Interpretazione della nota matematica nelle *Réflexions sur la Puissance Motrice du Feu* di Sadi Carnot

Raffaele Pisano

Abstract: E' noto che Sadi Carnot è stato il padre fondatore della termodinamica moderna o quanto meno ha fornito gran parte dei contributi della termodinamica moderna, nonostante egli si basasse sulla erronea concezione del calore, non conoscesse la corretta equazione matematica della adiabatica e non riuscisse ad esplicitare correttamente la dipendenza dalla temperatura della funzione rendimento di una macchina termica reversibile. In particolare la nota matematica nelle *Réflexions* (Carnot S. 1978, pp. 73-79) è stata per molti anni oggetto di studio da parte dei maggiori storici di Carnot: Fox (Carnot S. 1978), Lervig (Lervig 1972, 1976), Montbrial (Montbrial), Truesdell e Bharatha (Truesdell e Bharatha), Fox (Carnot S. 1986), Cropper (Cropper), Dias, Cassiano & Pinto (Dias, Cassiano & Pinto) et al.. Essi hanno cercato concetti e anche funzioni molto sofisticate (ad es. Lervig), però non sono riusciti a spiegare la modernità del risultato ottenuto da Sadi Carnot; si sono allontanati dal livello matematico semplice (rispetto all'analisi infinitesimale del'800), voluto da Sadi Carnot nella nota matematica delle *Réflexions*; e non hanno spiegato perché Sadi Carnot calcola la formula della efficienza di una macchina termica (Carnot S. 1978, pp. 73-79) mediante l'uso della sola isoterma e della sua opposta, senza considerare le due adiabatiche. Notiamo che per ottenere η il calcolo di L e di Q su ognuna delle quattro trasformazioni del suo ciclo (per ottenere L_{tot}/Q_{tot}) non lo avrebbe portato al risultato, poichè la sua equazione della adiabatica era errata (Appendice). Secondo un metodo ricavato dal padre Lazare e da questi detto metodo sintetico era lecito "eliminare le adiabatiche" dal calcolo dell'efficienza. Infatti, a proposito del metodo sintetico, ho mostrato (Pisano, § 3.16 e 3.18) che Sadi Carnot intende le adiabatiche come le variabili ausiliarie da "sopprimere", (Carnot S. 1978, p. 39, r. 9; p. 39, r. 15). Nel seguito mostrerò che, secondo la termodinamica moderna, è corretto eliminare i loro contributi dal calcolo del lavoro $\oint dL$, per cui si conclude che Carnot ha avuto un risultato modernamente valido ma fortunosamente.

1. I calcoli della nota matematica delle Réflexions

Nelle *Réflexions* (Carnot S. 1978, pp. 73-79), solo nella nota matematica si usa il calcolo differenziale. Essa sintetizza buona parte dei ragionamenti discorsivi della prima parte del libro di Sadi Carnot.

In questo paragrafo, secondo i risultati della mia Tesi di Laurea (Pisano, §§ 3.16 e 3.17) e tenendo presente il contributo interpretativo di Lervig (Lervig 1976, Pisano, § 2.9), darò una ricostruzione interpretativa dettagliata della nota matematica, e verificherò la sua coerenza con il metodo sintetico illustrato dal padre Lazare Carnot.

Per non riportare tutte le formule di Sadi Carnot che sono per lo più elementari, sintetizzerò il contenuto della nota in 8 passaggi cruciali, che costituiscono il seguente diagramma *A* (in basso ad ogni riquadro sono segnate le pagine nella edizione originale, riportata in S. Carnot 1978, e le righe delle pagine della nota alle quali si riferisce il contenuto del riquadro stesso).

1

Scopo della nota Sadi Carnot: determinare la formula dell'efficienza di una macchina termica $\eta = L_{max}/Q = f(t_1, t_2)$ e tradurre matematicamente i ragionamenti esposti nella parte discorsiva delle *Réflexions* nell'ipotesi $c_v(t) = cost.$

(p. 73, r. 1- p. 74, r. 3)

2

Calcolo del lavoro *L* sull'isoterma *t*, tra $V = 1$ e V

$L_t = N(t+267)logV + c \quad [Q_t = A_t + B_t\,logV]$

(p. 74, r. 4 - p. 75, r. 11)

3

Calcolo del lavoro *L* sull'isoterma $t+dt$, tra $V = 1$ e V; e infine del suo incremento in dt $dL_{max} = N(logV)dt \quad [Q_{t+dt} = A_{t+dt} + B_{t+dt}\,logV]$

(p. 75, r. 12 - p. 75, r. 16)

4

Calcolo di $d\eta$ tra le due isoterme $t+dt$ e t

$$d\eta = \eta_{t+dt} - \eta_t = \eta^{\prime} dt \qquad [Q_{t+dt} = Q_t]$$

(p. 75, r. 17 - p. 76, r. 7)

5

Calcolo della quantità di calore su una isoterma uguagliando $Q\,d\eta$ e dL_{max}; da cui

$$Q = \tau \log V \qquad \tau = \cos t(t)$$

(p. 76, r. 8 - p. 76, 1*db*)

6

Calcolo di $c(t)_V = dQ/dt = \tau_t^{\mathrm{I}} \log V + K_t^{\mathrm{I}}$

(p. 77, r. 1 - p. 77, r. 12)

7

I° Ipotesi: $c_V(t) = cost$ per tutte le temperature.

$\eta_t = A_t \log(1+t/B_t)$ [A_t e B_t sono *cost.*]

(p. 77, r. 13 - p. 78, r. 12)

8

II° Ipotesi: $\tau^{\mathrm{I}} = 0$ "La potenza motrice prodotta è esattamente proporzionale alla caduta del calorico $\eta_t = A_t t$" (p. 78, r. 13 - p. 79, r. 1*db*)

Diagramma A. Sintesi della nota matematica delle Réflexions -

Ora tenterò di interpretare tutta la nota delle *Réflexions* analizzando la sequenza dei riquadri del diagramma *A*. Nel seguito ciò che è mia interpretazione (relativamente a calcoli e considerazioni rispetto a quelli di Carnot) è scritto in carattere corsivo.

Nel ***riquadro 1***, occorre notare che Sadi Carnot conta di sfruttare quella che allora era solo un'ipotesi, la costanza del calore specifico per ottenere un risultato decisivo sulla funzione efficienza. Egli inizia la nota nel seguente modo: "Se si ammettesse la costanza del calore specifico di un gas [...]" (p. 73, n. 1, r. 1). Perciò anche il risultato finale (p. 79) è valido sotto questa ipotesi; per cui alla fine egli non poteva essere sicuro del risultato ricavato sotto un'ipotesi allora incerta. (p. 78, n. 1, r. 10).

Nel ***riquadro*** *2* Sadi Carnot calcola il lavoro L_t per uno specifico valore della temperatura t; su questa trasformazione il lavoro è una funzione $L_t = L_t\,(V)$.

Nel ***riquadro 3***, Carnot, nel calcolare l'incremento dL, passa all'isoterma $t+dt$. *Si noti che se (come Carnot fece e giustificò pp. 38-40), non si considerano i contributi delle due adiabatiche in un suo ciclo, questa isoterma e la precedente possono essere considerate, assieme alle due adiabatiche, come un ciclo.* Allora egli ottenne *(per un ciclo)*

$$dL_{max} = N\,log Vdt.$$

Solo l'ipotesi precedente (quella secondo cui egli considera un ciclo infinitesimo costituito dalle sole due isoterme) giustifica il fatto che nel ***riquadro 4*** Sadi Carnot, può considerare l'incremento $d\eta$ della funzione rendimento

$$\eta = \frac{L_{\max}}{Q},$$

per una macchina termica reversibile, operante tra le sole due isoterme t e $t+dt$.

