Meccanica “discreta” e relatività discreta

Pasquale De Martino

Da alcuni decenni è nata una meccanica “discreta”, che cioè utilizza solo tecniche di calcolo di approssimazione finita, imponendo però “a priori” le conservazioni classiche, o nella forma più semplice, o attraverso la Lagrangiana o altre funzioni generali. Qui si fa la storia delle proposte più significative. Inoltre si aggiunge la poco nota meccanica di Carnot, la quale è l’unica tra le formulazioni classiche ad essere fondata su quelle conservazioni e ad essere basata su un fenomeno essenzialmente discreto, qual è l’urto dei corpi. Si verifica che la discretizzazione delle variabili corrisponde molto bene al suo formalismo matematico di tipo algebrico, come pure al suo legame con il principio dei lavori virtuali.

Si esamina successivamente il possibile rapporto con la relatività ristretta, sia rispetto ad un lavoro di Hill che riesce, almeno in parte, ad esprimere il gruppo di Lorentz nel campo dei soli razionali, sia rispetto alla formulazione di Levy Leblond, che passa dalla meccanica classica alla relatività generalizzando proprio le conservazioni classiche. Tra meccanica classica e relativistica risulta allora un percorso coerente, all’interno di un formalismo matematico che è il più basso possibile.

1. Introduzione

Il problema del moto dei sistemi fisici complessi (formati da più di due particelle) viene solitamente risolto mediante calcoli numerici; ovviamente nella rappresentazione numerica dell’evoluzione dei sistemi fisici le leggi fondamentali di conservazione sono soddisfatte solo approssimativamente.

Nella continua ricerca di nuove tecniche di approssimazione c’è stata una novità che è stata chiamata “meccanica discreta”. Ci si è accorti che molte formule della meccanica possono essere ripetute anche definendo spazio, tempo, velocità, accelerazione e forza come variabili discrete; in particolare, con queste variabili discrete si ottengono di nuovo le conservazioni classiche della meccanica: quantità di moto, momento della quantità di moto ed energia. Allora è nata l’idea della “meccanica discreta”: essa è un metodo numerico (sviluppato specialmente da Greenspan e Renna) per la risoluzione delle equazioni della meccanica che soddisfano *a priori* le leggi di conservazione fisiche; ed è anche una vera e propria teoria fisica a variabili discrete, che, al tendere a zero degli intervalli di discretizzazione, tende alla fisica classica.

I complicati sistemi dinamici continui debbono essere risolti numericamente, discretizzandoli; ebbene nella meccanica discreta si parte già con le variabili discrete e le soluzioni numeriche sono strettamente collegate alle soluzioni continue. Inoltre nei calcoli numerici la validità delle leggi di conservazione può evitare instabilità numeriche.

Infine la meccanica discreta trova le sue motivazioni anche nella semplicità della struttura algebrica delle equazioni del moto, la soluzione delle quali talvolta richiede solo semplici operazioni di natura aritmetica.

In questa comunicazione si fa la storia delle proposte più significative, che per comodità e sintesi di esposizione vengono riassunte nella seguente tabella:

TABELLA RIEPILOGATIVA

	Premesse	**Casi particolari**	**Risultati**
Greenspan 1971	$f = ma$ Velocità ed accelerazione definite in modo iterativo	Traslazioni e rotazioni.	Invarianti del moto.
Greenspan 1974	Hamiltoniana e invarianti del moto.	Forza centrale su particelle. Σ forze con potenziali additivi a coppie. Limite impulsivo.	Invarianti. Al limite: la meccanica continua.
Renna 1987	Hamiltoniana, parentesi di Poisson.	Particella libera. Forza costante. Oscillatore armonico. Forza gravitazionale.	Invarianti
Renna 1991	Azione discreta di Lee. Velocità definita approssimando la traiettoria mediante piccoli segmenti.	Equazione discreta del moto. Oscillatore armonico monodimensionale. Orbite circolari discrete.	Invarianti. Differenza tra frequenze continue e frequenze discrete.
L. Carnot (1783)	Principio Lavori Virtuali	Traslazioni e Rotazioni	Invarianti

2. La storia delle precedenti meccaniche discrete

Già nel 1971 Greenspan, partendo dalla equazione di Newton $f = ma$ ricostruì la meccanica mediante un insieme di equazioni fondamentali che saranno date come equazioni alle differenze finite. Proprio di tali equazioni, che non è detto che siano le uniche possibili egli va a dimostrare l'invarianza rispetto alla traslazione, alla rotazione ed al moto uniforme.

