Luigi Bianchi, Gregorio Ricci Curbastro e la scoperta delle identità di Bianchi

Fabio Toscano

1. Introduzione

E' noto che lo strumento matematico attraverso il quale nel 1915 Albert Einstein portò a compimento l'edificazione della teoria della relatività generale,[1] ossia quel calcolo differenziale assoluto (C.D.A.) posto oggi a fondamento del moderno calcolo tensoriale, era stato creato tempo addietro, fra il 1884 e il 1895, da Gregorio Ricci Curbastro (in seguito Ricci),[2] matematico di Lugo di Romagna vissuto dal 1853 al 1925. Eppure, prima dell'affermarsi del paradigma relativistico, l'opera di Ricci era stata accolta con perplessità, quando non si trattava di vera e propria indifferenza, dai matematici di lui contemporanei. Ricci concorse due volte, senza successo, al Premio reale dell'Accademia dei Lincei, il massimo riconoscimento al quale potesse ambire un matematico italiano dell'epoca. La prima volta, nel 1887, il relatore Eugenio Beltrami aveva espresso un giudizio prudente sui suoi lavori e, pur negandogli il Premio, lo aveva incoraggiato a proseguire nelle proprie ricerche, ritenute ancora in fase di "elaborazione preparatoria".[3] La seconda volta, nel 1901, quando aveva ormai definitivamente affinato i suoi algoritmi, Ricci si vide negare il Premio dall'antico compagno di studi presso la Scuola Normale di Pisa, Luigi Bianchi, matematico parmense vissuto dal 1856 al 1928. Questi, al contrario di Ricci, era molto famoso e influente; i suoi numerosi e importanti lavori di geometria differenziale lo avevano reso, anche fuori dei confini nazionali, uno dei matematici più ammirati del suo tempo.[4] Bianchi non risparmiò critiche molto severe a Ricci, al quale imputava il fatto di aver creato uno strumento artificioso e privo di una effettiva utilità.[5]

---

1 Einstein (1915).

2 L'opera di Ricci è stata dettagliatamente esaminata in Reich (1994), Dell'Aglio (1996), (1997). Si veda anche Toscano [forthcom].

3 Beltrami (1889), 304-307.

4 Personaggio assai trascurato dalla moderna letteratura storico-scientifica, Bianchi pubblicò, fra il 1878 e il 1928, oltre 140 memorie dedicate alla geometria differenziale metrica di stampo gaussiano, lasciando numerosi e originali contributi in ogni settore di questa disciplina. Per una panoramica sull'opera di Bianchi, si veda Fubini (1929), Scorza (1930), Vincensini (1957), Toscano [forthcom].

5 Bianchi (1904), 147-150. Questo veniva peraltro imputato a Ricci da parte di quasi tutta la comunità matematica dell'epoca. Si veda Speziali (1981), 409.

Per di più, nello stesso periodo in cui negava il Premio reale a Ricci, Bianchi scopriva le celebri identità che oggi portano il suo nome:[6]

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0 \tag{1.1}$$

Tali identità legano le derivate covarianti del tensore di curvatura $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ in uno spazio di Riemann e ricoprono un ruolo fondamentale nella relatività generale, garantendo la automatica conservazione del tensore energia-impulso che compare nelle equazioni del campo gravitazionale di Einstein.[7] Eppure queste relazioni erano state scoperte alcuni anni prima proprio da Ricci,[8] il quale tuttavia non aveva saputo coglierne l'importanza e la portata.

Questa vicenda è particolarmente curiosa e interessante, soprattutto alla luce delle profonde differenze che segnano l'opera matematica di Ricci e Bianchi e dell'atteggiamento fortemente polemico di quest'ultimo nei confronti dei metodi tensoriali di Ricci. La presente relazione si propone di esaminare i diversi contesti e le diverse modalità di comparsa delle identità di Bianchi nell'opera di Ricci e di Bianchi. Inoltre, il caso del premio negato da Bianchi a Ricci è altamente significativo in ambito storiografico; di fatto, esso costituisce un esemplare *case study* riguardante il giudizio dato a una teoria matematica entro un ben definito paradigma storico-scientifico, prima del totale ribaltamento dello stesso giudizio, ribaltamento dovuto all'emergere di una nuova teoria fisica e conseguentemente di un nuovo paradigma. Verranno allora proposte in questa sede anche alcune considerazioni riguardanti il profondo dissidio scientifico fra Bianchi e Ricci, e si vedrà inoltre come la singolare storia della scoperta delle identità di Bianchi possa costituire, al di là della sua propria rilevanza, un ulteriore, prezioso elemento di confronto nell'ambito del suddetto dissidio.