Qui Sadi introduce il suo teorema (p. 38) che è fondamentale per tutto il seguito della nota:

$$\eta = f(t).$$

Cioè il rendimento di una macchina termica è indipendente dal fluido usato e dipende solo dal salto termico. *Occorre precisare che egli avrebbe dovuto indicare* $\eta = f(\Delta t)$; *ma poiché aveva fissato la temperatura iniziale come 0, ciò non gli crea problemi. Inoltre si noti che* $d\eta$ *è un differenziale esatto, perchè* η *dipende dalla sola variabile t; e quindi (nella teoria del calorico in cui Q è una funzione di stato) lo è anche* dL_{max}*. Ciò indica che Sadi Carnot sta ragionando su sole variabili di stato.*

Nel ***riquadro 5*** Sadi Carnot *calcola il lavoro massimo per una quantità di calore Q con un'ipotesi che può apparire arbitraria matematicamente, cioè Carnot pensa che nella espressione di* L_{max} *la funzione di stato Q sia fattorizzabile*:

$$L_{\max} = g(Q, \Delta t) = Q\eta(\Delta t).$$

Dal punto di vista strettamente matematico, questa operazione è scorretta. Questo aspetto della nota matematica è stato più volte dibattuto da diversi autori, tra i quali ricordo le interpretazioni in ordine temporale di Dias (Dias, Pinto & Cassiano, p. 142-143), Truesdell (Truesdell e Bharatha, pp. 61-63), Montbrial (Montbrial, p. 335) e Cropper (Cropper, p. 121). In totale però da questi studiosi non viene suggerita nessuna soluzione o indicazione precisa e stringente. Per prima cosa possiamo ipotizzare che Sadi Carnot pensò la fattorizzazione al fine di facilitarsi i ragionamenti. Ma si può anche ipotizzare che l'idea, presa dal padre, di un rendimento come rapporto ingresso-uscita di una macchina, lo portava naturalmente al calcolo del rapporto $\eta = L/Q$, *considerato come una quantità indipendente da Q. Inoltre Carnot ragionava su un ciclo che riportava tutte le variabili allo stato iniziale, compresa la quantità Q che era la stessa in entrata e in uscita in una macchina termica reversibile, unica eccezione era L: ed è su questa variabile che egli esegue i calcoli, in funzione di Q.*

Ora Sadi Carnot prima calcola la quantità di calore Q sull'isoterma *superiore* $Qd\eta$, e poi la uguaglia all'espressione di dL_{max}:

$$Qd\eta = N \log V dt,$$

da cui dividendo ambo i membri per $d\eta$ ricava

$$\frac{Qd\eta}{d\eta} = \frac{N \log V dt}{d\eta};$$

segue da $d\eta = \eta^{\prime} dt$

$$Q = \frac{Ndt}{\eta^{\prime} dt} \log V,$$

e indicando $N / \eta^{\prime}$ con τ si ha

$$Q = \tau \log V.$$

Nel ***riquadro 6*** Carnot calcola il calore specifico a volume costante c_V. *Per prima cosa stabilisce nel piano (V,t)* le quantità di calore *q, Q e K su tre trasformazioni indicate nel seguente grafico (fig. 1):*

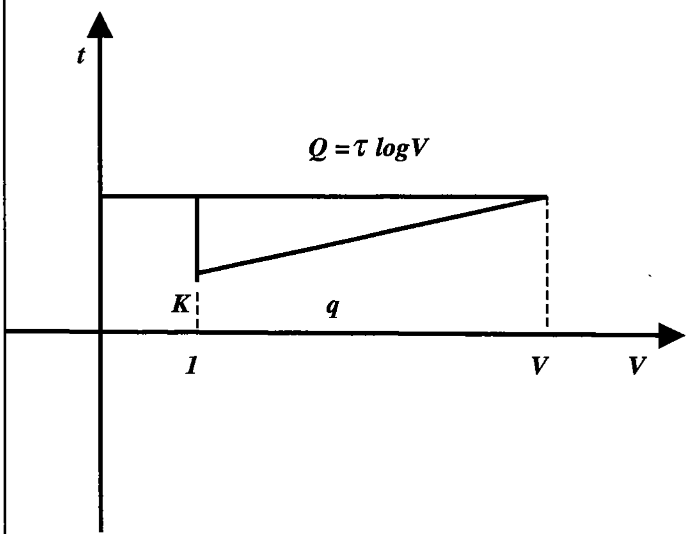

Fig. 1:* Rappresentazione grafiche delle quantità poste da Carnot nella nota matematica delle *Réflexions

Data la conservazione del calorico in un ciclo Sadi Carnot ottiene la seguente relazione:

$$q = Q + K = \tau \log V + K\,.$$

A questo punto egli fissa il volume *V* e calcola c_V:

$$c_V(t) = \left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_V = \frac{d\tau}{dt}\log V + \frac{dK}{dt} = \tau^{\mathsf{I}} \log V + K^{\mathsf{I}} \qquad \text{(a)}$$

Nel ***riquadro*** *7* Carnot utilizza l'ipotesi della costanza di c_V per tutte le temperature

$$c_V(t) = \tau_0^{\mathsf{I}} \log V_0 + K_0^{\mathsf{I}} = \tau_t^{\mathsf{I}} \log V_t + K_t^{\mathsf{I}} = \cos t\,. \qquad \text{(b)}$$

Ora affinchè c_V sia costante per tutte le temperature, esso dev'essere indipendente dal volume, il quale può variare al variare della temperatura.

Per prima cosa pone:

$$\tau^{1} = A_t$$

$$K^{1} = B_t$$

Seguendo il ragionamento di Carnot (Carnot S. 1978, pp. 77-78) o di Lervig (Lervig 1972; vedi § 4, salvo che porre $\vartheta = \tau$ e U=K) e ponendo

$$C_1 t_1 - C_2 t_2 = A_t t \quad \text{e} \quad c_3 - c_2 = B_t,$$

si ricava la seguente espressione per τ

$$\tau = A_t t + B_t. \qquad \text{(c)}$$

Infine, nel ***riquadro 8***, Carnot dichiara di trascurare (p. 78, n. 1, r. 16) il coefficiente τ^{1} del $\log V$ perchè di fatto è una quantità molto piccola; allora ponendo l'equazione $\frac{d\tau}{dt} = \tau^{1} = 0$, e integrando in dt ottiene

$$\int \tau^{1} dt \Rightarrow \tau = c = \cos t;$$

da cui, posto

$$d\eta = \frac{N}{\tau} = \lambda,$$

e passando ad una seconda integrazione, Carnot ricava

$$\eta_t = \int \lambda dt = \lambda t + c_4,$$

che è l'equazione del rendimento di una macchina termica ideale a cui Carnot giunge alla fine della nota.

2. *La "soppressione" delle adiabatiche nelle Réflexions*

A questo punto, terminata l'interpretazione dello sviluppo dei calcoli della nota matematica, occorre precisare un aspetto, l'impostazione del calcolo, che è apparso "misterioso" e a quanto pare è rimasto "inspiegato" da parte di tutti gli storici di Carnot: (nella parte discorsiva delle *Réflexions* - p. 39, r. 9 e r. 15 - e nella prima parte della nota matematica), Sadi Carnot "sopprime le adiabatiche". Perché?

