La relatività ristretta nell'opera di Hermann Weyl del 1918

Francesco Scarpa

1. Introduzione

Nell'arco del secolo XX, dopo la formulazione di Einstein del 1905 della relatività ristretta sono state proposte tutta una serie di riformulazioni che tentavano di ricavare la stessa teoria mediante degli assunti diversi da quelli usati da Einstein e mediante delle strutture teoriche e matematiche di volta in volta differenti; esse sono andate a modificare un po' tutti gli assunti di base di Einstein e hanno proposto semplificazioni e innovazioni, talvolta anche consistenti, dello schema logico-organizzativo fornito da Einstein, allontanandosi anche di molto dalla formulazione originale. Il panorama di tutte queste riformulazioni è molto ampio.

In questo panorama prenderemo in esame il contributo presentato da Weyl nella sua opera: **Spazio, tempo e materia,** del 1918 (1).

Hermann Weyl è certamente uno dei più grandi matematici e fisici del nostro secolo: accostabile al suo maestro Hilbert, a Poincaré e allo stesso Einstein, sia per l'ampiezza dei suoi contributi, che vanno dalla matematica, alla fisica matematica e alla filosofia, sia per la grande importanza che i problemi dei fondamenti della scienza ebbero nella sua produzione. In effetti egli ha sempre cercato di rifondare sia la Matematica che la Fisica; quest'ultima sulla base delle due nuove teorie (relatività e meccanica quantistica), pochi anni dopo che esse nacquero. Questi obiettivi gli furono possibili per la sua singolare capacità di porre in relazione campi di ricerca e materie di studio precedentemente sconnessi e lontani.

Storicamente gli studi di Weyl sulla relatività ristretta sono molto importanti perché si collocano all'interno del suo programma di rifondazione di tutta la Fisica Teorica e della Matematica. Egli voleva fondare un nuovo rapporto Fisica-Matematica, che fa della teoria dei gruppi l'elemento essenziale. Vedremo come la sua riformulazione aggiunge maggiore profondità nell'uso fondazionale delle tecniche matematiche, essendo stato Weyl il primo ad usare, come detto, la teoria dei gruppi come fondativa della teoria della relatività (e poi della meccanica quantistica nel 1928 con l'opera Teoria dei gruppi e meccanica quantistica (2), dove in più egli ha fatto avanzare la stessa teoria dei gruppi), ed avendo anche ristretto la sua matematica il più possibile alla matematica finitista (mediante un formalismo soprattutto algebrico, senza limiti o equazioni differenziali).

Purtroppo nel suo tempo questo suo ambizioso programma è stato trascurato in quanto l'avanzamento della fisica teorica ha parzialmente smentito i suoi obiettivi (riformulazione anche della relatività generale e della meccanica quantistica); eppure molte sue idee innovative (fondazione sui gruppi, invarianza di gauge, simmetrie, spinori) sono state poi ritrovate dagli sviluppi successivi delle teorie fisiche.

2. Introduzione all'opera "Spazio, Tempo e Materia" del 1918

Il libro *Spazio, Tempo e Materia* di H. Weyl è la prima opera dove la teoria della relatività è stata esposta sistematicamente e rigorosamente. La prima edizione, apparsa nel 1918, era la redazione di un corso tenuto dall'autore alla scuola politecnica federale di Zurigo nel 1917.

Essa fu immediatamente seguita da una nuova edizione, pressoché identica. Ma nel frattempo i progressi della teoria einsteniana furono così numerosi e così importanti che una terza edizione, completamente ristrutturata uscì nell'autunno del 1919. In essa Weyl si ispirò sia ai lavori di Levi-Civita sul concetto di spostamento parallelo sia ai propri lavori sulla metrica generalizzata, per esporre una teoria nuova dell'elettromagnetismo. Allora il potenziale elettromagnetico, che in tutte le teorie precedenti veniva ad essere un elemento di base irriducibile per le teorie stesse, divenne nella nuova teoria di Weyl (così come il potenziale gravitazionale) un "riflesso" delle proprietà metriche dello spazio-tempo (28, pag. 92-93).

Egli ottenne così una teoria unitaria dei fenomeni elettromagnetici e della gravitazione. "E' il primo tentativo di una teoria di campo unificato" (Rosenfeld, 3, pag. 317). In questo primo tentativo di una teoria del campo unificato Weyl dimostra che sia la gravitazione che l'elettricità possono essere interpretati mediante la forma matematica di una comune metrica dello spazio. Anche se la sua teoria unificata non si dimostrò valida fisicamente, la sua opera ebbe il merito di allargare il quadro geometrico di riferimento, andando oltre la geometria riemanniana tradizionale, e preparando le basi alla geometria generalizzata di Cartan. E' universalmente accettato (Bergia, 4, pag. 185) che la teoria unificata del campo gravitazionale e del campo elettromagnetico di Weyl ha aperto la strada alle teorie di gauge. Tuttavia dopo una critica di Einstein del 1918 (Bergia, 4, pag. 186), la formulazione originale di questa teoria è stata generalmente considerata inaccettabile. (E' sorprendente che Weyl non provò a difendere con decisione questa teoria; egli propose delle idee per riformularla, ma non tentò mai di svilupparle effettivamente).

Mi soffermo su questa teoria del campo unificato per dare il quadro teorico e storico del suo lavoro sulla relatività. E' importante notare quali idee siano alla base del tentativo di unificazione di Weyl. L'idea principale (Bergia, 4, pag. 186) è quella di interpretare il potenziale vettore del campo elettromagnetico ϕ_{μ} come una grandezza legata ad un fattore conforme (o fattore di scala) della metrica dello spazio-tempo. Più precisamente egli definisce una geometria in cui uno spostamento parallelo di un vettore, tra due punti dello spazio-tempo, non conserva la sua lunghezza (la sua lunghezza finale dipende quindi dalla linea di mondo seguita; nella relatività generale di Einstein, in uno spostamento parallelo di un vettore, è solo la sua direzione che non si conserva, ma la sua lunghezza sì); nel punto finale dello spostamento, la lunghezza del vettore è determinata da una nuova metrica, definita a meno di un cambiamento di scala (cioè, a meno di una trasformazione conforme $g_{\mu\nu} \to \lambda g_{\mu\nu}$; dove λ, il fattore di scala, è una funzione positiva definita su tutti i punti dello spazio-tempo). Un tale cambiamento di scala è allora definito attraverso il potenziale vettoriale covariante ϕ_{μ} del campo elettromagnetico; per cui la connessione metrica interna dello spazio dipende anche dalla forma lineare $\sum_{p} \phi_{p} dx^{p}$ (Rosenfeld, 3, pag. 317).

