ\delta dZ = r^2\cos^2 P\,(d\omega d\delta\omega + \cos\pi\, d\varepsilon d\delta\omega + \cos\pi\, d\omega d\delta\varepsilon + \\ & + \mathrm{sen}\,\pi\, d\omega d\varepsilon\delta\pi\ \ldots) + \ldots\ldots \end{aligned} \tag{9}$$

differendo dalla prima solo nel fatto che "la lettera d che era dopo la δ nei differenziali affetti da $d\delta$ si trova ora davanti le quantità stesse che moltiplicano questi differenziali, e che gli altri termini, che non presentano simili differenziali hanno il segno cambiato". La procedura indiretta verrà perfezionata nella *Theorie* fino a ridursi al noto approccio di ottenere il contributo delle forze di inerzia all'equazione simbolica a partire dall'espressione dell'energia cinetica espressa in funzione delle coordinate lagrangiane.

I passaggi analitici sono molto lunghi sia nella procedura diretta sia in quella indiretta e portano a espressioni che dipendono da r, P, Q, π, ε e ω e dai differenziali e variazioni $d^2\pi$, $d^2\varepsilon$, $d^2\omega$, $\delta\pi$, $\delta\varepsilon$ e $\delta\omega$. A titolo esemplificativo, riporto l'espressione del solo termine che ha come fattore $\delta\omega$:

$$\Big\langle\, r^2 \cos^2 P[d(d\omega + \cos\pi\, d\varepsilon) + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2Q'(\operatorname{sen}^2 d\ \varepsilon^2 - d\pi^2) + \cos 2Q' \operatorname{sen}\pi\, d\pi\, d\varepsilon] +$$
$$r^2 \operatorname{sen} P \cos P[\operatorname{sen} Q' \operatorname{sen}\pi d\varepsilon^2 + 2\cos\pi\ d\pi\, d\varepsilon) + \cos Q'(d\pi^2 - \operatorname{sen}\pi\cos\pi\, d\varepsilon^2)]\ \Big\rangle\delta\omega \tag{11}$$

Tornando all'equazione simbolica della dinamica, il contributo delle forze di inerzia all'integrando è costituito dalla somma di tre espressioni analoghe a quella sopra riportata, una per ogni coordinata lagrangiana. Considerando l'elemento di massa dm in funzione delle coordinate polari e della densità D:

$$dm = Dr^2 \cos P\, dQ\, dP\, dr \tag{12}$$

Lagrange, dopo avere sviluppato gli integrali estesi alla massa della Luna ottiene, per la prima parte della relazione (4), l'espressione:

$$\Omega\,\delta\omega + E\,\delta\varepsilon + \Pi\,\delta\pi \tag{13}$$

in cui Ω, E e Π, che sono funzioni di ω, ε e π, e delle loro derivate rispetto al tempo, hanno le dimensioni di un momento statico e vanno intese come forze generalizzate di inerzia.

Nei paragrafi da IX a XII Lagrange analizza la struttura delle funzioni □, □ e □ , introducendo alcune assunzioni e approssimazioni. Nel paragrafo IX studia il moto della Luna, considerata come un corpo di forma qualsiasi, in assenza delle azioni dovute alla Terra e al Sole, e supponendo che essa abbia un asse fisso di rotazione uniforme. Trova poi che la condizione per il soddisfacimento di questo requisito è che l'asse attorno a cui si ipotizza il moto sia una asse centrale di inerzia. Le relazioni analitiche che definiscono tale asse, insieme alla constatazione empirica del fatto che la Luna ha effettivamente un asse di rotazione la cui posizione varia lentamente, consentono a Lagrange di semplificare l'espressione di Ω, E e Π. Nel paragrafo X Lagrange dimostra che, per un generico corpo rigido, esistono tre diversi assi secondo cui può avvenire il moto rotatorio uniforme, ritrovando con il suo approccio puramente analitico un risultato già trovato da Euler nel periodo 1758-1760 con un approccio geometrico (Truesdell, 1968). Nel paragrafo XI presenta poi alcune ipotesi sulla distribuzione della massa all'interno del corpo lunare e sulla sua forma – assunta poco diversa dalla sferica - le quali gli consentono di dare una struttura relativamente semplice agli integrali che compaiono in Ω, E e Π. Nel paragrafo XII infine conclude che la Luna, a partire dal suo originario stato fluido, a causa dell'azione della gravità della Terra e della propria rotazione, deve avere acquisito la forma di un ellissoide, con tre assi leggermente diversi; l'asse maggiore è quello puntato costantemente verso la Terra.