Andiamo ora a vedere quali sono queste equazioni fondamentali.

Nel caso bidimensionale il tutto può essere sintetizzato nel modo seguente. Data un'unità finita di tempo $\Delta t > 0$, la particella P di massa *m* sia nella posizione (x_k, y_k) al tempo $t_k = k\Delta t$, *K*=0,1,2,....

La velocità v_k di P all'istante t_k è allora definita dal vettore a due componenti:

$$v_k = (v_{k,x}, v_{k,y}) \quad k=0,1,2,... \tag{1}$$

dove $$\frac{1}{2}(v_{k+1,x} + v_{k,x}) = \frac{(x_{k+1} - x_k)}{\Delta t}, \quad k=0,1,2,... \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}(v_{k+1,y} + v_{k,y}) = \frac{(y_{k+1} - y_k)}{\Delta t}, \quad k=0,1,2,... \tag{3}$$

La formula definitoria è chiara se la si pensa come processo ricorsivo che dà $v_{k,x}$, sulla base di un x_0 fissato (così come specificato nella formula $v_{1,x} = \left(\frac{2}{\Delta t}\right)[x_1 - x_0] - v_{0,x}$)

Analogamente l'accelerazione a_k di P all'istante t_k è definita da

$$a_k = (a_{k,x}, a_{k,y}), \quad k=0,1,2,... \tag{4}$$

dove $$a_{k,x} = \frac{(v_{k+1,x} - v_{k,x})}{\Delta t}, \quad k=0,1,2,... \tag{5}$$

$$a_{k,y} = \frac{(v_{k+1,y} - v_{k,y})}{\Delta t}, \quad k=0,1,2,... \tag{6}$$

Allora vale

$$F_k = ma_k, \quad k=0,1,2,... \tag{7}$$

dove

$$F_k = (F_{k,x}, F_{k,y}), \quad k=0,1,2,... \tag{8}$$

e questa è detta equazione di Newton discreta. La determinazione del moto di P, data la (7) con (x_0, y_0) e v_0 assegnati, è detta un problema ai valori iniziali ed è un ben noto problema della matematica.

Ebbene tale formulazione di meccanica discreta applicata a rotazioni e traslazioni consente di ottenere gli invarianti del moto.

Nel 1974 è di nuovo Greenspan insieme a Robert A. LaBudde a riproporre una "meccanica discreta" utilizzando l'hamiltoniana; questo funzionale contiene tutte le informazioni concernenti il moto la cui traiettoria è data dalle equazioni canoniche di Hamilton $\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}}, \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$. In questo caso è stato dimostrato che si conservano gli invarianti nel caso di forza centrale su particelle, di Σ di forze con potenziali additivi a coppie e di limite impulsivo.

Nel 1987 anche Renna ha suggerito un modello di meccanica discreta mediante le equazioni continue di Hamilton: viene dato un semplice modello di meccanica classica discreta dove vengono stabilite le equazioni discrete del moto insieme ad un'opportuna definizione di gradiente discreto. Come conseguenza vengono dimostrate le leggi di conservazione del momento della quantità di moto, del momento angolare, e dell'energia.

Nella meccanica continua un sistema dinamico di *k* particelle, il vettore posizione $\mathbf{r}^{(i)}$ della i-esima particella ed il suo rispettivo momento $\mathbf{p}^{(i)}$ obbediscono alle equazioni di Hamilton. Nei casi più comuni, l'energia totale *E=H*, e se *t* non appare esplicitamente in *H*, l'energia *E* si conserva.