Questo tentativo di una nuova metrica era suggerito dal fatto che le leggi dell'elettromagnetismo godono dell'invarianza conforme (Cunningham, 29, pag. 77-98), che è più generale dell'invarianza rispetto al gruppo di Poincaré (in effetti il gruppo conforme è un gruppo di trasformazioni a 15 parametri mentre quello di Poincaré è a 10 parametri).

Dunque, come fa notare anche Whittaker (5, pag.189), la geometria usata da Weyl è più generale della geometria di Riemann utilizzata da Einstein nella relatività generale: infatti la geometria di Riemann è specificata mediante la sola forma differenziale quadratica $\sum_{p,q} g_{pq} dx^{p} dx^{q}$ (dove g_{pq} è il tensore metrico, funzione dei punti dello spazio-tempo); mentre la geometria usata da Weyl (nella sua teoria di campo unificato) è specificata dalla forma quadratica $\sum_{p,q} g_{pq} dx^{p} dx^{q}$, con g_{pq} variabile per spostamenti a causa di un fattore di scala "non-integrabile" (Bergia, 4, pag. 186) che dipende dalla forma lineare $\sum_{p} \phi_{p} dx^{p}$ (i coefficienti g_{pq} della forma quadratica sono interpretati, come nella teoria della relatività generale di Einstein, come i potenziali gravitazionali; mentre i quattro coefficienti ϕ_{p}, sono interpretati (come già detto) come le quattro componenti del potenziale vettore del campo elettromagnetico).

E' importante infine notare che Weyl, facendo uso della geometria differenziale, tratta la teoria del campo elettromagnetico in una forma matematica totalmente nuova per l'epoca, compatta ed elegante. Infatti, i potenziali ϕ_{i} vengono interpretati (Weyl, 6, pag. 399) come i coefficienti di una forma differenziale invariante $\phi = \sum \phi_{i} dx_{i}$ di rango uno; mentre il differenziale $F = d\phi = \sum \left(\frac{\partial \phi_{k}}{\partial x_{i}} - \frac{\partial \phi_{i}}{\partial x_{k}} \right) dx_{i} dx_{k}$, di rango due, dà le componenti del campo elettromagnetico $F_{ik} = \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} \right)$. Poiché F è esso stesso un differenziale, la forma dF di rango tre si deve annullare; cioè, in termini di componenti:

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0.$$

Ma questa espressione rappresenta proprio il sistema delle due delle equazioni di Maxwell

$$rot\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \qquad div\mathbf{B} = 0,$$

scritte da Weyl in forma covariante, mediante le componenti del tensore campo elettromagnetico F_{ik}.

2.1 Dalle sensazioni allo spazio affine

Nella sua "Introduzione" all'opera del 1918, Weyl affronta all'inizio alcune considerazioni filosofiche sul concetto di spazio, di tempo e di materia, dandone sinteticamente il loro significato fisico e filosofico nel corso della storia. Egli ci tiene a sviluppare inizialmente una serie di considerazioni intuitive sui concetti di spazio, di tempo e di spostamento, in modo da "fondare" il successivo formalismo matematico sulla esperienza diretta (in realtà soggettiva). In un secondo momento, egli "traduce" questi concetti in termini formali, al fine di definire una chiara struttura matematica su cui sviluppare successivamente dei contenuti più propriamente fisici. Allora la struttura matematica della teoria, proprio perché nasce da considerazioni sulla natura intuitiva del nostro spazio-tempo, non è vista da Weyl solo come un insieme di tecniche matematiche da applicare per la risoluzione di problemi fisici, ma esprime anche la struttura delle stesse leggi fisiche (cioè, per esempio, i gruppi di trasformazione non sono enti matematici astratti da sfruttare per eseguire calcoli, ma sono espressione di reali operazioni che il fisico fa e che finora non erano state considerate con la dovuta attenzione, perché hanno un carattere globale sull'intero spazio; così anche la sua scelta di trattare alcune delle grandezze fisiche come tensori e non come vettori, a causa del loro modo di trasformarsi sotto cambiamenti di riferimento, è una scelta che dipende dalla natura fisica delle grandezze in questione; quindi il tipo di formalismo matematico può e deve, secondo Weyl, rispecchiare dei contenuti fisici).

Secondo Weyl (1, pag. 1) lo spazio e il tempo sono stati visti storicamente come le "forme" dell'esistenza del mondo "reale", la materia come la "sua sostanza": una certa porzione di materia occupa una parte di spazio in un certo tempo. L'idea "composta" di moto lega questi tre concetti fondamentali in una precisa relazione.

Secondo Weyl (che su questo punto segue il matematico intuizionista Brouwer) il tempo (1, pag. 3) è la forma dello "scorrere della coscienza"; da questo scorrere deriva la sua struttura fondamentale, che è continua e omogenea.

Fissato un istante nel tempo, si può definire un "prima" e un "dopo", così come si stabilisce una relazione d'ordine tra i punti di una retta, relativamente ad un punto di riferimento su di essa. Da ciò, mediante l'idea di "connessione causale" dei fenomeni fisici (1, pag. 6), possiamo stabilire che tra due eventi connessi causalmente vi è un intervallo di tempo di separazione.

Lo scorrere continuo dell'esperienza, e quindi del tempo, può esprimersi attraverso l'idea di "ripetizione" di un numero finito di intervalli "uguali" di tempo. Perciò il tempo è riducibile ad una serie di intervalli temporali. Si definisce "orologio", un sistema fisico "isolato", che ha la capacità di ritornare "ciclicamente" sempre allo stesso stato iniziale attraverso la stessa successione di stati intermedi, in modo tale che ciascun periodo del ciclo rimane "ugualmente lungo"; esso permette di "misurare" intervalli uguali di tempo.

Così come il tempo è la "forma" dello scorrere della coscienza, secondo Weyl (1, pag. 5) lo spazio è la "forma" della realtà materiale esterna; essa deriva dalla percezione della "estensione spaziale" degli oggetti materiali.