Notiamo che in precedenza, nella parte riguardante il ciclo infinitesimo, Sadi Carnot aveva deciso di *sopprimere la adiabatica* senza dire quale sia il suo procedimento che giustifica questa soppressione. Allora occorre trovare un significato recondito di questa frase. Carnot dice esattamente così:

* "[Semplificazione del ciclo] Allora, essendo molto piccoli i movimenti del pistone durante i passi 3) [espansione adiabatica] e 5) [compressione adiabatica], si potrebbero sopprimere queste due operazioni senza influenzare sensibilmente la produzione di potenza motrice". (p. 39, r. 9)

* Sopprimendo i passi i passi 3) e 5) nella serie di operazioni sopra descritte [ciclo completo a 4 fasi], essa [l'operazione da eseguire per ottenere potenza motrice] si riduce ai seguenti: [...]" (p. 39, r. 15)

* Poi in una nota aggiunge: "Forse può meravigliare che il corpo B, essendo alla stessa temperatura del vapore, sia capace di condensarlo. Senza dubbio questo non è rigorosamente possibile, ma sarà la piccolissima differenza di temperatura a determinare la condensazione, il che è sufficiente a rendere giusto il nostro ragionamento. È così che, nel calcolo differenziale, per essere certi dell'esattezza del risultato è sufficiente poter concepire indefinitamente riducibili le quantità trascurate rispetto alle quantità conservate nelle equazioni. [...]." (p. 18, n. 1, r. 1).

Le frasi sono strane perché sopprimendo le adiabatiche non si avrebbe più un ciclo, ma solo due trasformazioni isoterme a due diverse temperature.

Il calcolo di un ciclo tra le sole due isoterme, t e $t+dt$ ha probabilmente suscitato molta perplessità tra gli studiosi poiché il risultato (finale) è valido modernamente; ma nessuno studioso ha fornito un chiarimento sull'eliminazione delle due adiabatiche, operazione che significa semplicemente non avere più un ciclo. A riguardo cito Fox:

"Ora Carnot calcola la potenza motrice ottenuta nel ciclo [a 4 fasi] per [cioè, avente come agente] l'aria, usando la conveniente assunzione che la "caduta" di temperatura [tra le due trasformazioni isoterme nel ciclo] è così piccola che l'effetto delle [due trasformazioni] adiabatiche può essere ignorato." (Carnot S. 1986, n. 78, r.1, pp. 146-147).

D'altro canto si mostra facilmente (Appendice) che nel calcolo moderno del ciclo di Carnot, i due contributi del lavoro sulle due trasformazioni adiabatiche si compensano. È notevole il fatto che se Sadi Carnot avesse eseguito questo stesso tipo di calcolo nella teoria del calorico, con la sua formula dell'adiabatica, egli non avrebbe ottenuto la compensazione dei due lavori.

Egli aveva a sua disposizione la seguente formula dell'adiabatica (p. 66, r. 10); essa non è corretta modernamente, (mentre quella di Poisson lo è)

$$t(V) = \frac{K + \tau \log V}{K^{1} + \tau^{1} \log V}. \qquad \text{(d)}$$

Sperimentalmente, il coefficiente τ^{1} del $logV$ è una quantità piccolissima, per cui per semplificare i calcoli è lecito porre (così come suggerisce anche Carnot alla fine della nota matematica) $\tau^{1}=0$. Allora l'equazione (d) si potrà scrivere nel seguente modo:

$$t(V)=\frac{K}{K^{1}}+\frac{\tau \log V}{K^{1}},$$

da cui, posto

$$\frac{K}{K^{1}}=M \quad \text{e} \quad \frac{\tau}{K^{1}}=\Omega \tag{e}$$

segue

$$t(V)=M+\Omega \log V. \tag{f}$$

Consideriamo ora il ciclo ideale di Sadi Carnot nella seguente figura 2:

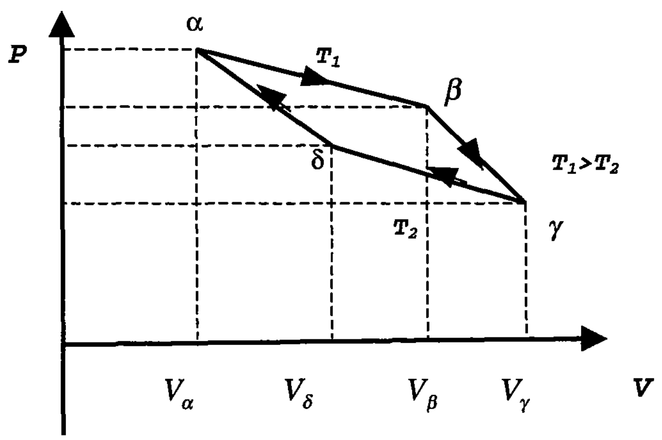

Fig. 2: Ciclo di Carnot

Calcoliamo ora il lavoro $L_{\gamma\beta}$ sull'espansione adiabatica di una gas ideale (Fig. 2):

$$L_{\gamma\beta} = \int_{\beta}^{\gamma} PdV\,; \tag{g}$$

dall'equazione dei gas perfetti *di* Sadi Carnot $PV = Nt$ (Carnot S. 1978, pp. 223-225) si ricava $P = N\dfrac{t}{V}$; che sostituita nella (g) dà

$$L_{\gamma\beta} = N\int_{\beta}^{\gamma} \frac{t(V)}{V} dV\,. \tag{h}$$

Ora sostituendo nella (h), l'espressione di $t(V)$ indicata nella equazione (f), si ha

$$L_{\gamma\beta} = N\int_{\beta}^{\gamma} (M + \Omega \log V)\frac{dV}{V} = N\int_{\beta}^{\gamma} (M + \Omega \log V) d(\log V) =$$

$$= N\int_{\beta}^{\gamma} Md(\log V) + N\int_{\beta}^{\gamma} \Omega \log V d(\log V)$$

segue

$$L_{\gamma\beta} = NM \log V\Big|_{\beta}^{\gamma} + \frac{1}{2} N\Omega \log^2 V\Big|_{\beta}^{\gamma} \tag{i}$$

$$L_{\gamma\beta} = NM(\log V_{\gamma} - \log V_{\beta}) + \frac{1}{2} N\Omega(\log^2 V_{\gamma} - \log^2 V_{\beta})$$
$$= N\left(M \log \frac{V_{\gamma}}{V_{\beta}} + \frac{\Omega}{2}\log^2 V_{\gamma} - \frac{\Omega}{2}\log^2 V_{\beta} \right)$$

Eseguendo lo stesso procedimento di calcolo per il lavoro calcolato sulla compressione adiabatica del gas (fig. 2) si ottiene un lavoro negativo $L_{\delta\alpha}$:

$$L_{\delta\alpha} = N\left(M \log\frac{V_\delta}{V_\alpha} + \frac{\Omega}{2}\log^2 V_\delta - \frac{\Omega}{2}\log^2 V_\alpha \right)$$

A questo punto Sadi Carnot avrebbe potuto seguire due strade:

1) decidere di sviluppare il seguito del calcolo utilizzando l'analisi infinitesimale del suo

tempo (IA);

2) decidere di sviluppare il seguito del calcolo utilizzando solo valori discreti (IP);

Nel seguito propongo entrambi i procedimenti

Caso 1)

Dalla (f) si ricava

$$\log V = \frac{t(V) - M}{\Omega} \cong \frac{At}{\Omega},$$

dove si è posto $t(V)\text{-}M\text{=}At$. Ponendo poi $\Omega/t = \xi$ nella precedente espressione, si ricavano le seguenti espressioni per il volume, che dipendono solo dalla temperatura t:

$$V = Be^{\frac{t}{\xi}}$$

$$dV = e^{\frac{t}{\xi}} \cdot \frac{B}{\xi} dt \qquad \text{(l)}$$

Sostituendo le (l) nella (h) otteniamo

$$L_{\gamma\beta} = N\int_\beta^\gamma \frac{t}{e^{\frac{t}{\xi}}}\frac{1}{\xi}e^{\frac{t}{\xi}}dt = N\int_\beta^\gamma \frac{t}{\xi}tdt = \frac{N}{2\xi}\left(t_\gamma^2 - t_\beta^2\right). \qquad \text{(m)}$$

Eseguendo lo stesso calcolo sull'altro lavoro adiabatico $L_{\delta\alpha} = \frac{N}{2\xi}\left(t_\delta^2 - t_\alpha^2\right)$, e siccome $L_\gamma = L_\delta$ e $L_\beta = L_\alpha$, alla fine si ottiene che i due lavori differiscono (a parte per il segno) solo per quantità infinitesime di temperatura; in definitiva, (poichè sono quantità infinitesime), essi sono uguali ed opposti:

$$L_{\gamma\beta} = - L_{\delta\alpha}. \tag{n}$$

Si ricordi che modernamente i due lavori adiabatici non danno contributo per il calcolo dell'efficienza in un ciclo di S. Carnot: i loro valori numerici sono uguali ed opposti; giustappunto il risultato espresso dalla (n).