2. Bianchi e Ricci: le ragioni di un dissidio scientifico

Quando, nel 1901, partecipò per la seconda volta al concorso per il Premio reale, Ricci aveva da poco toccato, con la celebre memoria riassuntiva *Méthodes de Calcul différentiel absolu et leurs applications* (firmata anche da Tullio Levi-Civita)[9], il vertice della sua produzione scientifica. Il C.D.A., spogliato del "primitivo e assai complesso apparato analitico" che gli aveva rimproverato Beltrami, aveva ormai trovato, in tutta la sua eleganza, definitiva sistemazione come algoritmo e aveva nel contempo rivelato le sue potenzialità applicative. Tuttavia, la maggior parte delle applicazioni del C.D.A. proposte non sembrava di utilità decisiva. Fu questo il motivo sostanziale che spinse Bianchi, relatore del Premio reale nel 1901, a negare ancora una volta l'ambito riconoscimento a Ricci. La relazione di Bianchi inizia con

---

6 Bianchi (1902), 140-143.

7 Si veda eq. (5.1) della presente relazione.

8 Ricci Curbastro (1888), 259-263.

9 Ricci Curbastro & Levi-Civita (1900). Levi-Civita era stato allievo di Ricci negli anni di studio presso l'Università di Padova.

l'analisi della più importante delle opere presentate da Ricci, quelle *Lezioni sulla Teoria delle Superficie*,[10] del 1898, in cui viene affrontato in maniera sistematica e definitiva l'approccio che si può avere verso la geometria differenziale partendo dal C.D.A. Seguiamo alcuni passi: "(...) lo strumento più essenziale del nuovo calcolo consiste in uno speciale modo di derivazione, in rapporto alla data forma quadratica fondamentale, la derivazione covariante e controvariante. La derivazione covariante venne introdotta esplicitamente da Christoffel (...) è merito principale del Ricci di aver riconosciuta l'importanza di questo concetto fondamentale e costruito sopra di esso i nuovi algoritmi."[11] Tuttavia "ci sembra che (...) i vantaggi inerenti ai nuovi algoritmi siano più che altro formali, o limitati a questioni secondarie, e in questo giudizio ci conferma l'osservare che ai più recenti ed importanti progressi compiuti [in campo geometrico] non hanno contribuito in modo significante i nuovi metodi."[12] Subito dopo Bianchi fa un'osservazione che oggi può sembrare quasi profetica: "E' giusto però riconoscere che molto maggiori sono i vantaggi dei procedimenti del calcolo assoluto nel campo della geometria differenziale a più dimensioni (...). Qui dove più difficile riesce l'ordinaria intuizione, utili servigi prestano i nuovi algoritmi, perfezionati dal punto di vista invariantivo, ed i calcoli ne risultano così spesso non soltanto semplificati e condensati, ma anche più sicuramente diretti."[13] E' naturalmente immediato pensare alla varietà spazio-tempo quadridimensionale, ovvero all'edificio formale della teoria della relatività, nel quale le architetture del C.D.A. hanno un ruolo insostituibile.

Terminata l'analisi dei lavori di Ricci, Bianchi passa alle conclusioni: "A meritare il premio reale [occorre] almeno un lavoro di un valore veramente eccezionale (...) gli algoritmi da [Ricci] sviluppati (...) si dimostrano certamente utili, sebbene non indispensabili, nel trattare varie questioni matematiche; e di ciò troviamo le prove nei lavori stessi del Ricci e in quelli di alcuni pochi seguaci. Ma considerando, nei lavori presentati, i risultati veramente nuovi acquisiti alla scienza [essi] non ci sono apparsi di tale e tanta importanza da meritare l'altissima distinzione."[14] Qui il tono di Bianchi si è fatto particolarmente caustico e severo; per cercare di interpretare l'intransigenza di Bianchi nei confronti di Ricci, vorrei soffermarmi brevemente su alcuni punti, i quali costituiranno lo sfondo necessario per la successiva analisi sulla scoperta delle identità di Bianchi.