Così come fissiamo un momento presente ("ora") come un punto geometrico nel tempo, possiamo fissare un esatto "qui", un punto nello spazio, come il primo elemento di una estensione continua spaziale; che, come il tempo, è infinitamente divisibile. Ma lo spazio non è un "continuo" unidimensionale come il tempo, cioè non può essere definito attraverso la semplice relazione d'ordine di un "prima" e un "dopo"; abbiamo bisogno di definire dei nuovi concetti.

Uno stesso volume di "cose" può occupare due porzioni di spazio. Se una porzione di spazio S è occupata da un determinato volume, e successivamente un'altra porzione di spazio S' è occupata nella "stessa maniera" dallo stesso volume, diremo che S ed S' sono congruenti.

Allora, ad ogni punto P di S corrisponderà un definito punto omologo P' di S', che sarà circondato dallo stesso volume che circonda P.

La "trasformazione" del punto P in P' la chiameremo una trasformazione congruente (le trasformazioni congruenti fanno parte delle trasformazioni di similitudine, cioè delle trasformazioni che ad una coppia di punti (A, B) associano una nuova coppia di punti (A', B'), tali che il rapporto dei segmenti, definiti da tali punti, è costante: $\frac{AB}{A'B'} = k$ con $k \in \Re^+$; se tale rapporto di similitudine è uguale ad 1, allora la trasformazione si dice appunto "congruente"). Notiamo che, per poter dare una tale definizione di trasformazione, è essenziale il concetto di "corpo rigido" (un corpo è rigido, se spostato, conserva tutte le posizioni relative tra i suoi punti, valutate prima di tale spostamento), che permette attraverso un suo spostamento di realizzare l'idea di "uguaglianza" delle due porzioni di spazio da esso occupato.

Tra le possibili trasformazioni congruenti Weyl (1, pag. 12) sceglie inizialmente le traslazioni; da tale concetto svilupperà la geometria euclidea seguendo una linea strettamente assiomatica.

Inizialmente viene definito il concetto di linea retta: dati due punti A e B, la linea retta g, individuata da essi, contiene tutti i punti che sono trasformati in loro stessi da quelle trasformazioni congruenti che trasformano il segmento AB in se stesso. Essa costituisce un "continuo lineare" come il "tempo".

Mediante il concetto di uguaglianza tra due segmenti, $AB = A'B'$, di una stessa linea retta, si può definire quello di "traslazione lungo la linea retta": essa trasforma il segmento AB nel segmento congruente $A'B'$ attraverso uno "spostamento rigido" che avviene sulla linea retta. Queste traslazioni costituiscono il "gruppo" (non meglio definito, a questo livello della teoria) delle trasformazioni congruenti che trasformano i punti di una retta g in punti ancora appartenenti a g (diremo che la retta ha una struttura "omogenea"). Se consideriamo delle trasformazioni che hanno la proprietà non solo di lasciare invariata nel suo insieme l'intera linea retta, ma di non cambiare nemmeno la posizione relativa dei suoi punti, rispetto ad un punto di riferimento preso su di essa, stiamo considerando un altro sottogruppo (inteso in senso intuitivo) delle trasformazioni congruenti, che chiamiamo rotazioni.

Fissato un punto su di una retta g, esso la suddivide in due parti equivalenti; se tracciamo una perpendicolare h a g in tale punto A, attraverso una "rotazione" di h intorno a g, si genera un piano E, costituito da tutte le perpendicolari a g nel punto A. Esso è omogeneo.

L'insieme delle rette g' perpendicolari ad E formano un gruppo di rette parallele che occupano l'intero spazio. Se considero un altro piano E^* perpendicolare a g in un altro suo punto A^*, esso "taglierà" perpendicolarmente il gruppo di parallele definito; al variare del punto A^* sulla retta g, otteniamo un gruppo di piani paralleli.

Adesso possiamo ampliare il concetto di traslazione, definendolo sull'intero spazio e non soltanto su di una retta. Le traslazioni, dunque, sono delle trasformazioni congruenti che trasformano non solo una retta g in se stessa, ma permettono di associare tra loro ogni retta dello stesso gruppo di parallele a cui appartiene g. Inoltre esiste un'unica traslazione che trasferisce un punto A di g, in un punto A^* di g.

Le traslazioni possiedono le proprietà di un "gruppo": vi è un'unica traslazione, l'identità, che trasforma un punto A in A, lasciando tutti gli altri punti dello spazio "indisturbati". Se una traslazione trasforma contemporaneamente un punto A in un punto P e in un altro punto P', allora deve risultare che P e P' coincidono identicamente. Inoltre per le traslazioni è verificata la proprietà associativa ed esiste l'elemento inverso (cioè se vi è una traslazione che porta un punto A in un punto P, esisterà un'unica traslazione "inversa" che porta P in A).

Se $\mathbf{a}$ è una traslazione che trasferisce il punto A_o in A_1, essa stessa trasferirà A_1 in A_2, A_2 in A_3 e così via; analogamente si può pensare che il punto A_o sia stato ottenuto attraverso la traslazione $\mathbf{a}$ applicata ad un punto A_{-1}, e a sua volta A_{-1} da A_{-2}, e così via. Così definiamo non una linea retta, ma una serie di punti equidistanti. Adesso, se n è un numero naturale intero, allora esiste una traslazione $\frac{\mathbf{a}}{n}$ che applicata n volte, dà $\mathbf{a}$. Se applichiamo $\frac{\mathbf{a}}{n}$ ad A_o alla stessa maniera di prima, otterremo una serie di punti n volte maggiore; al crescere di n, naturalmente cresce in proporzione la "densità" di questo insieme. Il concetto intuitivo di continuo lineare (Weyl, 1, pag.16) è fondato sulla visione di una "fusione" di tali punti al crescere illimitato della densità dell'insieme a cui facciamo riferimento: alla fine essi perdono la loro "esistenza individuale".

Questa descrizione intuitiva di Weyl del continuo lineare è alquanto criticabile da un punto di vista della matematica costruttiva; vi è di fatto un "salto" nel passaggio tra un insieme numerabile di punti e il "continuo". Tale passaggio da parte di Weyl non è ben giustificato; se non mediante un concetto "ambiguo" di "fusione" di punti. Ma Weyl evidentemente, a questo livello di descrizione intuitiva, non si sofferma più di tanto nel cercare di formalizzare un tale passaggio; così come poi non si preoccupa di giustificare l'introduzione in senso intuitivo degli infinitesimi.