Caso 2)

Sadi Carnot, per sopprimere i contributi delle adiabatiche, e operando solo con valori finiti, avrebbe dovuto ottenere (comunque, anche in questo caso) la compensazione dei due lavori sulle due adiabatiche. Ma calcolando i due lavori, $L_{\beta\gamma}$ e $L_{\alpha\delta}$, con la formula (g) per le adiabatiche finite e poi confrontandole la si ottiene invece una disuguaglianza:

$$N\left(M\log\frac{V_\gamma}{V_\beta}+\frac{\Omega}{2}\log^2 V_\gamma-\frac{\Omega}{2}\log^2 V_\beta\right)\neq N\left(M\log\frac{V_\delta}{V_\alpha}+\frac{\Omega}{2}\log^2 V_\delta-\frac{\Omega}{2}\log^2 V_\alpha\right)$$

perché l'uguaglianza non può sussistere per quattro valori generici di V.

Dunque, se Sadi Carnot avesse eseguito i calcoli partendo dalla formula delle sue adiabatiche finite avrebbe ottenuto nessun risultato; d'altronde tale equazione era tentativa e certamente diffidava dall'usare la formula corretta di Poisson: $PV^\lambda = K$ (che egli sicuramente conosceva essendo ben introdotto nella Scuola Politecnica di Parigi dove, appunto, Poisson insegnava) perché essa include l'esponente λ, il quale dipende dal tipo di gas adoperato, per cui:

$L_{\gamma\beta} = \int_{\beta}^{\gamma} \frac{K}{V^{\lambda}} dV = K \log V^{\lambda} \Big|_{\beta}^{\gamma}$; e quindi ciò (in assenza della equazione del primo principio) avrebbe distrutto il suo famoso teorema: *l'indipendenza di L_{max} dall'agente usato* (Carnot S. 1978, p. 38, r. 4).

Con ciò si è spiegato anche perché il risultato finale di S. Carnot è "fortunoso", poiché effettivamente, in termodinamica moderna i lavori delle due adiabatiche (infinitesime) si compensano tra loro (Mencuccini e Silvestrini, pp. 578-583).

2. *Spiegazione della "soppressione" delle adiabatiche: il metodo sintetico*

Allora Sadi Carnot, a seguito dei calcoli di cui sopra, era certo che l'uguaglianza tra i contributi dei lavori delle due trasformazioni adiabatiche doveva essere valida matematicamente, ma solo metodologicamente; perciò egli ragionò sulla formula del rendimento o senza eseguire il calcolo matematico del lavoro sulle due trasformazioni adiabatiche; o, se lo ha eseguito, non gli ha dato importanza per il suo ragionamento, anche perché la formula della adiabatica era tentativa.

Ma allora la domanda da porsi è: qual è il ragionamento recondito, mai esposto da Sadi Carnot nelle *Réflexions*, che lo ha spinto a calcolare la funzione rendimento $\eta = L_{max}/Q$ senza considerare le due adiabatiche?

È noto che, per un dato sistema, una trasformazione adiabatica procede senza scambi di calore con l'esterno. Ora noi stiamo studiando sistemi termodinamici che sono essenzialmente diversi da quelli meccanici proprio per la presenza del calore, che è un fenomeno irriducibile al lavoro meccanico. Che cosa succede se in una trasformazione termodinamica impediamo i passaggi di calore, cioè usiamo un'adiabatica? È sicuro che torniamo ad una situazione meccanica? Non abbiamo prove di ciò. Questa incertezza può essere espressa in maniera tipica da una doppia negazione, la quale permette una frase che non è detto sia equivalente alla corrispondente affermazione positiva. Quindi la adiabatica è formalizzabile con una doppia negazione della meccanicità, o anche del lavoro meccanico; perciò è esatto affermare che $(Q = 0) = \neg\neg L$ (e non la frase affermativa $Q = 0 = L$), che vuol dire: non è vero che non ci sia lavoro. D'altra parte, se $L = p\Delta V$ e quindi un L avviene se c'è ΔV, in realtà il viceversa non è vero: ΔV avviene anche quando c'è un'adiabatica

($Q = 0$), che può dare L solo nel caso in cui c'è reversibilità; perciò tutto dipende dalla modalità con cui avviene la trasformazione adiabatica. (Si noti che è con il ΔV di $L = p\Delta V$ che Sadi Carnot giudicava la reversibilità della trasformazione).

Quanto detto sopra vale anche per un altro motivo, se ci si pone nella teoria dell'equivalenza del calore e lavoro. In questo caso l'ipotesi molecolare chiarisce l'idea espressa precedentemente: se l'interazione delle molecole (urto e forze) non dà calore all'esterno, all'interno c'è forse solo interazione meccanica, cioè essa è senza attrito e viscosità? In altre parole l'adiabatica è veramente una "compressione ad espansione elastica", così come si sosteneva a quei tempi? Certamente non possiamo deciderlo, per cui è bene indicare un'adiabatica con $\neg\neg L$.

In definitiva possiamo scrivere $(Q = 0) = \neg\neg L$. Cioè *l'adiabatica* è il *non non lavoro*. Questo fatto è molto importante perché allora l'adiabatica, che è una componente essenziale del ciclo termico di Carnot, come FDN può essere intesa come l'aggiunta di quel metodo sintetico (fig. 3), di Lazare Carnot, che è espressa anch'essa con una FDN, così come avviene in altre teorie organizzate problematicamente (Vidal C.)

Il metodo sintetico e il metodo analitico hanno avuto origine storica nell'antichità (Pappo); ma in seguito hanno assunto significati diversi, finanche in uno stesso autore (ad es. in Cartesio o in Leibniz). In L. Carnot il metodo sintetico è un metodo di calcolo che è in particolare gli servì per "combattere" la concezione metafisica (allora dominante) degli infinitesimi, cioè dell'infinito in atto in matematica; essa viene ripensata da Lazare Carnot come basata invece su algoritmi solo operativi o effettivi, quelli che usano l'infinito solo potenziale. Allora Lazare Carnot nota che ambedue i metodi usano variabili ausiliarie, ideali (o esseri di ragione) il metodo analitico, operative il metodo sintetico. Queste variabili servono a generalizzare il problema; e siccome dice Carnot "generalizzare è semplificare" (L. Carnot, 1786, p. 257), esse servono a semplificare la ricerca della soluzione del problema; purché però, alla fine del ragionamento, quando si sia ottenuta la soluzione del problema, siamo capaci di far scomparire queste variabili. Quindi secondo L. Carnot, anche il metodo sintetico può compiere questo ciclo di operazioni dell'analisi infinitesimale, ma restando ancorati a grandezze effettive. Ricordando la spiegazione del "doppio errore" alla Berkeley per il calcolo infinitesimale possiamo dire che qui si compiono "due errori", che però alla fine si annullano algebricamente. Quindi per Lazare il dx dell'analisi non è nulla di infinitamente piccolo; è piuttosto una variabile ausiliaria, grande o piccola che sia; l'importante è che semplifichi la ricerca della soluzione del problema e che alla fine dei calcoli scompaia (ad es., col procedimento di limite) e dia una uguaglianza perfetta.