In primo luogo, è necessario porre l'accento sulle diverse tradizioni di ricerca che Bianchi e Ricci ereditarono e svilupparono nel corso delle loro ricerche. L'opera di Bianchi nasce dal cuore della geometria differenziale del XIX secolo: teoria

---

[10] Ricci Curbastro (1898).

[11] Bianchi (1904), 147. In effetti l'algoritmo della derivata covariante, introdotto per la prima volta da Elwin B. Christoffel nel 1869 (si veda Dell'Aglio (1996), 215-235), fu poi da Ricci organizzato a metodo per assicurare l'invarianza delle relazioni tra tensori fra il 1887 e il 1888 (Ricci Curbastro (1887), (1888)).

[12] Bianchi (1904), 148.

[13] Ibid., 148-149.

[14] Ibid., 150.

gaussiana delle superfici, deformazione delle superfici e applicabilità, geometria dello spazio, spazi di Riemann e via dicendo.[15] Al contrario, il C.D.A. di Ricci non trova le sue radici più autentiche nella geometria differenziale, ma piuttosto nella teoria delle forme differenziali e degli invarianti, teoria che certamente si sviluppò dapprima in seno agli studi geometrici inaugurati da Carl Friedrich Gauss e da Bernhard Riemann, ma si affermò poi, grazie soprattutto all'opera di Christoffel, come vero e proprio campo algebrico autonomo.[16] Questa considerazione ci porta direttamente ad un aspetto fondamentale della nostra analisi, vale a dire il ruolo radicalmente diverso che l'idea matematica di invarianza ricoprì nell'opera di Bianchi e di Ricci. La piena consapevolezza della centralità dell'invarianza nella ricerca geometrica e fisica è senza dubbio la caratteristica più importante dell'opera di Ricci. Questi unificò e completò infatti, con il suo calcolo, tutti gli aspetti dell'idea matematica di invarianza del XIX secolo e la formulazione in termini invariantivi delle equazioni della geometria e della fisica divenne ben presto il fine principale delle sue ricerche. Al contrario, Bianchi mantenne sempre le distanze da questo tipo di studi, rimanendo piuttosto fedele ad una idea "ristretta" degli invarianti differenziali, secondo la quale un invariante differenziale "è il riflesso analitico delle proprietà intrinseche delle superfici (quali l'elemento di linea, la curvatura e l'angolo fra due direzioni su una superficie)".[17] Detto questo, di fatto Bianchi e Ricci svilupparono due programmi di ricerca che potremmo definire complementari. "Preferisco che con metodi vecchi si trovino risultati nuovi al ritrovamento di risultati vecchi con metodi nuovi"; questo amava dire ai suoi studenti Bianchi, riprendendo una frase di Leopold Kronecker.[18] E in effetti i risultati nuovi trovati da Bianchi nel campo della geometria differenziale metrica sono stati talmente numerosi da far affermare al suo celebre allievo Guido Fubini che "sembra impossibile che un uomo solo abbia compiuto tanta mole di lavoro."[19] Per quanto riguarda invece Ricci, il suo obiettivo non fu mai quello di contribuire direttamente al progresso della geometria differenziale pura, bensì il trasferimento dei metodi della teoria degli invarianti algebrici alla teoria delle forme differenziali; la geometria rappresentava per Ricci solo uno dei possibili campi di applicazione del suo metodo. Peraltro, tutta l'opera di Ricci è intenzionalmente rivolta alla matematica applicata: l'autentica finalità della sua ricerca è la creazione di uno strumento, di un metodo matematico utile alla geometria ma anche alla fisica, attraverso il quale si possano definire classi di equazioni matematiche e fisiche invarianti per arbitrarie trasformazioni di coordinate. Nell'introduzione ai *Méthodes* Ricci sintetizza in modo molto chiaro il suo pensiero: "(...) è proprio dalla (...) scelta [dei metodi] che dipende la possibilità di costringere (...) una moltitudine di fatti senza alcun legame apparente tra loro a raggrupparsi secondo le loro affinità

---

15 Si veda Vincensini (1972).

16 Su questo tema: Reich (1994), Dell'Aglio (1996).

17 Dell'Aglio (1996), 219.

18 La citazione è tratta da Sansone (1977), 23.

19 Fubini (1929), 36.

naturali. (...) succede spesso che lo stesso teorema si presenti in maniera più completa e generale, se vi si arriva (...) con mezzi più appropriati."[20]