4.2 Contributo delle forze di gravità

Nel paragrafo XIII Lagrange passa a considerare il contributo delle forze di gravità. A questo scopo esprime R e R' in funzione delle coordinate lagrangiane, delle coordinate polari locali che definiscono la posizione di *dm* sulla Luna e delle coordinate che definiscono la posizione di Terra e Sole. Indicando con x, y e z le coordinate del centro della Terra e con x', y' e z' le coordinate del centro del Sole, le distanze R e R' calcolate a partire dall'elemento *dm* di coordinate X, Y e Z, sono fornite da:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2} \\ R' &= \sqrt{(X-x')^2 + (Y-y')^2 + (Z-z)^2} \end{aligned} \tag{14}$$

in cui si è tenuto conto che $z = z'$ perché, per definizione, il piano dell'eclittica contiene sia la Terra sia il Sole. Per Lagrange, a questo punto è solo questione di algebra elementare trovare le variazioni δR e $\delta R'$. Per una maggiore comodità nel calcolo degli integrali rispetto a *dm* e per dare una maggiore espressività ai risultati, egli definisce la posizione della Terra e del Sole usando coordinate di tipo astronomico, in luogo di quelle cartesiane. Per la Terra introduce:

ρ, la distanza tra Terra e Luna, proiettata sull'eclittica

υ, la longitudine della Luna, vista secondo il sistema astronomico terrestre, aumentata di 180°.

λ, la tangente della latitudine della Luna vista dalla Terra, con segno cambiato

Per quanto riguarda il Sole:

ρ', la distanza tra Terra e Sole

υ', la longitudine del Sole, visto secondo il sistema astronomico terrestre.

Trova le relazioni:

$$x = \rho \cos \upsilon, \quad x = \rho \operatorname{sen} \upsilon, \quad z = \rho \lambda \tag{15}$$

$$x' - x = \rho' \cos \upsilon', \quad y' - y = \rho' \operatorname{sen} \upsilon', \quad z' = z$$

Utilizzando le (15) e le (7), ottiene un'espressione di R ed R' in funzione di delle coordinate che definiscono la posizione della Terra e del Sole ρ, υ, □, ρ' e υ', delle coordinate astronomiche locali r, P e Q' che definiscono la posizione di *dm* sulla Luna e infine delle coordinate lagrangiane. Le espressioni sono sufficientemente complesse e preferisco non riportarle.

Quando Lagrange calcola la variazione di R ed R', considera variabili solo le coordinate lagrangiane che definiscono la configurazione della Luna intorno al proprio centro, ω, ε ε π. Con una serie di passaggi, sviluppati nei paragrafi XIV, XV e

XVI, nei quali si nota ancora una volta la sua abilità nell'utilizzo del calcolo delle variazioni (da lui ideato), Lagrange esplicita dapprima la variazione di R e R' rispetto alle coordinate lagrangiane ω, ε e π poi integra rispetto alle coordinate astronomiche locali r, P e Q, pervenendo a relazioni nella forma:

$$\int_L \frac{\delta R}{R^2}\, dm = -\frac{3\rho^2}{\rho^5(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}(\Omega'\delta\omega + E'\delta\varepsilon + \Pi'\delta\pi)$$

$$\int_L \frac{\delta R'}{R'^2}\, dm = -\frac{3\rho'^2}{\rho'^5}(\Omega''\delta\omega + E''\delta\varepsilon + \Pi''\delta\pi) \tag{16}$$

in cui Ω', E' e Π' e Ω'', E'' e Π'' stanno a rappresentare funzioni delle coordinate lagrangiane ω, ε e π, e delle loro derivate rispetto al tempo, e della posizione della Terra e del Sole espressa dai parametri ρ, υ, λ, ρ' e υ', supposti funzioni note del tempo; esse hanno le dimensioni di un momento statico e vanno intese come forze generalizzate della Terra e del Sole rispettivamente.