In altre parole, L. Carnot, introducendo anche lui le variabili ausiliarie, accetta, come avanzamento irreversibile e "rivoluzionario", quanto ha introdotto l'analisi tradizionale; ma non accetta il modo con cui essa lo fa. Egli infatti spoglia gli infinitesimi di ogni valore metafisico; e, secondo il metodo sintetico, vincola la innovazione tecnica di quella teoria ad essere sempre legata alla realtà. Allora con L. Carnot la tradizionale analisi infinitesimale, vista fino ad allora come "calcolo sublime", diventa soltanto una tecnica di calcolo che realizza un metodo intellettuale potente per indagare sulla realtà – attraverso il suo ripensamento operativo -; così il vecchio metodo sintetico viene dilatato a nuove capacità, che vanno ben oltre quelle espresse in passato dalle tecniche della geometria di riga e compasso.

In accordo con quanto afferma Gillispie (Gillispie) secondo cui la teoria di Sadi Carnot è una filiazione della teoria del padre, il metodo sintetico di Lazare Carnot appare presente anche nella teoria di Sadi Carnot, o quanto meno è presente nel *retrocervello* del giovane scienziato francese. Una riprova di quanto appena detto, consiste nel fatto che nella precedente esposizione verbale delle *Réflexions* (Carnot S. 1978) introduce il ciclo infinitesimo, i concetti fondamentali di Δt infinitesimo e di ciclo di ragionamento così come avviene (nell'applicazione) del metodo sintetico ad un calcolo di analisi infinitesimale. Inoltre, e questo fatto è decisivo, egli ragiona introducendo e poi "sopprimendo" la variabile ausiliaria. S. Carnot (Carnot S. 1978, nota a p. 18), argomenta che ciò è possibile, quando si opera con il calcolo infinitesimale; questo è quanto già avevano sostenuto Lazare, Berkely e Lagrange (Pisano, § 4.2)).

L'immediata conseguenza del supporre che Sadi Carnot abbia introdotto l'adiabatica come la variabile ausiliaria del metodo sintetico è che, per Sadi Carnot, essa è la variabile ausiliaria che generalizza e poi semplifica la soluzione del problema di quanto sia il rendimento di una macchina termica; perciò (in un ciclo ideale) i contributi dei lavori sulle due trasformazioni adiabatiche infinitesime si compensano tra loro: la "soppressione della adiabatica" nel ciclo di Sadi Carnot può significare proprio quella operazione, tipica del metodo sintetico, di eliminazione della variabile ausiliaria ε. Infatti con questa soppressione, anche nel ciclo di Sadi Carnot si ritorna al sistema iniziale con la soluzione del problema iniziale; infatti il sistema termodinamico torna allo *stato* iniziale con la soluzione di quanto sa il lavoro compiuto per una data quantità Q. (Il lavoro è la preoccupazione di Carnot; che nella prima delle frasi citate (Carnot. S. 1978, p. 39, r. 9) dice "senza influenzare sensibilmente la produzione di potenza motrice"). Quindi in definitiva Carnot ritenne di non dover conoscere la corretta equazione matematica della adiabatica, perché egli si affidò al metodo sintetico rinnovato dal padre Lazare; egli compì il calcolo del ciclo infinitesimo reversibile aggiungendo e sottraendo la variabile ε (l'adiabatica) - così come si fa in tale metodo -; cioè, come egli stesso dice, "sopprimendo l'adiabatica":

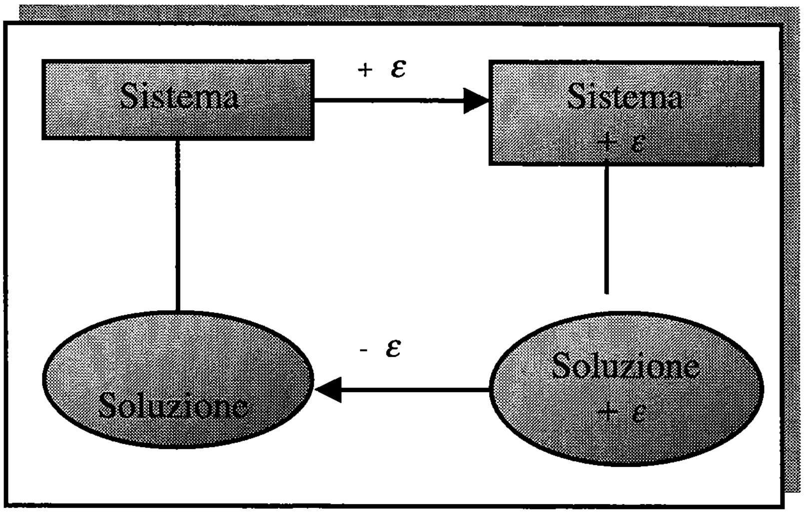

Fig. 3 Grafico del metodo sintetico -

Credo che questa stessa fiducia nel metodo sintetico, sia l'unica ragione che successivamente spinse Sadi Carnot a costruire fondamentalmente due cicli: il primo un ciclo consistente, oltre che di due isoterme (che ci sono in tutti i cicli da lui) suggeriti nelle *Réflexions*), anche da due isocore; il secondo con due adiabatiche. Si noti che i due casi rappresentano rispettivamente *L=0* ed $\neg\neg L = 0$; proprio i due casi notevoli del suo rendimento con *Q* fissato. E in effetti anche con le isocore egli ragiona correttamente in termini moderni perché usa gli infinitesimi che gli eliminano la irreversibilità dell'isocora. (Però quando passa dalle isocore infinitesime a quelle finite, e quindi usa il metodo sintetico su variabili infinitesime, sbaglia, poiché pretende che per il metodo sintetico egli possa estendere la reversibilità alle trasformazioni isocore finite, cosa errata, come sappiamo modernamente). Ma Sadi Carnot non poteva percepirlo, perché egli definiva la reversibilità solo in termini di $\Delta V > 0$ per $\Delta t > 0$. Solo alla fine di questa serie di cicli Carnot introdusse il ciclo con le due isoterme e le due adiabatiche alternate. E in questo caso non sbaglia passando alle trasformazioni finite perché quando *dQ=0,* la trasformazione adiabatica finita, sappiamo modernamente, non distrugge la reversibilità della trasformazione infinitesima. Quindi grazie solo alla applicazione del metodo sintetico egli pensò che i lavori infinitesimi, dL ed dL^{1}, delle due adiabatiche non forniscono contributo, cioè $dL = -dL^{1}$. Quindi dall'applicazione del metodo sintetico Carnot ottenne:

✓ *Il ciclo non deve essere costituito non da tre trasformazioni (come basterebbero per costruire un ciclo) ma da quattro trasformazioni*

✓ *Delle quattro trasformazioni, due debbono essere necessariamente isoterme*

✓ *Le restanti due trasformazioni, se infinitesime, danno contributi che si compensano tra loro, quindi è lecito trascurarle.*

Con ciò ho dato spiegazione anche della chiusura del ciclo che ha tanto lasciato perplesso Klein (Klein) il quale non si spiegava perché Carnot avesse chiuso il ciclo in quel modo dato che la chiusura stessa del ciclo non dà nessun ruolo speciale allo stato iniziale, e ho anche spiegato perché il risultato finale di Carnot è "fortunoso" poiché, in termodinamica moderna, effettivamente i lavori sulle due adiabatiche si compensano tra loro.