L'approccio di Bianchi va su tutt'altra direzione: "Nel Bianchi (...) incontriamo (...) delle lunghe esposizioni, talvolta anche noiose (...). La stessa abbondanza di formule caratterizza qualsiasi memoria del geometra pisano. Il Bianchi è straordinariamente modesto nei mezzi usati; essenzialmente non si tratta che di un metodo solo. Per la determinazione d'una superficie egli ricorre quasi sempre alle forme quadratiche di Gauss (...). Egli sceglie la via più dritta, senza artifici, direi quasi elementare (...)."[21] Nel 1910, Bianchi aveva invero sintetizzato in modo inequivocabile la sua posizione: "(...) di tutti gli altri [metodi] fin qui escogitati, nessuno ha rivelato con l'effettivo successo una potenza superiore ai metodi di Gauss. (...) l'importanza di una ricerca di geometria infinitesimale dipende ben più dalla profondità del pensiero geometrico che la informa, che non dalla veste analitica di cui l'autore, a seconda delle sue preferenze, si compiace di rivestirlo."[22] È chiaro dunque che la creazione di un nuovo formalismo in geometria differenziale come il C.D.A. doveva essere considerato da un tale purista come una inutile astrusità nonché una seria minaccia per la reale natura del pensiero geometrico. D'altra parte Ricci aveva creato il suo metodo non solo come utile strumento per la geometria, ma anche per la fisica.

Un ultimo ma importante elemento di confronto fra Bianchi e Ricci è costituito proprio dalla diversa sensibilità che i due matematici ebbero verso i fondamenti della fisica.

Sebbene alcuni suoi lavori si siano rivelati assai preziosi per il progresso della relatività generale,[23] Bianchi è da considerarsi a tutti gli effetti un matematico puro; non vi è, nella sua nutrita produzione, un solo articolo che tratti esplicitamente e intenzionalmente di problemi di fisica matematica, così come non sembra vi siano interventi pubblici del matematico emiliano nell'ambito delle varie polemiche che si scatenarono in Italia a seguito dell'affermarsi della teoria della relatività generale. Uomo di profonda cultura, Bianchi era senz'altro al corrente delle novità che si affacciavano nei domini della fisica nei primi anni del XX secolo, tuttavia mantenne sempre una posizione di osservatore assolutamente distaccato.

Ritengo ragionevole pensare che lo scarso interesse di Bianchi nei confronti delle questioni di carattere fisico abbia in qualche misura inciso a rendere ancora più sensibile il suo distacco dalle prerogative e dalle finalità del lavoro di Ricci. Quest'ultimo infatti è da considerarsi un fisico matematico, avendo sempre ben precisi nella mente i possibili riferimenti del suo lavoro a varie questioni di fisica matematica (e in particolare quelle relative alla teoria dell'elasticità, alla meccanica analitica, all'elettromagnetismo e alla teoria del calore[24]) e, più in generale, alla

---

[20] Ricci Curbastro & Levi-Civita (1900), 188.

[21] Il geometra russo Sergej Finikoff citato in Blaschke (1954), 45.

[22] Bianchi (1910), 221.

[23] Bianchi (1897), (1902), (1916).

[24] Ricci Curbastro (1888), (1892); Ricci Curbastro & Levi-Civita (1900).

possibilità di applicare il C.D.A. in tutti quei campi della ricerca fisica e matematica nei quali sia fondamentale disporre di equazioni "covarianti a vista". È certamente vero anche che Ricci, pur sviluppando il C.D.A. al fine di ottenere equazioni invarianti per arbitrarie trasformazioni di coordinate, non indirizzò mai i suoi risultati a una critica della meccanica newtoniana e non comprese che la covarianza generale poteva essere considerata (come fu invece per Einstein) il passo necessario per superare la classe dei sistemi inerziali. Il Principio di Covarianza Generale in questo senso "appartiene" ad Einstein, ma questi ebbe bisogno, per formalizzarlo, del calcolo di Ricci, che si rivelò pertanto non solo utile, bensì indispensabile.