La legge di conservazione di una variabile dinamica che non dipende esplicitamente dal tempo può essere formulata in termini di parentesi di Poisson. Così, se s è una costante del moto, deve avere la proprietà $[H, s] = 0$. Cioè, la parentesi di Poisson di una costante del moto con la Hamiltoniana si annulla. Questo è l'usuale approccio classico alla meccanica continua (Landau e Lifshitz[8]).

In seguito per postulare le equazioni discrete del moto, stabiliamo una corrispondenza tra le variabili e operatori discreti e quelli continui.

Il tempo è considerato come un parametro discreto t_n, e le funzioni continue $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{p}(t)$ sono sostituiti dalle quantità discrete $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}(t_n)$ e $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}(t_n)$. Ora, possiamo postulare le seguenti corrispondenze:

$$\begin{aligned} H \to H_n &\equiv H\left(\mathrm{r}_n^{(1)}, \ldots, \mathrm{r}_n^{(k)}; \mathrm{p}_n^{(1)}, \ldots, \mathrm{p}_n^{(k)}, t_n\right) \\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{v}} &\to \frac{\partial}{\partial \mathrm{v}_n} \end{aligned} \tag{1}$$

dove H_n è l'Hamiltoniana discreta e $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_n}$ è un operatore discreto (che sarà definito in seguito) analogo all'operatore gradiente continuo.

Postuliamo anche che le equazioni discrete del moto siano

$$\dot{\mathbf{r}}_n^{(i)} = \frac{\partial H_n}{\partial \mathbf{p}_n^{(i)}}, \quad i=1,\ldots,k \tag{2}$$

e

$$\dot{\mathbf{p}}_n^{(i)} = -\frac{\partial H_n}{\partial \mathbf{r}_n^{(i)}}, \quad i=1,\ldots,k \tag{3}$$

dove la derivata rispetto al tempo del vettore discreto $\mathbf{v}_n$ è definita come

$$\dot{\mathbf{v}}_n = \frac{\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n}{t_{n+1} - t_n} \equiv \frac{\Delta \mathbf{v}_n}{\Delta t_n} \tag{4}$$

Ora verifichiamo che le leggi di conservazione restino valide. Ciò dipenderà dalla scelta del gradiente discreto. In analogia col caso continuo, affermiamo che l'energia di un sistema fisico è una costante del moto se la Hamiltoniana discreta H_n non dipende esplicitamente dal tempo; allo stesso modo la variabile discreta s_n è una costante del moto se le parentesi discrete di Poisson

$$[H_n, s_n] = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial H_n}{\partial \mathbf{r}_n^{(i)}} \cdot \frac{\partial s_n}{\partial \mathbf{p}_n^{(i)}} - \frac{\partial H_n}{\partial \mathbf{P}_n^{(i)}} \cdot \frac{\partial H_n}{\partial \mathbf{r}_n^{(i)}} \right) \tag{5}$$

si annullano per ogni n.

Le conservazioni dell'energia e del momento sono state ottenute nei casi di particella libera, forza costante, oscillatore armonico, forza gravitazionale.

E' di nuovo L. Renna in un articolo del 1991 a presentare un metodo diverso di discretizzazione della meccanica a partire dall'azione.

La formulazione discreta di Lee, della meccanica, trova le sue maggiori applicazioni nella meccanica quantistica e relativistica, ma soffre di alcune inadeguatezze nella meccanica classica (D'Innocenzo et al., 1984). Tuttavia è stato dimostrato (D'Innocenzo et al., 1984, 1987) che una semplice modifica della forma dell'azione discreta elimina alcune difficoltà per l'oscillatore armonico, producendo risultati che sono in accordo con quelli di altri modelli classici discreti (LaBudde e Greenspan, 1974; Renna, 1987). Perciò, partendo dal modello di meccanica discreta di Lee e dalla sua versione modificata, è possibile esaminare in modo abbastanza semplice alcuni effetti dovuti alla discretizzazione.