In conclusione ritengo che questa nuova interpretazione della nota delle *Réflexions* mediante il metodo sintetico sia la sola spiegazione che chiarisca, finalmente, un aspetto oscuro e cruciale della teoria termodinamica di Carnot. Aspetto, di cui è stata sottovalutata l'importanza perchè è stata ignorata la possibilità che Carnot abbia potuto applicare il metodo sintetico, (e invece questo fatto) sarebbe stato chiaro se si fosse tenuto conto del rapporto culturale che Sadi Carnot aveva con la matematica del padre. Ma si noti che anche modernamente, il risultato di S. Carnot sulle due adiabatiche potrebbe essere ottenuto con il metodo sintetico, cioè trascurando le due adiabatiche in quanto considerate aggiunte di quel metodo. Pertanto anche solo in termodinamica il metodo sintetico appare di carattere così generale, da essere indipendente dal tipo di teoria alla quale si applica. Inoltre, recentemente due studiosi, kelly (Kelly) e Patergnani (Patergnani) rispettivamente nel 1964 e 1981 sono giunti al risultato di Carnot senza fare uso di calcolo integrale

4. Le interpretazioni della nota matematica nelle Réflexions

In questa sezione riporto le interpretazioni della nota matematica delle *Réflexions* da parte dei maggiori studiosi di Sadi Carnot, al fine di far notare al lettore la differenza tra la mia interpretazione e i loro contributi interpretativi. Tra essi ho scelto (per brevità di esposizione) di riportare interamente il procedimento adottato da Lervig riassumendo invece gli altri. Lervig (Lervig 1972) afferma che per rendere più comprensibile la nota di Sadi Carnot è necessario generalizzarla, considerandola nell'ambito di una relazione di Maxwell sulle variabili di stato. Userò una notazione moderna rispetto a quella utilizzata da Lervig. Inoltre indicherò in maniera opportuna là dove Lervig riporta una sua personale interpretazione della nota di Carnot.

"In un'espansione isoterma da v_1 a v_2, il lavoro risultante è $L(t) = \int_{v_1}^{v_2} p(v,t)dv$. In un [altro] processo [in cui si opera tra la differenza] di [due] trasformazioni isoterme [una alla temperatura] $t+dt$ e [l'altra alla temperatura] t, il lavoro [risultante] è

$$\delta L = L(t+dt) - L(t) = dt \cdot \frac{d}{dt} \int_{v_1}^{v_2} p(v,t)dv = dt \int_{v_1}^{v_2} \frac{\partial p(v,t)}{\partial t} dv.$$

Il calore [calorico] fornito al gas, durante la sua espansione isoterma da v_1 a v_2, è

$$\Delta\sigma = \sigma(v_2,t) - \sigma(v_1,t). \qquad (1)$$

Allora questo è [nella teoria del calorico] anche il calore trasferito in un processo [in cui si opera tra due trasformazioni isoterme] alle temperature [rispettivamente] $t+dt$ e t.

In un ciclo: $0 = A = \int \vartheta d\sigma - L$. [Si noti che a p. 231 del medesimo articolo egli ha definito $\eta = L_{max} / Q = \vartheta(t) = f(t,t_0)$, già trattata nel paragrafo 2.5. A questo punto Lervig segue un procedimento diverso da quello della nota di Sadi]. Dalla (1) si ha

$$\Delta\sigma d\vartheta = \delta L$$
$$[= dt \int_{v_1}^{v_2} \frac{\partial p(v,t)}{\partial t} dv]. \qquad (2)$$

da cui segue

$$\Delta\sigma = \sigma(v_2,t) - \sigma(v_1,t) = \frac{dt}{d\vartheta} \int_{v_1}^{v_2} \frac{\partial p(v,t)}{\partial t} dv. \qquad (3)$$

[Ora Lervig ritorna a seguire il procedimento di Sadi Carnot; occorre notare che da qui il procedimento adottato da Lervig (tranne per le successive relazioni di Maxwell) viene ripreso da Dias, Cassiano & Pinto nel 1995 (Dias, Cassiano &

Pinto)]. Dall'equazione dei gas $p = N\dfrac{t+267}{v}$, in cui N è la costante dei gas, Carnot trovò, con lo stesso procedimento di cui sopra [la seguente espressione]

$$Q\eta^{\prime}(t)dt = N\log v dt \qquad (4)$$

che è l'equazione corrispondente alla (3). [Si noti che l'equazione dei gas dà:

$$\frac{dt}{d\vartheta}\int\frac{\partial p(v,t)}{\partial t}dv = \frac{dt}{d\vartheta}\int_{v_1}^{v_2}\frac{N}{v}dv = \frac{dt}{d\vartheta}N\log\frac{v_2}{v_1}.$$

Ora dividendo l'equazione (4) per $\eta^{\prime}(t)dt$ e poi ponendo $\dfrac{N}{\eta^{\prime}(t)dt} = \tau$ si ha

$$Q = \tau\log v\, dt \qquad (5)$$

nella quale Carnot utilizzò *e* per $\Delta\sigma$ [Q] e *F(t)* per ϑ [$\eta(t)$].

[Il seguito non è presente nella nota di Sadi Carnot] Se poi facciamo $v_2 \to v_1$ nell'equazione (1), si ottiene un'equazione più nota:

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)_{\vartheta} = \frac{dt}{d\vartheta}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{v}$$

o semplicemente

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)_{\vartheta} = \left(\frac{\partial p}{\partial\vartheta}\right)_{v}.$$

(6)

La corrispondente equazione in termodinamica [moderna] è naturalmente $(\partial S/\partial v)_T = (\partial p/\partial T)_v$. In quest'ultima forma, l'equazione (3) è una delle relazioni di Maxwell [salvo la sostituzione del calorico σ all'entropia, e della temperatura assoluta nella teoria di Carnot alla temperatura assoluta *T* di Kelvin]. La (6) di solito si ottiene definendo i potenziali [ora nelle variabili del calorico] $\Psi = A - \vartheta\sigma$, $d\Psi = -\sigma d\vartheta - pdv$ e poi derivando da essi la condizione di integrabilità. Comunque dev'essere enfatizzato che né Carnot né Clapéyron, che (in principio) usò la stessa equazione (3) in una forma più generale, videro che essa era la condizione per il differenziale totale di Ψ.

[Poi Lervig affronta la parte della nota riguardante il calcolo del calore specifico di un gas a volume costante; qui egli intende ritrovare il risultato di Carnot attraverso la sua temperatura ϑ e il potenziale alla Maxwell].

I lettori di Carnot sono rimasti imbarazzati per la strana espressione con cui egli indicò il calore specifico: con il logaritmo di un volume. Lo si è [giustamente] interpretato col fatto che le informazioni [sulla teoria dei gas di allora] a disposizione di Carnot erano piuttosto incerte. Ma il retroterra di questa espressione non è stato adeguatamente studiato.

Il risultato di questa mia indagine è che le espressioni di Carnot, quella logaritmica del calore [(5)] e quella logaritmica del calore specifico [nel seguito indicata con (11)], sono importanti in quanto esprimono *la prima diretta applicazione ad un sistema fisico di una affermazione [che è] equivalente ad una relazione di Maxwell.* Poiché il risultato è valido anche in termodinamica moderna, sarebbe esagerato affermare che quelle due espressioni logaritmiche non sono corrette. In effetti, [sappiamo che] in termodinamica l'esperienza di Joule comporta che il coefficiente del $\log v$ è zero; e Carnot poteva ignorare ciò; egli però sapeva che, se il calore specifico è una funzione solo della temperatura, allora equivalentemente la potenza motrice [sviluppata] dalla caduta di una unità di calore, per ogni grado di caduta, è [una quantità] costante. Se anche Sadi Carnot non avesse saputo che il coefficiente del logaritmo di v era zero, egli, tuttavia, comprese sufficientemente bene la sua teoria, al punto che si rese conto di che cosa sarebbe successo se fosse stato zero.