5. Le equazioni differenziali del moto

Nel paragrafo XVII viene riassunta la forma dell'equazione simbolica del moto:

$$\left(\Omega - \frac{3\rho^2}{\rho^5(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}\Omega' - \frac{3\rho'^2}{\rho'^5} - \Omega''\right)\delta\omega + \left(E - \frac{3\rho^2}{\rho^5(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}E' - \frac{3\rho'^2}{\rho'^5} - E''\right)\delta\varepsilon$$
$$+\left(\Pi - \frac{3\rho^2}{\rho^5(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}\Pi' - \frac{3\rho'^2}{\rho'^5} - \Pi''\right)\delta\pi = 0 \tag{16}$$

che, afferma Lagrange, essendo $\delta\omega$, $\delta\varepsilon$ e $\delta\pi$ arbitrari, conduce alle tre equazioni:

$$
\begin{aligned}
&\Omega - \frac{3\rho^2}{\rho^5(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}\Omega' - \frac{3\rho'^2}{\rho'^5} - \Omega'' = 0 \\
&E - \frac{3\rho^2}{\rho^5(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}E' - \frac{3\rho'^2}{\rho'^5} - E'' = 0 \\
&\Pi - \frac{3\rho^2}{\rho^5(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}\Pi' - \frac{3\rho'^2}{\rho'^5} - \Pi'' = 0
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Per la sinteticità della notazione adoperata è difficile riconoscere la natura di queste equazioni. Esse sono di tipo differenziale perché nei coefficienti senza apice compaiono le derivate rispetto al tempo delle coordinate lagrangiane. Più precisamente, si tratta in di un sistema di equazioni differenziali ordinarie non lineari del secondo ordine rispetto al tempo, accoppiate, nelle variabili ω, ε e π. Le equazioni, fa notare Lagrange, coincidono esattamente con quelle trovate da d'Alembert nel 1754 e pubblicate nelle *Memories de l'Academie.*

Nei paragrafi successivi, dal XIX al XXXI – il XVIII è una nota - Lagrange cerca una soluzione approssimata delle equazioni del moto. Sebbene esse siano accoppiate, con opportuni cambi di variabile egli riesce a ottenere dalla prima equazione la rotazione della Luna intorno al suo asse, dalla seconda la nutazione e dalla terza la precessione degli equinozi. In particolare, elaborando la prima equazione differenziale, riesce a dimostrare che la Luna mostra necessariamente sempre la stessa faccia alla Terra, risolvendo in senso positivo la principale richiesta del concorso per il premio dell'Accademia delle Scienze di Parigi. Per sua stessa ammissione, riportata nell'introduzione della *Theorie,* invece la sua successiva analisi del moto dell'asse di rotazione, della nutazione e della precessione, è meno soddisfacente. Gli sviluppi analitici riportati nella seconda parte della *Recherches*, paragrafi XIX-XXXI, sono piuttosto complessi e per essere compresi richiedono una conoscenza delle nozioni astronomiche in auge ai tempi di Lagrange. Un'esposizione sufficientemente chiara, relativa però solo all'analisi della rotazione della Luna intorno al proprio asse, può essere trovata in (Fraser, 1982); per uno studio sulla precessione e sulla notazione è in ogni caso conveniente rifarsi all'esposizione della *Theorie.*

6. Conclusioni

Dal lavoro astronomico delle *Recherches*, Lagrange prende lo spunto per presentare per la prima volta il principio dei lavori virtuali come fondamento della dinamica. Scelto il sistema di riferimento e individuate le forze che intervengono nel sistema dei tre corpi, Terra, Sole e Luna, Lagrange passa a scrivere l'equazione simbolica della dinamica, basandosi su due assunti: a) le forze acceleratrici cambiate di segno (le forze di inerzia) equilibrano le forze applicate (principio di d'Alembert, PdA); b) l'equilibrio è rappresentato dall'annullarsi del lavoro virtuale delle forze agenti (principio dei lavori virtuali, PLV). Anche se l'uso del PLV e del PdA consente una formulazione della dinamica indipendente dall'idea newtoniana di forza, su questo punto Lagrange è ambiguo; tutto sommato egli considera più interessanti gli aspetti operativi e formali di quelli fisici e sebbene usi il PdA per caratterizzare il moto, non è contrario all'approccio newtoniano di Euler e non è infastidito dall'idea della forza causa.