Ma quando Bianchi negò il Premio reale a Ricci, il paradigma relativistico era ancora lontano dall'affermarsi.[25]

3. Le identità di Bianchi nell'opera di Ricci

Le relazioni oggi note come identità di Bianchi compaiono per la prima volta nell'opera di Ricci con l'articolo del 1888 *Delle derivazioni covarianti e controvarianti e del loro uso nell'analisi applicata*.[26] Si tratta di un articolo cruciale nell'opera del matematico romagnolo, in quanto in esso ha luogo l'introduzione esplicita del concetto di tensore nell'ambito di quella che, a tutti gli effetti, è la prima esposizione sistematica del calcolo tensoriale. Cerchiamo di scorgere in quale specifico contesto delle sue ricerche Ricci si trovò a scoprire, prima di Bianchi, le celebri identità che di quest'ultimo portano il nome.

I primi studi di carattere fisico condotti da Ricci risultano direttamente influenzati da alcuni sviluppi della fisica-matematica del secondo Ottocento legati all'emergere delle geometrie non euclidee. Si tratta nella fattispecie dei primi ma importanti tentativi di analisi delle leggi della fisica classica in ambito non euclideo.[27] Questi studi riguardano in particolare le ricerche di Beltrami, il cui

---

[25] È evidente come, dopo un secolo, la storia abbia ribaltato le cose: mentre il calcolo tensoriale è tuttora uno dei capitoli fondamentali della matematica moderna, nonché uno degli strumenti più utili ed efficaci della fisica teorica, la geometria differenziale metrica di stampo gaussiano è stata in gran parte superata da concetti più moderni (concetti, come quello ad esempio di spazi a connessione, che discendono in modo più o meno diretto dal calcolo di Ricci) e il nome del matematico parmense che ad essa consacrò la propria opera sopravvive nella memoria grazie quasi esclusivamente alle cosiddette identità di Bianchi (cioè, un risultato fondamentale del calcolo tensoriale). È poi doveroso ricordare che, con il successo della relatività generale, Bianchi mostrò in qualche modo di ricredersi sul C.D.A.: prova ne è il fatto che verso la fine della propria carriera si occupò della nozione di parallelismo di Levi-Civita (si veda Bianchi (1922a), (1922b)), ovvero di quel risultato nuovo che aveva assicurato al metodo di Ricci un fondamentale e definitivo contenuto geometrico.

[26] Ricci Curbastro (1888).

[27] Si veda in proposito Tazzioli, (1993).

progetto era quello di esprimere in coordinate generali le equazioni delle teorie del potenziale e dell'elasticità. "All'interno di questo progetto – che è ispirato da motivazioni di carattere puramente fisico – le ricerche di Beltrami presentano una embrionale considerazione non cartesiana di particolari grandezze tensoriali."[28] L'articolo di Ricci *Delle derivazioni*, che è dedicato per più di un terzo all'applicazione dei metodi del C.D.A. alla teoria dell'elasticità, contiene la considerazione in ambito riemanniano delle grandezze tensoriali introdotte da Beltrami. Quest'ultimo peraltro, conformemente al pensiero fisico del tempo, era convinto che un mezzo etereo pervadesse l'intero universo e attraverso deformazioni elastiche propagasse le forze nello spazio. Nel 1886 Beltrami provò che un tale mezzo obbediente alle usuali leggi dell'elasticità e le cui deformazioni davano luogo alle formule trovate da James Clerk Maxwell nel suo celeberrimo *Treatise on electricity and magnetism* (la cui prima edizione risale al 1873) non poteva esistere. La sua dimostrazione presupponeva però che lo spazio fosse euclideo.[29]

Le idee di Beltrami ispirarono in Italia i lavori di importanti matematici quali Ernesto Cesaro, Carlo Somigliana ed Ernesto Padova, che cercarono di estendere i risultati della teoria dell'elasticità ad uno spazio n-dimensionale a curvatura costante.[30] Centrale, non solo per i risultati raggiunti ma anche per la sua vicinanza con Ricci, è la figura di Padova. Fra i due, dal 1882 colleghi all'Università di Padova, si era andato instaurando un rapporto di amicizia fraterna, ma anche di collaborazione scientifica.[31] Prendendo le mosse dai lavori di Beltrami, Padova fu autore, a ridosso dell'ultimo decennio del XIX secolo, di alcune importanti memorie nelle quali la teoria delle coordinate curvilinee viene applicata allo studio delle deformazioni dei corpi elastici tanto nello spazio euclideo quanto in spazi di natura diversa. In una raccolta dedicata dall'Università di Padova a quella di Bologna, che nell'anno 1888 celebrava l'VIII Centenario della propria fondazione, Padova inserì uno scritto nel quale stabilì per la prima volta, in coordinate ortogonali qualunque e per uno spazio a curvatura costante, le equazioni che esprimono la condizione cui devono soddisfare i coefficienti di deformazione e quindi le componenti delle tensioni di un corpo elastico.[32]