In tale articolo vengono sviluppati alcuni esempi di moti periodici e viene mostrato che, in generale, le loro frequenze discrete sono differenti da quelle continue. Lo si vedrà introducendo le equazioni del moto classiche discrete e presentando delle osservazioni circa la forma delle soluzioni discrete del moto di una particella su un'orbita circolare e soggetta alla forza gravitazionale.

3. La discretizzazione della meccanica di Lazare Carnot

Ora proporremo, sulla base dei risultati precedenti, una nostra riformulazione in forma discreta della meccanica di Lazare Carnot come soluzione di un problema che viene suggerito dalla stessa discretizzazione. Tra le formulazioni della teoria meccanica, invece di discretizzare quelle che si basano essenzialmente su fenomeni continui (Newton, Lagrange, ecc.), è più adeguato discretizzare una formulazione della meccanica che si basa essenzialmente su un fenomeno discreto quale è l'urto. Questa è la formulazione di L. Carnot (1783), la quale inoltre fa uso di una matematica solo elementare (calcolo vettoriale) e la sua matrice culturale è il principio dei lavoro virtuali. Faremo vedere come effettivamente un tale modello discreto conserva gli invarianti del moto e come tali equazioni fondamentali possano essere derivate, mediante opportune approssimazioni e semplificazioni, dal principio dei lavori virtuali.

Per i nostri scopi si preferisce discretizzare i soli intervalli di tempo. Per quanto riguarda l'urto, la situazione in cui si verifica un vero e proprio sconvolgimento nell'ambito delle variabili fisiche interessate, staremo molto attenti a scegliere tali intervalli di tempo; più precisamente andremo a prendere i due intervalli temporali immediatamente precedenti e immediatamente successivi all'intervallo in cui avviene l'urto.

Tenteremo in seguito di approssimare al meglio l'intero fenomeno mediante un'opportuna scelta dell'ampiezza degli intervalli temporali, e di conseguenza delle variabili vettori posizione; in modo da avvicinare quanto più possibile la situazione limite reale. In tale ambito la nostra discretizzazione si riduce ad una vera e propria approssimazione delle velocità del moto. In realtà si poteva tentare la discretizzazione utilizzando la definizione di velocità così come data da Greenspan(1971) in "Simmetrie nella meccanica discreta" $\frac{1}{2}\left(v_{k+1,x}+v_{k,x}\right)=\frac{\left(x_{k+1}-x_k\right)}{\Delta t}$. In tal caso però, essendo la velocità definita come processo ricorsivo sulla base di un x_0 vettore posizione all'istante iniziale, il tutto sarebbe risultato meno facile perché per prima cosa nella meccanica di L. Carnot entrano in gioco le sole velocità e poi perché, la velocità da Greenspan viene definita in maniera localizzata su un intervallo ben definito.

Sia ora data la velocità che aveva prima dell'interazione

$$\vec{W}_{n,i}=\frac{\vec{r}_{n,i}-\vec{r}_{n-1,i}}{t_n-t_{n-1}} \qquad (1)$$

(con $\vec{r}_{n,i}=\vec{r}_i\left(t_n\right)$ vettore posizione dell'iesima particella al tempo discreto t_n), e quella che avrà dopo l'interazione

$$\vec{V}_{n,i} = \frac{\vec{r}_{n+2,i} - \vec{r}_{n+1,i}}{t_{n+2} - t_{n+1}} \qquad (2)$$

Con tale scelta dei vettori $\vec{W}_{n,i}$ e $\vec{V}_{n,i}$ si intende collocare l'urto nell'intervallo temporale minimo $[t_n, t_{n+1}]$.

Cosicché

$$\vec{U}_{n,i} = \vec{W}_{n,i} - \vec{V}_{n,i} \qquad (3)$$

indica la velocità che ogni corpo di massa m_i perde, per ogni intervallo Δt_n, nell'interazione e, per come abbiamo definito $\vec{W}_{n,i}$ e $\vec{V}_{n,i}$, $\vec{U}_{n,i}$ viene ad essere considerato tra $n-1$ e $n+1$, situazione questa più ideale rispetto a quella in cui ponendoci sul punto di separazione, $\vec{U}_{n,i}$ sarebbe stata istantanea (e questo sarebbe risultato più reale), con $\vec{W}_{n,i}$ calcolata sull'intervallo antecedente e $\vec{V}_{n,i}$ sull'intervallo successivo.