Che le [due citate] espressioni logaritmiche di Carnot sono certamente equivalenti alla relazione di Maxwell (6), può essere visto nel seguente modo.

Per Carnot, un gas [ideale] era caratterizzato da *una [sola] condizione:*

$$Pv=N(t+267) \qquad (7)$$

[Invece] oggigiorno, un gas ideale è caratterizzato da *due condizioni*, di cui una è la (7), l'altra, nota [dai risultati] dell'esperienza di Joule, riguarda il fatto che l'energia è una funzione solo della temperatura e che quindi *la temperatura di un gas [ideale] equivale alla temperatura assoluta* (Fermi, equazione (88), p. 62).

Lo studio di un gas descritto dalla sola condizione (7) è, leggermente, più complicato dello studio di un gas ideale così come facciamo oggi. Applicando la forma integrale della relazione di Maxwell (3) alla equazione (7) si ha:

$$[\ \Delta\sigma = \frac{dt}{d\vartheta}\int \frac{N}{v}dv = \frac{dt}{d\vartheta}N\log v\Big|_1^v = \frac{dt}{d\vartheta}N\log v$$

da cui

$$\sigma(v,t) = \frac{dt}{d\vartheta}N\log v + A(t).$$

Ponendo

$$B(t) = N\frac{dt}{d\vartheta}; \qquad (8)$$

e risultando

$$A(t) = \sigma(1,t) \qquad (9)$$

otteniamo

$$\sigma(v,t) = A(t) + B(t)\log v \qquad (10)$$

L'equazione precedente (10) dà

$$c_v = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_v = A^{\prime}(t) + B^{\prime}(t)\log v\,. \qquad (11)$$

Essa mostra che le *curiose espressioni logaritmiche per il calore* [e] *e per il calore specifico* [11] *sono semplicemente la conseguenza del* [fatto che, per Sadi Carnot, un gas era caratterizzato dalla sola] *condizione* (7). (Naturalmente la stessa cosa accadrebbe in termodinamica moderna).

[A questo punto della nota] Sadi Carnot avanzò l'ipotesi della indipendenza di c_v dalla temperatura e mostrò che allora era in grado di calcolare [la funzione] $\vartheta(t)$ (che egli chiama $F(t)$). Affinchè, per due distinti valori di v, la (11) sia vera per $c_v = cost$ è necessario che

$$A^{\prime} = C_0 \qquad B^{\prime} = C,$$

siano indipendenti dalla temperatura, in particolare, che $B = Ct + C_1$.
Allora integrando le (8) e (9), si ha

$$\vartheta(t) = \frac{N}{C}\log(Ct + C_1) + C_2\,.$$

Quest'ultima espressione è valida per $C \neq 0$. Ma già allora si sapeva [così come afferma anche Sadi Carnot (p. 78, n. 1, r. 16)] che, nell'equazione del calore specifico, il coefficiente $B^{\prime}$ del $\log v$ è una quantità molto piccola.
Considerandolo nullo, [come fa anche Carnot, avremmo] $C = 0$ e $B = C_1$ [quindi]

$$\vartheta(t) = \frac{N}{C_1}t + C_2\,.$$

[Ciò significa che] la temperatura di un gas [ideale] è allora proporzionale alla temperatura assoluta. Questa [conclusione] è molto da vicina a quella che oggi riconosciamo essere la soluzione corretta [del problema posto da Sadi Carnot nella nota matematica delle *Réflexions*]".

Dunque Lervig esegue i calcoli della nota (senza argomentare sul ruolo del ciclo e della "soppressione" delle due adiabatiche) con queste due funzioni (ϑ e A) nel tentativo di imitare la termodinamica moderna, data come inevitabile punto di arrivo. Infatti egli trova, come verifica, una "simil-equazione" di una delle relazioni termodinamiche di Maxwell; egli la applica al calcolo di c_V nella parte finale della nota giungendo allo stesso risultato ottenuto da Sadi Carnot. Ma questo fatto non sembra rivelare aspetti reconditi dei pensieri di Carnot, il quale già lavorava con tutte funzioni di stato.

Occorre però dire che già Reech (Reech, Pisano pp. 37-50) aveva ottenuto, mediante i calcoli dei cicli, la funzione energia interna (e quindi potenzialmente le relazioni di Maxwell). Quindi Lervig, che usa un metodo di analisi sicuramente più astratto di quello di Reech, appare comunque seguirne di quest'ultimo (anche se egli mai lo dice) tutta la prima parte di lavoro.

Truesdell e Bharatha nel 1977 (Truesdell e Bharatha) si soffermano sulla distinzione tra assioma generale e speciale nella teoria di Carnot. Relativamente alla nota matematica essi argomentano sulla non linearità in Q della funzione rendimento:

$$L = G(\theta^+, \theta^-, Q) \stackrel{?}{=} L = G(\theta^+, \theta^-)Q \,;$$

ma nulla emerge dalla loro trattazione che si siano occupati, nella nota matematica di Carnot, del ruolo delle due adiabatiche nel ciclo reversibile fornendo una spiegazione del loro inutilizzo da parte di Sadi Carnot.

Sullo stesso argomento lavorò Montbrial nel 1976 (Montbrial) e più tardi Cropper nel 1987 (Cropper) i quali anch'essi non trattarono la ricerca della soluzione della funzione rendimento a partire dal ciclo così come invece fece Sadi Carnot nelle *Réflexions*.

Ringraziamento

Ringrazio il prof. A. Drago per il sostegno datomi nello sviluppare la soluzione del problema di questo scritto.

Appendice

Il calcolo del ciclo di Carnot in termodinamica moderna

In questo parte intendo calcolare il rendimento del ciclo di Carnot in termodinamica moderna. Il primo principio stabilisce che:

$$\oint dU = \oint dQ + \oint pdV \,.$$

Consideriamo un sistema fisico Γ e supponiamo che esso sia isolato adiabaticamente, cioè $\oint dQ = 0$. Il lavoro adiabatico compiuto sul sistema (scelto positivo) nel portarlo dallo stato *1* allo stato *2* è, per il primo principio:

$L = \int_1^2 dU = U_2 - U_1$. Ora calcoliamo, per un gas perfetto, ($\Delta U = c_V \Delta t$ e *PV=nRT*) i contributi del lavoro sulle isoterme e sulle adiabatiche in un ciclo reversibile di Carnot (Fig. 2):

Espansione isoterma A →B alla temperatura T_2. Dal primo principio si ha che $\int dU$ *=0*, quindi *-Q* = L:

$$-Q_2 = L_{AB} = \int_A^B pdV = nRT_2 \int_A^B \frac{dV}{V} = nRT_2 \log \frac{V_B}{V_A},$$

con *Q <0* perché assorbito ed *L >0* perché $\Delta V > 0$.

Espansione adiabatica B →C tra le temperature T_2 e T_1. Dal primo principio si ha che $\int dQ$ *=0*, quindi $\Delta U = L$:

$$\Delta U = L_{BC} = nC_V (T_2 - T_1),$$

con *L >0* perché $\Delta V > 0$.

Compressione isoterma C →D alla temperatura T_1. Dal primo principio si ha che $\int dU$ *=0*, quindi $Q = -L$:

$$Q_1 = -L_{CD} = -\int_C^D pdV = -nRT_1 \int_C^D \frac{dV}{V} = -nRT_1 \log \frac{V_D}{V_C},$$

con *L <0* perché $\Delta V < 0$.

Compressione adiabatica D →A tra le temperature T_1 e T_2. Dal primo principio si ha che $\int dQ$ *=0*, quindi $\Delta U = -L$:

$$\Delta U = -L_{DA} = -nC_V (T_2 - T_1),$$

con *L <0* perché $\Delta V < 0$.