La memoria di Ricci *Delle derivazioni* compare nella stessa raccolta. Dopo aver dedicato i primi capitoli alla definizione delle derivate covarianti e controvarianti, e all'introduzione dei "sistemi n-upli covarianti e controvarianti" (→ tensori), Ricci applica i metodi esposti a questioni inerenti la geometria differenziale, la meccanica razionale e la fisica matematica. Come ho già ricordato, grande spazio è dato alle applicazioni nella teoria dell'elasticità. Il capitolo importante per il nostro discorso è

---

[28] Dell'Aglio (1997), 30-31.
[29] Beltrami (1886).
[30] Tazzioli (1993), 25-29.
[31] Vi è da aggiungere che lo stesso Padova e altri grandi matematici dell'epoca quali Enrico Betti e Ulisse Dini erano stati maestri di Ricci e Bianchi nel periodo della loro formazione scientifica (1873-1877) presso la Normale di Pisa.
[32] Padova (1888).

il quinto, *Equazioni di condizione per i coefficienti che definiscono la deformazione di un mezzo elastico*, in cui vengono generalizzati, attraverso il C.D.A., i risultati ottenuti da Padova nella memoria citata in precedenza. A un certo punto della sua analisi[33] Ricci prende in considerazione una varietà n-dimensionale non euclidea, ma tale che l'espressione per il suo elemento di linea $\varphi^2 = \sum_{rs} a_{rs} dx_r dx_s$ possa essere dedotta dalla forma $n+1$-dimensionale euclidea $\sum_{t=1}^{n+1} dy_t^2$, ponendo le y_t come opportune funzioni delle x; per quanto dimostrato in precedenza nella memoria,[34] è possibile trovare un "sistema doppio" di funzioni $\beta_{il} = \beta_{li}$ (ovvero un tensore covariante simmetrico di rango 2) tale che:[35]

$$a_{ih,lj} = \beta_{il}\beta_{hj} - \beta_{ij}\beta_{hl} \tag{3.1}$$

$$\beta_{ilh} = \beta_{ihl} \tag{3.2}$$

ove β_{ilh} rappresenta la derivata covariante di β_{il}.
Calcolando la derivata covariante della (3.1) si ha:

$$a_{ih,lj,k} = \beta_{il}\beta_{hjk} + \beta_{hj}\beta_{ilk} - \beta_{ij}\beta_{hlk} - \beta_{hl}\beta_{ijk} \tag{3.3}$$

Da quest'ultima relazione e dalla (3.2) Ricci ricava:

$$a_{ih,ljk} = a_{ih,lj,k} + a_{ih,jk,l} + a_{ih,kl,j} = 0 \tag{3.4}$$

Qui vi è il punto cruciale: Ricci non avverte che le relazioni (3.4) non dipendono dalla possibilità di decomporre il tensore di Riemann nella forma (3.1), ma in realtà valgono sempre. Le $a_{ih,ljk}$ sono cioè identicamente nulle: si tratta proprio di quelle identità differenziali che noi oggi chiamiamo identità di Bianchi. A seguito di ciò l'autore valuta erroneamente il numero delle equazioni fra loro indipendenti cui devono soddisfare i coefficienti di deformazione di un mezzo elastico. La correzione venne pubblicata l'anno dopo in un articolo di Padova, *Sulle deformazioni infinitesime*,[36] in cui compare la seguente nota a piè di pagina: "Il Prof. Ricci mi fa osservare[37] che nel § 5 del lavoro da lui pubblicato tra gli *Studi dedicati*

---

[33] Per maggiori dettagli, si veda Toscano [forthcom].

[34] Ricci Curbastro (1888), 248-250.

[35] Nelle notazioni di Ricci $a_{ih,lj}$ è il tensore di curvatura di Riemann completamente covariante ($= R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ nella notazione moderna).

[36] Padova (1889).