La prima equazione fondamentale della formulazione di L. Carnot, vale per i corpi plastici (anche se lui li chiama duri); essa si riferisce all'azione e reazione dei corpi. Allora si può scrivere la prima equazione fondamentale nel caso discreto,

$$\sum_i m_i \vec{U}_{n,i} = 0 \qquad (4)$$

Ora, per corpi completamente plastici la velocità finale $\vec{V}_{n,i}$ da un certo *n* in poi sarà la stessa per ogni corpo e quindi si può scrivere

$$\sum_i m_i \vec{U}_{n,i} \vec{V}_{n,i} = 0 \qquad (5)$$

Carnot ha potuto generalizzare la precedente uguaglianza per tutti i tipi di corpi introducendo l'indice di elasticità *h*. Ragionando per analogia, egli dice che nell'urto di corpi qualsiasi i prodotti $m_i \vec{U}_{n,i}$ cambiano per un fattore che va da 1 per i corpi completamente plastici a 2 per i corpi elastici.

Infatti, essendo $\vec{V}_{n,i} = \vec{W}_{n,i} - \vec{U}_{n,i}$ per ogni *n*, la precedente equazione (5) può anche essere scritta come

$$\sum_i m_i \vec{W}_{n,i} \cdot \vec{U}_{n,i} - \sum_i m_i \vec{U}^2_{n,i} = 0 \qquad (6)$$

che, introducendo l'indice *h*, diventa

$$\sum_i m_i \vec{W}_{n,i} \cdot \left(\frac{\vec{U}_{n,i}}{h} \right) - \sum_i m_i \left(\frac{\vec{U}^2_{n,i}}{h^2} \right) = 0 \qquad (7)$$

o anche:

$$h\sum_i m_i \vec{W}_{n,i}\cdot\vec{U}_{n,i} - \sum_i m_i \vec{U}^2_{n,i} = 0 \qquad (8)$$

Ma siccome $\vec{W}_{n,i} = \vec{U}_{n,i} + \vec{V}_{n,i}$ per ogni n,

$$\sum_i m_i \vec{V}_{n,i}\cdot\vec{U}_{n,i} = \sum_i m_i \vec{U}^2_{n,i}\frac{1-h}{h} \qquad (9)$$

Allora se h=1 si ha il caso precedente. Invece per h=2 si ha

$$2\sum_i m_i \vec{V}_{n,i}\cdot\vec{U}_{n,i} + \sum_i m_i \vec{U}^2_{n,i} \qquad (10)$$

che a causa della relazione trigonometrica $\vec{W}^2_{n,i} = \vec{V}^2_{n,i} + \vec{U}^2_{n,i} + 2\vec{U}_{n,i}\cdot\vec{V}_{n,i}$ per ogni n, può ridursi alla ben nota conservazione dell'energia cinetica (discreta) per il caso dei corpi elastici:

$$\sum_i m_i \vec{W}^2_{n,i} = \sum_i m_i \vec{V}^2_{n,i} \qquad (11)$$

In seguito L. Carnot introduce uno strumento di calcolo matematico sostitutivo delle equazioni differenziali; esso è basato sul concetto di "moto geometrico" ("un moto assegnato ad un sistema di corpi è geometrico se è tale che sia possibile anche il movimento opposto").

L'introduzione di tale concetto permette a Carnot di stabilire la seconda equazione fondamentale che nel caso discreto può essere trascritta come

$$\sum_i m_i \vec{U}_{n,i}\cdot\vec{u}_i = 0 \qquad (12)$$

In questa equazione, che si applica ad un sistema di corpi interagenti per urto e per contatto mediato da fili o verghe, $\vec{u}_i$ è la sua velocità geometrica, ossia una qualsiasi velocità relativa ad un moto geometrico attribuibile al sistema: per i nostri scopi possiamo anche non discretizzarla e quindi lasciare continua. In altri termini questa velocità è una grandezza indeterminata ed ogni sua specificazione dà luogo, nella relazione (11), ad un'equazione applicabile al sistema.