Attribuendo le sue idee a d'Alembert e a Bernoulli, Lagrange sembra ritagliarsi un ruolo marginale nello sviluppo della meccanica. In realtà si tratta solo di un espediente retorico, molto usato a quei tempi, quello di appoggiare le proprie affermazioni sulle spalle di autori di fama consolidata. Per quanto riguarda il punto a), mi sembra che Lagrange abbia trasformato il principio originario, di dubbia interpretazione e difficile applicabilità, in una metodologia comprensibile e utilizzabile in modo generale; in nessun modo si può ritenere che il suo contributo sia stato marginale. A mio parere è comunque il punto b), e cioè l'utilizzo del PLV, che rivela il genio di Lagrange; egli modifica profondamente l'enunciato di Bernoulli, trasformandolo da scomodo strumento di analisi dell'equilibrio (Capecchi, 1999), da essere preferito nella pratica da approcci più diretti, allo strumento più flessibile e semplice che ancora oggi si conosca per scrivere le equazioni di equilibrio e di moto. A questo scopo è naturalmente essenziale, almeno per la trattazione dei sistemi continui, l'abbinamento del PLV con il calcolo delle variazioni, da poco sviluppato dallo stesso Lagrange. Nonostante l'estrema laconicità dell'esposizione di Lagrange, che a sentire Galletto (1991) è dovuta anche a motivazioni di priorità scientifica in un non completamente mascherato conflitto con Euler, mi sembra si possa affermare che le Recherches rappresentino un tappa fondamentale per la meccanica razionale; più fondamentale ancora della Mecanique analytique.

Il lavoro di fondazione della meccanica analitica iniziato con la *Recherches* è portato a termine nella *Theorie*, in cui compaiono per la prima volta le famose equazioni di Lagrange, ma l'esposizione e l'uso da parte di Lagrange nella *Recherches* del PLV e del PdA è così maturo che, almeno per quello che riguarda le parti fondanti, la *Mecanique analitique* sembra solo un'esposizione più ordinata e meglio formalizzata

Bibliografia

1 V. Angiulli, *Discorso Intorno agli Equilibri,* Stamperia Simoniana, Napoli, 1770.

2 W. Barroso Filho, *La Mecanique de Lagrange*, Karthala, 1994.

3 D. Bernoulli, *Remarques sur le principe de la conservation des forces vives pris dans un sens general*, Memoria dell'Accademia delle Scienze di Berlino, Vol. IV, pagg. 356-364, 1748 (1750).

4 Jean Bernoulli, Du discours sur le loix de la communication du movement, in *Opera Omnia*, cap. I, Losanna, 1742.

5 M.T. Borgato, L. Pepe, Lagrange a Torino (1750-1759) e le sue lezioni nelle R. Scuole di Artiglieria, *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche,* VIII, 3-43, 1987.
6 D. Capecchi, *Il Principio dei Lavori Virtuali da Aristotele a Bernoulli*, Luda Editore, Napoli, 1999.
7 D. Capecchi, Il Principio delle azioni di Vincenzo Angiulli, *XI Congresso Naz. di Storia della Fisica e dell'Astronomia*, Como, 1999, pagg.157-169.
8 M. Capriglione, *Studio Storico Critico della Meccanica Analitica di J.L. Lagrange*, Tesi di laurea, Università degli studi di Napoli, 1992.
9 J. d'Alembert, *Traité de Dynamique (1743)*, David, Parigi 1758 (copia anastatica, J. Gabay, Sceaux, 1990).
10 A. Drago, Il principio di d'Alembert non è un principio. Il suo rapporto con il principio dei lavori virtuali. *XI Congresso Naz. di Storia della Fisica e dell'Astronomia*, Como, 1999, pagg.185-209.
11 R. Dugas, *Historie de la Mecanique*, Griffon, Neuchatel, 1950.
12 L. Euler, Sur la vibration des cordes, *Memorie dell'Accademia delle Scienze di Berlino* [4] (1748), 1750, pagg. 69-85. In L. Euleri, *Opera Omnia*, II **10**, pag. 63-77, 1947.
13 C. Fraser, J.L. Lagrange's early contribution to the principles and methods of mechanics, *Archive for History of Exact Sciences, 28,* 197-241, 1982.
14 C Fraser, *Calculus and Analytical Mechanics in the Age of Enlightenment*, Variorum, 1997
15 D. Galletto, Lagrange e le origini della Mecanique Analytique, *Giornale di Fisica,* XXXII, 84-126, 1991.
16 J.L. Lagrange, *Oeuvres,* De M. J.A. Serret, Gauthier-Villard, Parigi, 1873.
17 R. B. Lindsay e H. Margenau, *Fundations of Physics*, Dover, New York. 1963.
18 E. Mach, *La Meccanica nel suo Sviluppo Storico,* Boringhieri, Torino, 1992.
19 H. Pulte, Jacobi's criticism of Lagrange: the changing role of Mathematics in the fundation of classical Mechanics, *Historia Mathematica*, **25,** 154-184, 1998.
20 V. Riccati, *Dialogo di Vincenzo Riccati della Compagnia di Gesù dove ne' congressi di più giornate delle forze vive e dell'azioni delle forze morte si tien discorso,* Stamperia di Lelio dalla Volpe, Bologna, 1749.
21 C. Truesdell, The Rational Mechanics of Flexibler or Elastic Bodies 1638-1788, Introduction to L. Euleri, *Opera Omnia* Fussli Turici, II **12**, 1954.
22 C. Truesdell, *Essay in the History of Mecanics*, Spinger-Verlag, New York, 1968.
23 P. Varignon, *La Nouvelle Mecanique ou Statique,* Claude Joubert, Parigi, 1725.