Nell'ottica delle definizioni intuitive precedenti allora, si può dire che una linea retta è derivata da un punto, attraverso una ripetizione infinita della stessa traslazione infinitesima e della sua inversa. Analogamente, applicando infinite volte una stessa traslazione infinitesima a tutti i punti di una retta, si definisce un piano e da esso infine uno spazio omogeneo tridimensionale.

Il concetto di traslazione e quello derivato da esso, di linea retta, permettono allora a Weyl di introdurre i fondamenti della geometria affine in una forma di tipo assiomatico (così come la si studia attualmente); ma come visto, i concetti da cui Weyl parte sono di natura intuitiva.

Chiudiamo notando che Weyl, che pure a livello formale ha sempre lavorato per collegare la matematica alla fisica e viceversa, su temi quasi solamente di fisica-matematica, manterrà sempre una distinzione filosofica tra tempo, visto come essenzialmente "matematico", e quindi basato su di una sensazione interiore, e spazio, visto come essenzialmente "fisico", e quindi solo esterno a noi e per di più complessificato da intere teorie fisiche. Ma l'introduzione da parte di Weyl del concetto di tempo separatamente dall'introduzione successiva dello spazio è criticabile, perché sembra che tutta la differenza tra i due concetti stia solo nel numero delle dimensioni (lo spazio unilineare infatti è considerato come un "tempo"). In realtà, da un punto di vista matematico non ci sono ragioni forti per fare ciò.

3. Schema sintetico della formulazione di Weyl del 1918 della relatività ristretta

Lo schema seguente (schema 1) sintetizza la struttura della formulazione della relatività ristretta, così come è stata esposta da Weyl nel 1918. Lo schema è diviso in due sottoschemi: schema matematico e poi schema fisico. Infatti egli all'inizio tratta le nozioni fisiche intuitive elementari e poi passa alle nozioni matematiche generali, con le quali costruisce un preciso ed elegante formalismo matematico, che ha uno sviluppo formale autonomo; poi, su questa base matematica, descrive e dimostra con facilità tecnica i contenuti fisici della teoria.

Ora illustriamo lo schema. A partire da concetti intuitivi (come per esempio la congruenza tra porzioni di spazio o le traslazioni di oggetti rigidi), Weyl introduce quella che egli ritiene la struttura affine del nostro spazio-tempo e delle leggi di trasformazione affini tra sistemi di riferimento; poi, passa ad una precisa descrizione formale di tale struttura. Questa è la prima costruzione assiomatica della geometria affine (1, pag. 16). Egli sarà capace di sviluppare tutta la relatività ristretta (e generale) all'interno di questo formalismo matematico (spazi affini e trasformazioni affini). Dunque, tale geometria è l'elemento fondante di tutta la struttura fisico-matematica della sua formulazione.

Si noti la generalità del gruppo affine, che include come sottogruppi i due che definiscono la geometria euclidea e lo spazio di Minkowsky.

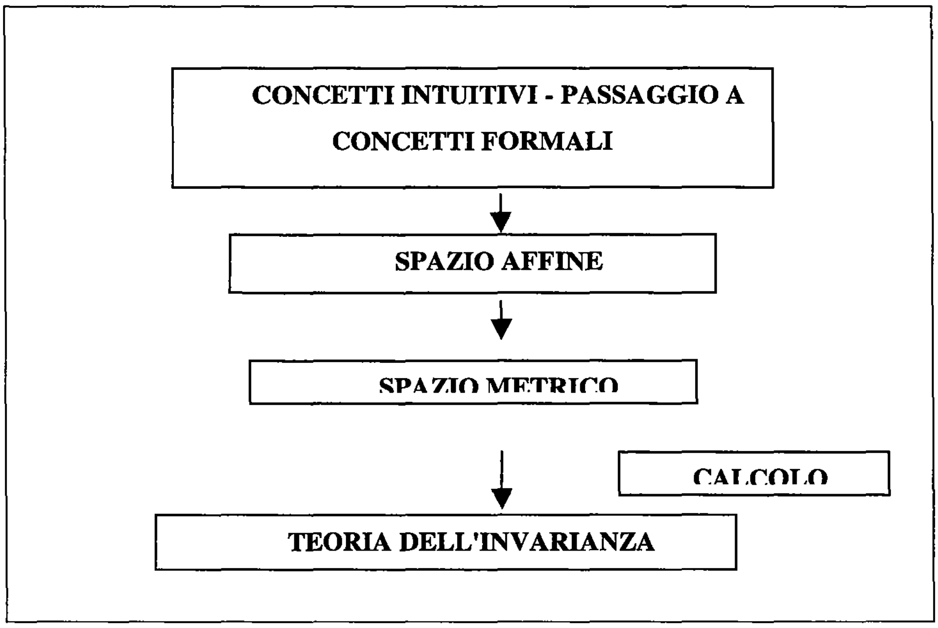
Il secondo passo fondamentale, compiuto da Weyl per creare un preciso schema matematico della teoria della relatività ristretta, è quello di sviluppare la geometria metrica, nella quale cioè sia possibile effettuare delle misure sullo spazio (o spazio-tempo).

Per definire il passaggio dalla geometria affine a quella metrica, Weyl introduce in generale il concetto di una forma metrica fondamentale in uno spazio affine, la quale è una forma quadratica che permette di definire la lunghezza di un vettore e il prodotto scalare tra due vettori. La generalità sta nel fatto che tale forma non è necessariamente definita positiva (come quella che permette di definire il prodotto scalare nella geometria euclidea). Questi sono gli elementi essenziali che consentono a Weyl di sviluppare poi tutta l'analisi tensoriale. Con ciò Weyl svilupperà "la Teoria dell'Invarianza" sotto forma di "calcolo tensoriale", lungo delle linee che gli permetteranno di esprimere in una forma matematica conveniente non solo le leggi geometriche, ma anche tutte le leggi fisiche. Egli in effetti vuol realizzare un preciso "progetto" (1, pag. 33): analizzare quelle espressioni e quelle leggi fisiche che rimangono inalterate sotto tutte le trasformazioni lineari.