Per esempio, nella (11) assegnando alle $\vec{u}_i$ uno stesso valore $\vec{u} = \mathbf{cost}$ (cosa che possiamo fare, perché possiamo sempre trovare una traslazione uniforme di tutto un sistema di corpi; essa è un moto geometrico); si ha

$$\sum_i m_i \vec{u}\cdot\vec{U}_{n,i} = 0; \rightarrow \vec{u}\sum_i m_i \vec{U}_{n,i} = 0 \qquad (13)$$

Da qui, per l'arbitrarietà di $\vec{u}$ segue:

$$\sum_i m_i \vec{U}_{n,i} = 0;\ \text{cioè}: \sum_i m_i \vec{W}_{n,i} = \sum_i m_i \vec{V}_i \qquad (14)$$

E questa è proprio la conservazione della quantità di moto del sistema.

Possiamo poi assegnare un altro moto geometrico, consistente nel far ruotare tutto il sistema attorno ad un asse fisso con velocità angolare $\vec{\omega}$ (anche in questo caso possiamo sempre trovare una porzione di spazio in cui i vincoli distano dal sistema di corpi abbastanza da rendere questa rotazione un moto geometrico). In tal caso avremo:

$$\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_{n,i} \tag{15}$$

con $\vec{r}_{n,i} = \vec{r}_i(t_n)$ vettore posizione dell'i-esima particella al tempo discreto t_n e preso in corrispondenza dell'istante iniziale dell'intervallo temporale che precede l'urto;

$$\sum_i m_i \vec{U}_{n,i} \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}_{n,i} = 0 \tag{16}$$

Per le proprietà del prodotto misto, si ha:

$$\sum_i m_i \vec{\omega} \cdot \vec{r}_{n,i} \times \vec{U}_{n,i} \tag{17}$$

per l'arbitrarietà di $\vec{\omega}$, si ha:

$$\sum_i m_i \vec{r}_{n,i} \times \vec{U}_{n,i} = 0 \tag{18}$$

Infine, siccome $\vec{U}_{n,i} = \vec{W}_{n,i} - \vec{V}_{n,i}$ si ha:

$$\sum_i m_i \vec{r}_{n,i} \times \vec{W}_{n,i} = \sum_i m_i \vec{r}_{n,i} \times \vec{V}_{n,i} \tag{19}$$

Quest'ultima equazione esprime la conservazione del momento della quantità di moto.

In totale abbiamo visto che la discretizzazione della meccanica di Lazare Carnot non porta a nessuna difficoltà; gli è naturale. Inoltre i suoi moti geometrici evidenziano anche nel formalismo discreto le simmetrie della meccanica dell'urto: intesi come moti di insieme (che sono sempre geometrici) formano gruppo, perché sono associativi, commutativi, e possiedono sempre l'inverso (in quanto per definizione sono invertibili). Allora possiamo dire che il sottogruppo dei moti traslatori uniformi porta, con la tecnica di Carnot, alla conservazione della quantità di moto; e il sottogruppo dei moti rotatori uniformi porta alla conservazione del momento della quantità di moto. Infine l'invarianza dell'energia è possibile ricavarla, come abbiamo visto all'inizio del paragrafo, dalle equazioni fondamentali.

4. La meccanica discreta in relatività

Vediamo dapprima i risultati di Hill (1955) che, nonostante siano anteriori ai lavori menzionati relativamente alla meccanica classica, ci aiutano ad estendere la "fisica discreta" all'ambito della relatività ristretta. Questi esamina le trasformazioni di Lorentz ristrette a quelle con coefficienti razionali; l'intento è quello di scoprire quali proprietà si conservano; si evince che il metodo va bene in uno spazio a momento ed energia discreti, invece che in uno spazio in cui le variabili sono le posizioni.

Più precisamente il suo intento è stato quello di scoprire quali proprietà si conservano e quali altre andranno ad aggiungersi in un modello di spazio a momento ed energia discreti rispetto agli spazi in cui le suddette variabili variano con continuità.