[37] Stando a quanto è riferito da Levi-Civita, si trattò di una comunicazione verbale (Levi-Civita (1925), 208).

dall'Università di Padova a quella di Bologna in occasione dell'VIII Centenario di questa, come applicazione dei metodi ivi proposti furono da lui date delle equazioni (...) dalle quali possono dedursi [quelle] della presente Nota, purché si avverta che i coefficienti $a_{ih,ljk} = a_{ih,lj,k} + a_{ih,jk,l} + a_{ih,kl,j}$ sono identicamente nulli (...)."[38]

Questo è dunque il modo in cui le identità di Bianchi emergono nell'opera di Ricci e compaiono poi esplicitamente nella letteratura scientifica per la prima volta: "poi", scrive Levi-Civita, "vennero dimenticate anche dallo stesso Ricci."[39]

È chiaro che questa affermazione può sembrare alquanto sorprendente a prima vista: come mai la scoperta di nuove identità differenziali soddisfatte dal tensore di Riemann sembra lasciare Ricci così indifferente? Perché, una volta resosi conto del loro carattere di uguaglianze identicamente soddisfatte, Ricci lasciò a Padova il compito di notificare le relazioni trovate, senza peraltro fornirne una dimostrazione? La risposta, a mio avviso, non può che essere una: Ricci trovò queste identità banali, così banali da dimenticarle. Egli non sembra trovare nulla di particolarmente rilevante in queste relazioni, considerate presumibilmente dall'autore come una semplice conseguenza del suo formalismo. D'altra parte, cosa potevano suggerire queste identità a un matematico nel 1889? Dei tre importantissimi significati che oggi sono riconosciuti alle identità di Bianchi, analitico (la derivata prima covariante antisimmetrica del tensore di Riemann si annulla identicamente), fisico (conservazione automatica del tensore energia-impulso della materia) e geometrico ("il contorno del contorno è zero", per cui le identità di Bianchi sono interpretate in termini di trasporto parallelo attorno alle sei facce di un cubo), solo il primo, e questo è un vincolo storico del tutto ovvio, poteva essere chiaro a Ricci. Come poteva questi, nel 1889, prevedere un significato fisico per le identità trovate? Poteva poi intuirne una connotazione geometrica?[40] Nel concludere questo paragrafo, mi limito ad osservare che questa storia sembra ancora una volta confermare l'idea di Thomas Kuhn di ciò che potremmo definire "darwinismo scientifico", per cui spesso nella scienza le conseguenze di certi risultati non possono essere previste da chi questi risultati li ha per primo ottenuti.[41]

4. Le identità di Bianchi nell'opera di Bianchi

Le identità scoperte da Ricci e rese note da Padova nel 1889 non catturarono dunque l'attenzione né di Ricci stesso né degli altri matematici. Queste relazioni emergono dal cuore della ricerca di Ricci di quegli anni, ovvero la costruzione del C.D.A. e le sue possibili applicazioni. Ben diverse sono le modalità di comparsa

[38] Padova (1889), 176.
[39] Levi-Civita (1925), 208.
[40] Si tenga presente che per avere una connotazione geometrica della derivata covariante fu necessario attendere il 1917, anno in cui Levi-Civita (Levi-Civita (1917a)) introdusse la nozione di trasporto parallelo.
[41] Si veda Kuhn (1999), 185-188.