A questo punto Weyl si sposta sulla fisica, prendendo in considerazione per prima la teoria dell'elettromagnetismo. Egli descrive prima il campo elettromagnetico statico, e poi tratta il campo elettromagnetico nel caso dinamico, passando di fatto ad uno spazio quadrimensionale (il quale include anche il tempo come una quarta coordinata affine, al pari delle tre spaziali). In questo passaggio, egli enuncia il "Teorema di Lorentz-Einstein".

SCHEMA 1

LO SVILUPPO MATEMATICO NELL'OPERA WEYL (1918)



Legenda: Freccia vuota: induzione o generalizzazione
Freccia piena: deduzione o specializzazione

LO SVILUPPO DELLA TEORIA FISICA NELL'OPERA DI WEYL (1918)

CAMPO ELETTROMAGNETICO STATICO

(Legge di Coulomb - Azione a distanza) Sua formulazione tensoriale in uno spazio metrico tridimensionale

ELETTRODINAMICA

(Potenziali ritardati - Forza del campo elettromagnetico) - Sua formulazione tensoriale in uno spazio metrico quadrimensionale

TEOREMA DI LORENTZ-EINSTEIN

[Il mondo come varietà affine quadrimensionale (le trasformazioni tra sistemi di coordinate sono trasformazioni affini) con una metrica pseudo euclidea, definita dall'invarianza della forma indefinita

$$-c^2t^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \text{ -}$$

Le leggi fisiche dell'elettromagnetismo sono relazioni tensoriali invarianti nel mondo affine]

GEOMETRIA RELATIVISTICA

(Gruppo di Lorentz sullo spazio di Minkowsky)

MECCANICA RELATIVISTICA

Generalizzazione del concetto di forza e di tutte le equazioni della dinamica

L'ipotesi matematica principale del "teorema" è che lo spazio-tempo è una varietà affine quadridimensionale; inoltre, in esso è definita una particolare forma metrica (una forma pseudoeuclidea); questa viene ad essere una seconda ipotesi esprimibile matematicamente, la cui validità è data da tutta una serie di esperimenti sulla luce e che comporta il gruppo di Lorentz. Da queste due ipotesi Weyl dimostra, col solo esprimere le leggi dell'elettromagnetismo come relazioni tensoriali, che tali leggi sono invarianti. Cioè, egli dimostra che le leggi dell'elettrodinamica, in quanto esprimibili come relazioni tensoriali, sono invarianti al gruppo di Lorentz.

L'autore, successivamente alla dimostrazione del teorema di Lorentz-Einstein, elabora il procedimento formale di proiezione in uno spazio minore (28, pag. 133) di grandezze (come i vettori e i tensori del secondo ordine) definite in uno spazio quadrimensionale; questo procedimento seguito all'inverso, gli consente di generalizzare le grandezze fisiche tridimensionali ad uno spazio quadrimensionale; di generalizzare quindi le equazioni della dinamica classica, e di ottenere tutti i risultati della meccanica relativistica.

Nello sviluppo della formulazione di Weyl è importante notare che, da un punto di vista matematico, sono i gruppi di trasformazione e il calcolo tensoriale che hanno per lui un ruolo fondamentale; quindi la matematica è il più possibile algebrica. Mentre da un punto di vista fisico, sono le leggi dell'elettromagnetismo che vengono considerate da lui le leggi fondanti la teoria; solo subordinatamente ad esse si considera la meccanica. Questo schema è fortemente innovativo tra gli approcci alla relatività (si ricordi che la formulazione di Weyl è del 1918), anche perché è allo stesso tempo fisico e matematico.

4. La relatività ristretta di H. Weyl del 1918 come teoria problematica

A. Drago ha suggerito (26 e 27, pag. 303-324) uno schema interpretativo delle caratteristiche fondazionali di una teoria fisica. Alla base di tale schema ci sono i "modelli di teoria scientifica" (MTS) che definiscono i fondamenti di una teoria fisica. Essi sono originati da due opzioni. La prima opzione è sul tipo di organizzazione della teoria: o la scelta OA, cioè organizzazione assiomatica, che struttura la teoria in forma rigorosamente assiomatica e la sviluppa secondo un metodo deduttivo, a partire da un insieme di "principi autoevidenti" (essa corrisponde e precisa l'idea di Einstein delle teorie costruttive (28, pag. 3)); oppure la scelta di un'organizzazione "problematica" OP, che sviluppa la teoria intorno ad un problema fisico fondamentale, di cui cerca un metodo di soluzione sulla base di principi di natura "euristica e metodologica" (essa include l'idea di Einstein delle teorie di principio). La seconda opzione è sul tipo di matematica: o la scelta di IA, uso dell'*infinito in atto* e quindi dell'analisi matematica classica; o la scelta di IP, *infinito potenziale*, e quindi uso di una matematica "discreta", non fondata sul continuo dell'analisi classica.

L'interpretazione mediante i MTS è suggerita storicamente da due MTS fondamentali: il MTS newtoniano (OA e IA), nato con la meccanica newtoniana (il quale MTS, essendo stato dominante fino all'inizio del 1900 ha svolto il ruolo di paradigma scientifico per la maggior parte delle teorie classiche), e il MTS alternativo, quello carnottiano (OP e IP), nato con la meccanica di L. Carnot e poi sviluppato anche dalla termodinamica di S. Carnot e dalla chimica.

Ora, la presentazione di Weyl della relatività ristretta mediante un "teorema" (Teorema di Lorentz Einstein) fondato su dei "principi" (spazio tempo affine con metrica pseudo-euclidea) può far pensare che la sua formulazione sia di tipo assiomatico OA. Ma è importante sottolineare che i "principi" di Weyl non hanno la caratteristica di assiomi "autoevidenti", come richiederebbe una teoria OA.

Infatti notiamo per prima cosa che anche in una teoria OP ci sono dei principi, ma essi sono principi metodologici o euristici, non assiomi astratti o autoevidenti. Quindi occorrerà capire di che natura sono i principi di Weyl. Inoltre notiamo che anche in una teoria di tipo OP ci può essere un teorema; ma qui esso è un teorema di completezza, sulla capacità universale del metodo trovato per risolvere il problema basilare della teoria. Per esempio, nella formulazione di S. Carnot della termodinamica, si consideri il ben noto "teorema di Carnot". Tale teorema si basa su di un principio metodologico, quello della "impossibilità del moto perpetuo"; sulla base di questo principio, il teorema dimostra (per assurdo, facendo uso del concetto di "ciclo di Carnot") che una *qualsiasi* macchina termica (cioè una *qualsiasi* "modalità" di conversione di calore in lavoro) ha per rendimento massimo (questo è il problema fisico della teoria) il rendimento ottenuto quando essa esegue un ciclo reversibile. Da questo teorema di completezza su tutti i possibili rendimenti poi si sviluppa l'intera teoria termodinamica.