Per fare di tale nuovo insieme di trasformazioni un ragionevole punto di partenza per una teoria fisica di spazio-tempo le principali richieste che sembrano necessarie sono le seguenti:

1) l'insieme deve formare un gruppo, cioè deve possedere la chiusura rispetto alle trasformazioni successive e deve avere l'inverso;

2) deve essere denso nell'intero gruppo **L**, dove con **L** s'indicherà, d'ora in poi, il gruppo delle trasformazioni di Lorentz a coefficienti continui.

La teoria verrà sviluppata supponendo che le variabili spazio-temporali siano continue, mentre le variabili energia e momento sono limitate ad un certo insieme di valori che è numerabile e che verrà precisato nel seguito; si fa riferimento a questa teoria col nome di spazio a energia e momento discreti.

Si andranno a considerare i valori razionali ammissibili per le variabili energia e momento che scaturiranno dalla soluzione di un'equazione diofantea della forma

$$s^2(m^2-n^2)=(s_1n_1)^2+(s_2n_2)^2+(s_3n_3)^2.$$

Tale equazione esprime, in sintesi, che l'intero positivo $s^2(m^2-n^2)$ è esprimibile come somma di tre quadrati di interi.

E' noto che un intero è esprimibile in questo modo se e solo se non è del tipo $4^a(8b+7)$ dove a e b sono interi non negativi.

Per fare uso di questo risultato insieme all'equazione (6) applichiamo il seguente lemma.

Lemma

L'intero positivo $s^2(m^2-n^2)$ con $(m,n)=1$ è della forma $4^a(8b+7)$ se e solo se $(m^2-n^2)\equiv 7(\mathrm{mod}\,8)$

Per cui abbiamo stabilito le condizioni a cui debbono soddisfare i coefficienti delle trasformazioni di Lorentz in ambito discreto affinché tali trasformazioni formino ancora un gruppo.

Un ulteriore passo avanti in ambito relativistico-discreto può essere fatto andando a considerare la formulazione di Levy Leblond, che passa dalla meccanica classica alla relatività generalizzando proprio le conservazioni classiche.

Cominciamo col considerare la seguente tabella (dove $\mathcal{G}$ sta per Meccanica Galileiana, ξ per la meccanica Einsteiniana):

	Invariante		Conservazione		Collegate (rispetto a una costante)
Energia	ξ : no	$\mathcal{G}$: no	ξ : sì	$\mathcal{G}$: sì	
Quantità di moto	ξ : no	$\mathcal{G}$: sì	ξ : sì	$\mathcal{G}$: sì	ξ
Massa	ξ : sì	$\mathcal{G}$: sì	ξ : no	$\mathcal{G}$: sì	$\mathcal{G}$

Questa tabella (riguardante una formulazione continua) fa considerare un aspetto della relatività ristretta che appare molto interessante: il legame tra invarianza al gruppo di trasformazioni considerato (galileiano o di Lorentz e le conservazioni nel tempo). E' quanto già si è studiato introducendo gli invarianti del moto con la teoria di Lazare Carnot, i quali risultavano invarianti a delle trasformazioni (cioè a dei moti geometrici, che per prima cosa rappresentavano la relatività galileiana).

Allora vogliamo considerare questo legame come l'effettivo fondamento della relatività ristretta; cioè vogliamo considerare questa teoria come essenzialmente determinata da questo tipo di collegamento, tra invarianze e conservazioni.

Lévy Leblond ha suggerito una via per generalizzare le conservazioni della relatività.

In meccanica classica valgono le leggi di conservazione per l'urto

$\sum E(u_k) - \sum E(u'_h) = 0$ e $\sum p(u_k) - \sum p(u'_h) = 0$ dove h può essere diverso da k.