Note al testo

1 - Nella parte della *Mecanique analytique,* ove espone succintamente la storia del PLV, Lagrange non dice nulla al proposito; ma in Italia c'era una lunga tradizione sull'uso del PLV in meccanica; qualche anno prima della pubblicazione della *Recherches* e qualche anno dopo, compaiono i lavori di due studiosi italiani, Vincenzo Riccati e Vincenzo Angiulli (Capecchi, 1999), che presentano un'esposizione più matura del PLV rispetto a quella proposta da Johann Bernoulli e pertanto non è fuori luogo chiedersi se il "francesizzato" Lagrange non sia rimasto più italiano di quanto si vuole comunemente accreditare, specie da parte della letteratura francofona. Va segnalato che Lagrange insegnava come Vincenzo Angiulli, in una scuola militare e forse varrebbe la pena di indagare bene nei libri di testo di queste scuole per vedere se sia possibile trovare un percorso italiano alla *Mecanique analytique*.

2 - In realtà d'Alembert per forza acceleratrice intende di fatto la sola accelerazione, riservando il termine di forza motrice al prodotto dell'accelerazione per la massa (d'Alembert, *Traité de dynamique*, pag. 26). Anche Newton ed Euler usano il termine forza acceleratrice ma con il significato di forza impressa per unità di massa; quest'ultimo è l'uso prevalente nel settecento e nell'ottocento. Alla forza acceleratrice di Lagrange cambiata di segno, attribuendole anche uno stato ontologico che forse per lui non aveva, ci si riferisce oggi come alla forza di inerzia.

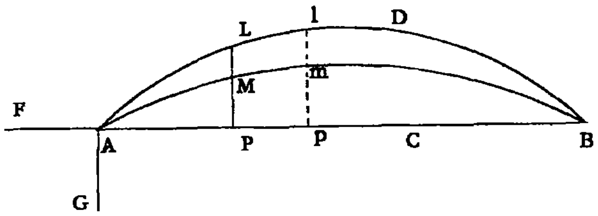
3 - Per una prima chiarificazione dell'idea di riferimento inerziale bisognerà aspettare gli studi di Coriolis della prima metà dell'ottocento (1835).

4 - Nella trascrizione delle formule di Lagrange ho apportato, fin dall'inizio e quindi anche nelle relazioni (1) e (2), una leggera variante tipografica, la stessa che adotterà lui nella *Theorie*: invece di indicare la massa elementare con α, ho usato il simbolo *dm*, mettendolo dopo la forza per unità di massa anziché prima. Così, per esempio, la (3) nell'originale è scritta come:

$$\int\left[\alpha\frac{d^2X}{dt^2}(-\delta X)+\alpha\frac{d^2Y}{dt^2}(-\delta Y)+\alpha\frac{d^2Z}{dt^2}(-\delta Z)+\alpha\frac{T}{R^2}(-\delta R)+\alpha\frac{S}{R^2}(-\delta R)\right]=0$$

5 - L'approccio di Lagrange era già stato adottato da Vincenzo Riccati (*vedi* Appendice)

6 - La comprensione del testo di Euler è facilitata dalla seguente figura.



7 - Nella *Theorie* e nella *Mecanique*, Lagrange spiegherà il "principio" di d'Alembert in modo simile a quello di Euler riferito sotto.

8 - A questo scopo l'equazione simbolica dovrebbe contenere anche il lavoro virtuale fatto dalle forze di attrazione tra la Terra e il Sole, che non compaiono nell'equazione (4) perché Lagrange non intende studiare il problema completo dei tre corpi.