Quindi anche il Teorema di Lorentz-Einstein[1] potrebbe essere interpretato analogamente, come un teorema dimostrato per assurdo, che dà il metodo per risolvere un problema teorico di base.

---

[1] E' interessante citare il giudizio storico di Mehlberg (17, pag. 469). Egli fa notare che Weyl "ammette il *postulato* dell'esistenza di un mondo quadrimensionale, metricizzato con metrica pseudo-euclidea", e "*osserva* che il compito della scienza fisica è stabilire le leggi che governano le connessioni invarianti tra le grandezze, vettoriali e tensoriali, che rappresentano gli osservabili nel mondo". Si noti che qui Mehlberg è incerto: prima parla di un "postulato", poi di una "osservazione", che non è un postulato, né è un teorema.

Poi Mehlberg sintetizza queste due ultime "affermazioni" riferite a Weyl (notiamo che questa è una terza dizione, diversa da "postulato" e da "osservazione"), con la frase: "la geometria del mondo è metricizzata mediante una forma quadratica indefinita e la scienza fisica è *confinata* alle leggi vettoriali e tensoriali". Queste due affermazioni, secondo Mehlberg, sono "equivalenti all'affermazione di Einstein della validità e unicità del gruppo di Lorentz", quale gruppo di invarianza dello spazio-tempo. (In realtà Einstein non ha espresso quel contenuto in questi termini apodittici, da postulato aprioristico sulla realtà). Infatti, Mehlberg sostiene che la prima "affermazione" di Weyl restringe la classe di tutte le possibili trasformazioni dello

Notiamo ciò che fa Weyl. Con la prima parte del Teorema di Lorentz-Einstein, Weyl afferma che il gruppo di invarianza delle leggi dell'elettromagnetismo è il gruppo di Lorentz; e che questo gruppo suggerisce un nuovo principio di relatività, rispetto a quello di Galilei, per tutta la fisica teorica.

Quindi, nell'ambito della sola elettrodinamica, Weyl considera l'invarianza al gruppo di Lorentz (quale gruppo di invarianza dell'elettromagnetismo) come la tesi di un effettivo teorema, di cui si può dare la dimostrazione. Ma, nell'ambito della meccanica e della fisica teorica in generale, esso non è affatto dimostrato e quindi diventa un principio metodologico, che porterá a sviluppare una nuova teoria.

A questo proposito è importante sottolineare che quando Weyl si riferisce al "Teorema" (nel paragrafo 20 del terzo capitolo del suo libro (16)), ne parla sempre come "Teorema di Lorentz". Egli nomina "Einstein" (sempre nello stesso paragrafo, pag. 144) per evidenziare due fatti fondamentali: 1) anche Einstein, come Lorentz, "aveva riconosciuto che nell'*etere* tutto il sistema delle leggi dell'elettromagnetismo possiede questa proprietà di invarianza" al gruppo di Lorentz; 2) però (16, pag. 147) "fin quando ci si attiene all'ipotesi di un *etere* reale capace di vibrare, non si può vedere nel *Teorema di relatività di Lorentz* che una notevole proprietà matematica sulla trasformazione delle equazioni di Maxwell". Infatti, se si ammetteva l'esistenza dell'etere, si ammetteva l'esistenza di un sistema "privilegiato"; e dunque in teoria si sarebbe potuto distinguere la quiete dal moto uniforme (che è ciò che in sostanza tentarono di scoprire Michelson e Morley). Quindi l'eventuale esistenza dell'etere era un vincolo teorico che non permetteva di enunciare il principio di relatività; tale vincolo restringeva il significato del gruppo di Lorentz ad una semplice proprietà matematica delle equazioni di Maxwell.

Per cui, secondo Weyl, è da questo punto in poi che il contributo di Einstein diventó fondamentale: egli, interpretando l'esperienza di Michelson, come falsificazione dell'etere, poté eliminare il "vincolo" dell'etere e intendere il nuovo gruppo, quello di Lorentz, non più come una proprietà matematica dedotta da una teoria, ma come principio metodologico per una nuova teoria, basata su di un problema fondamentale.

---

spazio-tempo a quella dei due gruppi fondamentali che lasciano invariata la forma metrica fondamentale dello spazio: il gruppo di Lorentz e il gruppo delle trasformazioni non lineari di inversione; la seconda affermazione, ammettendo solo leggi fisiche che siano relazioni vettoriali o tensoriali (vettori e tensori in uno spazio affine si trasformano solo mediante trasformazioni lineari), seleziona tra questi due gruppi quello che contiene solo trasformazioni lineari, escludendo le trasformazioni che non sono lineari (quelle di inversione), presenti nel gruppo conforme. Con questa interpretazione, Mehlberg di fatto vede la teoria di Weyl come deduttiva (OA), tanto da attribuirgli un solo postulato, che è di natura quasi totalmente matematica.

Weyl presenta il problema sottostante al "Teorema di Lorentz-Einstein" nella maniera seguente (16, pag. 150): "*Si hanno due principi di relatività. Uno di Galilei, per la meccanica, l'altro di Lorentz, per l'elettrodinamica. Se sono tutti e due veri, essi determinano un sistema di riferimento nel quale la dinamica è newtoniana, e dove le leggi dell'elettrodinamica prendono la forma delle equazioni di Maxwell. La difficoltà di spiegare il fallimento degli esperimenti che volevano distinguere la traslazione uniforme dal riposo* (Weyl si riferisce agli esperimenti come quello di Michelson e Morley), *può essere superata solo se si ammette che tutte le leggi della natura sono sottoposte ad uno dei due principi di relatività. Quello di Galilei non può essere applicato all'elettrodinamica; esso esigerebbe che nelle equazioni di Maxwell, i termini che permettono di distinguere i campi variabili da quelli stazionari, scompaiano; non ci sarebbe alcuna induzione, alcuna luce, e la telegrafia senza fili sarebbe impossibile. Al contrario, l'ipotesi di Lorentz sulla contrazione delle lunghezze lascia presupporre che la meccanica newtoniana potrà essere modificata...*".