Infine si passa al calcolo del lavoro sull'intero ciclo. In altre parole occorre calcolare l'area (fig. 3.4) racchiusa dalle quattro curve termodinamiche.

Per l'intero ciclo si noti che $L_{BC} + L_{DA} = 0$; *cioè il contributo del lavoro sulle due adiabatiche è zero. Dunque Carnot fece bene a non considerarlo, anche se fu guidato da considerazioni di metodo (sintetico) invece che fisico. D'altronde in termodinamica moderna noi sappiamo che le adiabatiche dipendono dalla natura del gas, mediante il coefficiente* γ *; quindi il rendimento* *del ciclo può essere indipendente dalla natura del gas adoperato solo se le adiabatiche non danno contributo al lavoro.*

Applicando il primo principio all'intero ciclo si ha:

$$\oint dU = 0$$

$$Q_{ciclo} = Q_2 + Q_1 = L_{AB} + L_{CD} = L_{ciclo}$$

$$L_{ciclo} = nR(T_2 - T_1)\log\frac{V_B}{V_A} + nR(T_2 - T_1)\log\frac{V_C}{V_D}$$

che è l'area cercata.

Consideriamo ora il rapporto tra il calore Q_1 ottenuto dell'espansione isoterma e il calore Q_2, ottenuta dalla compressione isoterma:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}\frac{\log\frac{V_D}{V_C}}{\log\frac{V_B}{V_A}}. \qquad (12)$$

È interessante mostrare che in termodinamica moderna questo rapporto è indipendente dai "rapporti di compressione" V_D / V_C e V_B / V_A. Infatti, applicando l'equazione della adiabatica alle trasformazioni reversibili *AD* e *BC*, si ha

$$V_B T_2^{\frac{1}{\gamma-1}} = V_C T_1^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$V_A T_2^{\frac{1}{\gamma-1}} = V_D T_1^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

e dividendo membro a membro si ottiene l'uguaglianza $V_B / V_A = V_C / V_D$ che sostituita nella (12) dà

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

In definitiva il rendimento reversibile di una macchina termica in un ciclo di Carnot si scrive

$$\eta_{rev} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}.$$

Bibliografia

- **Carnot L.:** *Essai sur les machinés en géneral*, Defay (ed.), Dijon, 1782, trad. ital: *Saggio sulle macchine*, Cuen, Napoli, 1994
- **Carnot L.:** *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement*, Deterville, Paris, 1803
- **Carnot S.:** *Réflexions sur la puissance motrice du feu sur les machinés propre à dèvelopper cette puissance,* édition critique par Fox Robert, Vrin J., Paris, 1978; trad. ingl.: *Reflections on the Motive Power of Fire*, for R. Fox, Manchester University, 1986; traduzioni italiane: *La potenza motrice del fuoco – L'opera di Sadi Carnot fondatore della termodinamica versione italiana e guida didattica,* a cura di Jannamorelli B., Enea, Roma, 1988; *Riflessioni sulla potenza motrice del fuoco*, Bollati Boringhieri, Torino, 1992, pp. 40-43; pp. 106-108; *Riflessioni sulla potenza motrice del fuoco*, a cura di Jannamorelli B., CUEN, Napoli, 1996
- **Carnot S.:** *Recherche d'une formule propre à représenter la puissance motrice de la Vapeur d'Eau,* in Carnot S. 1978, op. cit., pp. 223-234
- **Clausius R.:** "Ueber die bewegende Kraft der Waerme und die Gesetze, welche sich daraus fuer die Waermelhere selbst ableiten lassen", in Annalen. Phy. Chem., vol. 155, 1850, pp. 368-397; pp. 500-524, traduzione inglese in Mendoza E., op. cit., pp. 73-74; pp. 109-152
- **Cropper H. W.:** "Carnot's Function: Origins of the Thermodynamic Concept of Temperature" in Am. J. Phy., vol. 55, 1987, pp. 120-122
- **Dias P.M.C., Pinto S.P. & Cassiano D.H.:** "The Conceptual Import of Carnot's Theorem to Discovery of The Entropy", in Arch. Hist. Ex. Sc., vol. 49, n° 2, 1995, pp. 142-157
- **Drago A. e Vitiello O.:** "Nuovi risultati su Sadi Carnot e le leggi dei gas", in Calascibetta F. (ed.): *Atti del II Congresso Nazionale di Storia e Fondamenti della Chimica,* Acc. Naz. Sci. XL, V, 12, pp. 391-402, 1991
- **Drago A.:** *Le due opzioni*, La Meridiana, Molfetta (BA), 1991
- **Drago A.:** "The choice of the kind of mathematics in historiography: the case-study of S. Carnot", in Studia Physica Savariensia I, *History of science in teaching physics*, L. Kovàks, (ed.), 1995, pp. 102-111
- **Drago A. e Oliva R.:** "Atomism and non-classical reasoning", in Hyle, **5** (1999) 43-55
- **Dummett M.:** *Principles of Intuitionism,* Clarendon Press, Oxford, 1975
- **Fermi E.:** *Thermodynamics*, Dover (ed.), New York, 1937, pp. 31-62
- **Fox R.:** *The Caloric Theory of Gases from Lavoisier to Regnault*, Clarendon Press, Oxford, 1971, pp. 188-189

- **Gillispie C.C.:** *Lazare Carnot Savant*, Princeton U.P., Princeton, 1971, pp. 90-100
- **Kelly E. M.:** "Simple Treatment of Thermodynamic Efficiency", in Am. J. Phy., vol. 32, 1964, p. 643
- **Lervig P.:** "On the Structure of Carnot's Theory of Heat", in Arch. Hist. Ex. Sc., vol. 9, 1972, pp. 222-239
- **Lervig P.:** "The existence of work function in Carnot's theory", in Taton A. (ed.), op. cit., pp. 199-212
- **Mendoza E.:** *Reflections on the Motive Power of Heat Engines,* Dover (ed.), New York, 1960,
- **Montbrial A. L.:** "Interprétation économiques sugérees par le théoréme de Carnot", in Taton A. (ed.), op. cit., pp. 333-335
- **Ostwald W.:** *Klassiker der exacten Wissenschaften*, Englemann, Lipsia, 1892, N° 37
- **Patergnani G.:** "Valutazione del rendimento del ciclo di Carnot reversibile col gas rarefatto senza fare uso di calcolo integrale", Giornale di Fisica, vol. 22, 1981, pp. 75-77
- **Pisano R.:** *La termodinamica di Sadi Carnot: una nuova interpretazione basata su Logica e Matematica*, Tesi di laurea in Fisica, Università Federico II°, Napoli, a.a. 1998-99
- **Prawitz D. e Melmnaas P.-E.:** "A survey of some connections between classical intuitionistic and minimal logic" in Schmidt A. e Schuette H. (eds.): *Contributions to Mathematical Logic,* North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 215-229
- **Redondi P.:** *L'Accueil des Idées de Sadi Carnot et la Techonologie Francaise de 1820 à 1860,* Vrin J., Paris, 1980, p. 68
- **Reech F.:** "Théorie géneral des effets dynamiques de la Chaleur" in Journal des Mathématiques pures et appliquées, Tome XVIII, 1853, pp. 357-378
- **Taton A. (ed.):** *S. Carnot et l'éssor de la thérmodynamique,* CNRS, Paris, 1976
- **Truesdell C. e Bharatha S.:** *The Concepts and Logic of Classical Thermodynamics as a Theory of Heat Engines*, Springer- Berlin, 1977, pp. 57-65
- **Vidal C. Martìnez et al.:** "An ideal of the intuitionistic kind representing the organization of a physical or mathematical theory" in *Logìca, representacion y mundo,* (eds.): *Verdad,* Univ. Santiago de Compostela, 1996, 467-480