Noi vogliamo che queste conservazioni valgano anche per un cambiamento di sistema di riferimento; cioè:

$$\sum E(u_k + v) - \sum E(u'_h + v) = 0 \text{ e } \sum p(u_k + v) - \sum p(u'_h + v) = 0$$

Siccome in fisica tutte le funzioni ordinarie sono analitiche, possiamo sviluppare le ultime due relazioni rispetto alla variabile v. Otterremo due sviluppi in serie che danno infiniti termini e quindi infinite leggi di conservazione: il che però è impossibile, essendo queste al massimo due. L'unica maniera di rientrare in questo caso è quella di legare le derivate di E e di p al seguente modo:

$$\frac{dE}{dv} \propto p \quad \text{e} \quad \frac{dp}{dv} \propto E;$$

il che comporta che tutte le derivate successive sono collegate tra loro a queste due.

Derivando ulteriormente e sostituendo, si ha e $\frac{d^2E}{d^2v} \propto \frac{dp}{dv} \propto E$ e

$\frac{d^2 p}{d^2 v} \propto \frac{dE}{dv} \propto p$ cioè due ben note equazioni differenziali che hanno per soluzione

$$E = E^0 \cosh(kv) \text{ e } p = p^0 \sinh(kv).$$

Qui, affinché l'argomento delle funzioni iperboliche sia adimensionale, k deve essere una velocità; quindi è $\frac{1}{c}$. Allora riconosciamo le formule relativistiche, pur di scrivere $E^0 = mc^2$ e la velocità venga definita dalla formula $v = c \tanh \varphi$ dove φ è la rapidità e non la velocità. Si noti che la rapidità non può essere all'infinito e che essa funge da parametro del gruppo delle trasformazioni di sistemi di riferimento; infatti, facendo i calcoli, due trasformazioni di riferimento di velocità v e v' danno luogo ad una trasformazione di rapidità la somma delle rispettive rapidità.

Da essa si può giungere alla relatività ristretta con ragionamenti abbastanza semplici a proposito della estensione delle leggi di trasformazioni, così come abbiamo visto con Davidon e Lévy Leblond.

A questo punto ritornando ad analizzare questo possibile passaggio dalla meccanica classica alla relativistica nel caso di una meccanica discreta possiamo sottolineare che le espressioni forniteci da Leblond si fondano sulla teoria degli urti che non è altro che il concetto fondamentale della meccanica di L. Carnot ed addirittura le formulazioni coincidono. Quindi per la discretizzazione della formulazione di Leblond basterebbe ripercorrere gli stessi passi che sono stati necessari per Carnot. Per quanto riguarda le equazioni differenziali ottenute non danno problemi a trattarle in ambito discreto, visto i risultati per l'oscillatore armonico ottenuti con la formulazione di Renna del 1987 che utilizza l'Hamiltoniana discreta e le parentesi di Poisson.

Ecco allora che grazie alla meccanica di Carnot nella forma discreta ed alla formulazione di Renna che il passaggio semplificato dalla meccanica classica a quella relativistica pensato da Lévy Leblonde può essere pensato anche nel discreto con non pochi vantaggi sia dal punto di vista dei calcoli che della semplicità delle espressioni.

Bibliografia

1. D. GREENSPAN, *Symmetry in Discrete Mechanics*, Foundation of Physics, 3, 247-253, (1973).
2. L. CARNOT, *Saggio sulle macchine*, CUEN, Napoli (1994).
3. A. DRAGO, *Appunti del corso di Storia della Fisica.*

4. L. RENNA, *Discrete Effects in Classical Mechanics*, International Journal of Theoretical Physics, 30, 999-1010 (1991).

5. A. D'INNOCENZO, L. RENNA, e P. ROTELLI, European Journal of Physics, 8, 245-252 (1987).

6. R.A. LA BUDDE e D. GREENSPAN, *Discrete Mechanics - A General Treatment*, Journal of Computational Physics, 15, 134-167, (1974).

7. L. RENNA, *Discrete Gradients in Discrete Classical Mechanics*, International Journal of Theoretical Physics, 26, 685-695, (1987).

8. L.D. LANDAU e E.M. LIFSHITZ, *Statistical Physics*, 2nd Ed., Ch. 1, ADDISON-WESLEY, Reading, Mass. (1969).