Il ragionamento di Weyl prosegue sostenendo (16, pag. 150) che l'inesistenza dell'etere, e quindi, l'impossibilità di determinare un moto assoluto implica che vi deve essere un **unico principio di relatività per tutte le leggi fisiche** (che allora devono essere invarianti per cambiamento di sistemi di riferimento inerziali); se non fosse così, egli dice, non sapremmo come descrivere i "fenomeni elettromagnetici e meccanici combinati". Dunque, conclude Weyl, "*Poiché le equazioni di Maxwell soddisfano il principio di relatività di Einstein, così come Lorentz aveva già visto, l'esperienza di Michelson è una prova che la meccanica dei corpi solidi deve essere rigorosamente conforme al principio* (di relatività) *di Einstein e non al principio di Galilei*".

In questo senso Einstein generalizzò il principio di relatività classico, in modo tale che il gruppo di Lorentz fosse proponibile come gruppo di invarianza per tutta la fisica e quindi per la meccanica. E infatti Einstein la rifondó completamente su di esso, mediante la critica del concetto di simultaneità.

Con ciò Einstein ha completato il *Teorema di Lorentz,* facendolo diventare un nuovo "teorema" per tutta la fisica teorica, ma allora esso è un teorema di completezza.

In effetti questo teorema di Lorentz-Einstein risolve il problema fondamentale di trovare la nuova teoria. È in questo senso che Weyl parla di "Teorema di Lorentz-Einstein", che collega l'opera di Lorentz ed Einstein in un progresso teorico valido per la teoria fisica in generale.

Anche un'analisi della struttura logica con cui Weyl sviluppa il suo discorso sul Teorema di Lorentz-Einstein, dimostra che tale teorema è di completezza.

Infatti, secondo uno studio di Drago (26), i principi metodologici che fondano le teorie fisiche dei MTS ad OP, contengono nei loro enunciati espressioni "doppiamente negate", le cui corrispondenti affermazioni scientifiche non hanno supporto scientifico; esse indicano che quel tipo di teoria si sviluppa seconda una logica non classica (cioè una logica in cui una doppia negazione non corrisponde all'affermazione; il che equivale al venir meno del principio logico del *"tertium non datur"*).

Anche il Teorema di Lorentz-Einstein (a seguito delle spiegazioni date dallo stesso Weyl, che abbiamo discusso) si fonda indirettamente su due principi euristici e metodologici (i quali vengono evidenziati da Weyl, ma non vengono dichiarati esplicitamente nel suo enunciato del teorema): 1) l'impossibilità di determinare un moto assoluto (che è equivalente a dire "non relativo"); che, come dice Einstein stesso, è analogo a quello dell'impossibilità del moto perpetuo (≡ senza fine), con cui si esprime la seconda legge della termodinamica; e 2) considerare il gruppo di Lorentz, che è il gruppo di invarianza dell'elettromagnetismo, come il gruppo su cui rifondare la meccanica: Non è vero che la meccanica non possa essere invariante al gruppo di Lorentz; oppure in maniera sintetica, come ha fatto Einstein: È impossibile misurare una velocità che non sia inferiore a quella della luce.

Questi principi sono espressi allora mediante frasi in cui compare una doppia negazione (basti vedere i termini sottolineati) e quindi appartengono alla logica non classica. Che però non si vede più quando al secondo principio si dà una forma strettamente matematica, così come fa Weyl, mediante l'introduzione in uno spazio affine quadrimensionale di una forma metrica pseudoeuclidea, la metrica Minkowskiana. Questo fatto può avere oscurato la natura dell'organizzazione della teoria generale, che è OP, facendola sembrare a Weyl OA, che ha usato la parola "Teorema", lasciando intendere un teorema dedotto da assiomi.

Però, si noti come poi Weyl dimostra il *Teorema di Lorentz-Einstein* (che era deduttivo per le leggi dell'elettromagnetismo: queste possono essere messe in una forma tensoriale che è quindi invariante), quando deve discutere il contributo dato da Einstein (che completa il Teorema di Lorentz, trasformandone la natura): lo dimostra mediante un ragionamento per assurdo, così come si richiede nella dimostrazione di un teorema di completezza (Drago, 26).

Infatti, come visto, Weyl dice che "... *Quello* (il gruppo) *di Galilei non può essere applicato all'elettrodinamica; esso esigerebbe che nelle equazioni di Maxwell, i termini che permettono di distinguere i campi variabili da quelli stazionari, scompaiano;* (allora) *non ci sarebbe alcuna induzione, alcuna luce, ...*".

Cioè, negare il gruppo di Lorentz come gruppo di invarianza di tutte le leggi fisiche, sostituendolo con quello di Galilei, porta all'assurdo dell'inesistenza della luce e in generale delle principali leggi dell'elettrodinamica.

Successivamente Weyl fa vedere (come ha fatto Einstein) che la meccanica è effettivamente riformulabile in base al gruppo di Lorentz. Ciò allora chiude in maniera ciclica il teorema; cioè, viene verificato il principio metodologico di partenza.

5. MTS della teoria di Weyl e incommensurabilità

In totale, Weyl sviluppa una formulazione della relatività ristretta che procede con un teorema di completezza dimostrato per assurdo. Con ciò egli sceglie un'organizzazione della teoria di tipo OP (salvo l'ambiguità che gli dà la formulazione matematica dello spazio affine, che sembra dato a priori).

Poiché poi la sua scelta matematica è di tipo IP (per l'uso della teoria dei gruppi e di tecniche algebriche, senza uso di equazioni differenziali o dell'analisi classica), allora è possibile concludere che il suo MTS è quello carnottiano OP e IP.

Ma notiamo che ciò non era chiaro a Weyl: da qui la sua dizione di "teorema" senza specificazioni, per di più unendo con un "trattino" Lorentz ed Einstein che seguirono due metodi e due organizzazioni teoriche completamente differenti. Qui appare quella che sembra una caratteristica cruciale della fisica del 1900: l'incommensurabilità[2]. Drago ha mostrato che la formulazione corrente della meccanica quantistica include una essenziale incommensurabilità, dovuta al fatto che essa presenta due tronconi di teoria (equazione di Schrödingher e principio di indeterminazione); essi sono tra loro incommensurabili perché basate su scelte opposte, corrispondenti a due MTS opposti, il newtoniano e il carnottiano. Inoltre notiamo che Einstein in relatività ristretta non ha usato equazioni differenziali se non ad un livello cosi basso che potrebbero essere sostituite da equazioni a differenze finite, quindi secondo la scelta IP; e la sua teoria è essenzialmente problematica, sia perché nega i presupposti della OA di Newton (spazio e tempo assoluti, forza come assioma principale), sia perché vuole risolvere un problema (quale sia il gruppo di invarianza di tutta la fisica teorica). Ma anche lui non si rende conto di ciò, né lo sottolinea quando più tardi parlerà di teorie di principio e teorie costruttive. Per di più non gli sembra affatto di aver cambiato matematica rispetto a quella classica. Tanto è vero che non si interessa del gruppo di trasformazione (il gruppo di Lorentz) come gruppo (cosi come lo si intende nella teoria dei gruppi). Quindi non si sente al di fuori delle scelte del MTS newtoniano.

Questa doppiezza persiste, ma in forma più chiarita e molto minore, in Weyl. Il quale pero non solo non esplicita del tutto la scelta OP, ma, pur volendo scegliere la scelta matematica IP, non sa precisare quanto della sua teoria appartenga ad IA.

Quindi possiamo concludere che nella teoria fisica del primo novecento le crisi sono state risolte ed hanno trovato avanzamenti senza recuperare una visione chiara dei fondamenti della fisica teorica e quindi senza cogliere il limite della incommensurabilità che è comparso all'interno dei lavori proposti.

---

[2] A. Drago: *Alle origini della meccanica quantistica: le sue opzioni fondamentali*, in G. Cattaneo, A. Rossi (eds): I fondamenti della meccanica quantistica. Analisi storica e problemi aperti. - Editel Cosenza 1991, p. 59-79.

Bibliografia

[1] H. Weyl - *Raum, Zeit, Materie* - Springer, Berlin 1918. Trad. Inglese della quinta edizione tedesca: *Space, Time, Matter,* Dover Publications, Inc., 1952

[2] H. Weyl - *Gruppentheorie und Quantenmechanik* - Teubner, Leipzig, 1928. Traduzione inglese della seconda edizione del 1931: *Theory of groups and Quantum mechanics* - Dover, New York, 1949

[3] B. Rosenfeld - *The History of Non-Euclidean Geometry* - Springer, Berlin, 1988

[4] S. Bergia - The fate of Weyl's unified theory of 1918 - *History of Physics in Europe in the 19th and 20th Centuries*, F. Bevilacqua (ed.), SIF Conference Proceedings Vol. 42, Bologna, 1993, p. 185-189

[5] E. Whittaker - *A History of the Theories of Aether and Electricity* - Vol. 2: *The modern Theories 1900-1926* - Harper and Brothers, New York, 1960

[6] H. Weyl - Relativity theory as a stimulus in mathematical research - Proceedings of the American Philosophical Society, **93**, 535-541 (1949), in *Gesammelte Abandlungen*, Springer, Berlin, 1968, vol. 4, p. 394-400

[7] J. Dieudonné - H. Weyl - in C. C. Gillespie (ed.): *Dictionary of Scientific Biografy*, 14, Scribner's sons, New York, 1979, p. 285

[8] C. Chevalley e A. Weil - Hermann Weyl (1885-1955) - *Enseignement Mathématique*, 3, (1957)

[9] E. Whittaker - *A History of the Theories of Aether and Electricity* - Vol. 1: *The classical Theories* - Harper and Brothers, New York, 1960

[10] M. A. Najmark e A. I. Stern - *Teoria delle rappresentazioni dei gruppi* - Editori Riuniti, Roma, 1984

[11] B. van der Waerden - *A History of Algebra* - Springer, 1967

[12] A. Drago - A new mathematics for the new theory of quantum mechanics. The fate of H. Weyl's program of research - in C. Garola e A. Rossi (eds.): *The Foundations of quantum Mechanics* - Kluwer – Lecce, 1993

[13] A. Borel - Hermann Weyl and Lie Groups - in K. Chandrasekharan (ed.): *Hermann Weyl, 1885-1995*, Springer, Berlin, 1986, p. 53-82

[14] Fondamenti della matematica - *Enciclopedia della Fisica* - ISEDI, 1976, 1-p. 146-159

[15] B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, A. T. Fomenko - *Geometria Contemporanea* - vol. 1, Editori Riuniti, Roma 1987

[16] H. Weyl - *Raum, Zeit, Materie* - Springer, Berlin 1918. Trad. francese sulla quarta edizione tedesca: *Temps, Espace, Matière*, Librairie Scientifique A. Blanchard, Paris, 1922

[17] H. Mehlberg - Relativity and the atom - in G. Maxwell e P. Feyerabend (eds.): *Mind, matter and motion*; Minnesota U.P., 1966, p. 449-491

[18] W. Pauli - *Teoria della relatività* - Boringhieri, Torino, 1958

[19] H. Weyl - *Filosofia della matematica e delle scienze naturali* - Boringhieri, Torino, 1949

[20] W. E. Baylis - Special relativity with 2×2 matrices - Am. J. Phys., **48** (11), 1980, p. 918-925

[21] P. Havas - Four-Dimensional Formulations of Newtonian Mechanics and Their Relation to the Special and the General Theory of Relativity - Reviews of Modern Physics, **36**, 1964, p. 938-964

[22] H. Goldstein - *Meccanica classica* - Zanichelli, Bologna, 1982

[23] Matematica e Fisica - *Enciclopedia delle Scienze* - Vol. 1, Istituto Geografico De Agostini, Novara 1984

[24] M. Coxeter - *Euclidean Geometry* - U. Toronto P., 1957, p. 16-21

[25] H. Weyl - *The classical groups. Their invariants and representations* – Princeton University Press, New York 1939

[26] A. Drago - Dispense del corso di Storia della Fisica - Anno accademico 1997-1998

[27] A. Drago - I quattro modelli della realtà fisica - Epistemologia, **13**, 1990, p. 303-324

[28] F. M. Scarpa - *Tesi di laurea in Fisica*; a.a. 1999-2000, Napoli (rel. A. Drago)

[29] E. Cunningham - The principle of relativity in electrodynamics and an extension thereof - Proc. London Math. Soc., 8 (1910), pag. 77-98