delle identità di Bianchi nell'opera di colui del quale portano il nome. Dopo dodici anni di "letargo", fu un'aula universitaria infatti a tenere a battesimo la "riscoperta" delle identità dimenticate. Nell'ambito del corso di lezioni di Matematiche superiori, tenuto presso l'Università di Pisa nel 1901, Bianchi espose e provò le "sue" identità[42] e le utilizzò per fornire una nuova dimostrazione di un noto e importante teorema (del 1886) del matematico tedesco Friedrich H. Schur,[43] il cui enunciato è: "Se la curvatura riemanniana dello spazio, definito da $ds^2 = \sum_{i,k}^{1,\dots,n} a_{ik}dx_i dx_k$, è costante attorno ad ogni singolo punto in qualunque orientazione, essa non può variare nemmeno da punto a punto, cioè lo spazio è a curvatura assolutamente costante." Questi risultati furono pubblicati l'anno successivo nella memoria *Sui simboli a quattro indici e sulla curvatura di Riemann.*[44] Si tratta di un intervento dunque che trae origine sostanzialmente da considerazioni didattiche, o meglio, didattiche-culturali. Bianchi si serve delle identità come "lemma" per fornire, del teorema di Schur, una dimostrazione puramente analitica, alternativa a quella originale di Schur, il quale, procedendo per via geometrica, aveva utilizzato speciali proprietà delle superfici geodetiche. Bianchi ottiene così una dimostrazione molto semplice, sicuramente molto efficace da un punto di vista didattico. Dimostrando per altra via un già ben noto teorema, e servendosi per questo di identità ritenute in quel momento "inedite", Bianchi lascia comunque la sua impronta originale. Questo contributo fa parte di un impegno fondamentalmente didattico-culturale, poiché deve essere a mio avviso inquadrato nell'ambito di una vera e propria operazione culturale compiuta da Bianchi riguardo alla geometria di Riemann: Bianchi è stato infatti uno dei pochissimi matematici di fine Ottocento, e non solo nel contesto italiano, a presentare in modo organico questa disciplina nei suoi libri di testo.[45] Tutta l'attività didattica di Bianchi fu peraltro accompagnata da una intensa e infaticabile attività trattatistica; questo aspetto è ben lungi dal dover essere considerato secondario nella vita scientifica del matematico emiliano. Bianchi dotò la letteratura matematica dell'epoca di importanti e apprezzati trattati su cui si formarono i matematici italiani di due generazioni. Fra essi, il più noto e più importante è costituito da quelle *Lezioni di Geometria Differenziale*[46] che, insieme alle *Leçons sur la théorie générale des surfaces* di Gaston Darboux, costituirono per lungo tempo il punto di riferimento negli studi di questa disciplina. Nelle *Lezioni*, insieme alla trattazione degli argomenti classici della geometria differenziale gaussiana, è coordinata anche buona parte delle ricerche personali di Bianchi. Nella

---

42 Fu lo stesso Bianchi a renderlo noto in Bianchi (1902), 140.
43 Schur (1886).
44 Bianchi (1902).
45 Si veda in proposito Reich (1989), 294.
46 Bianchi (1923). Vale la pena ricordare che proprio in tale testo compare per la prima volta l'espressione «geometria differenziale».

prima edizione tedesca, del 1899, Bianchi aggiunse due capitoli sulla geometria riemanniana a n dimensioni.[47] Questa disciplina non era all'epoca, a causa della sua presunta mancanza di chiarezza, compresa fra gli argomenti "ortodossi" della geometria differenziale, tanto più che, nonostante i contributi, fra gli altri, di Christoffel, Beltrami, Schur, Ricci e Bianchi, il suo sviluppo a cavallo dei due secoli fu "alquanto sonnolento".[48]

I lavori originali di Bianchi in questo campo sono senza dubbio assai rilevanti, ma altrettanto rilevante è l'operazione culturale che egli compì con le varie edizioni del suo libro di testo; in un periodo in cui, nella comunità matematica, la geometria di Riemann non era affatto "di moda" e lasciava i più decisamente dubbiosi, Bianchi si cimentò in una presentazione sistematica dei principali risultati, cercando nel contempo di conferire loro, con la sua impronta talvolta originale, il massimo della chiarezza. Il testo di Bianchi rappresenta in tal senso un'eccezione nel panorama della trattatistica matematica del tempo.

La seconda edizione italiana delle *Lezioni* fu pubblicata in tre volumi nel 1902, 1903 e 1909 rispettivamente. E' in questa seconda edizione italiana che non manca stavolta una dettagliata rappresentazione della geometria riemanniana; nel primo volume, la cui pubblicazione è praticamente contemporanea di quella della memoria *Sui simboli a quattro indici e sulla curvatura di Riemann*, compaiono le identità di Bianchi e la dimostrazione, attraverso il loro impiego, del teorema di Schur.[49] La seconda edizione tedesca è del 1910 e non è uguale alla seconda edizione italiana: fra i 24 capitoli mancano infatti quelli sulla teoria di Riemann. Si tratta di un fatto molto interessante: non essendo stata rinnovata, nella seconda edizione tedesca, la parte riguardante la geometria riemanniana, in tale edizione non compaiono le identità di Bianchi. Queste in effetti rimasero assenti nella letteratura scientifica tedesca dei primi due decenni del secolo scorso,[50] dunque sembra chiarirsi il motivo per cui Einstein (come pure altri eminenti studiosi quali David Hilbert e Felix Klein) non le conoscesse quando, nel 1915, diede la formulazione definitiva della relatività generale.[51]

Ma vediamo ora come Bianchi introduce le identità che ne hanno immortalato il nome.[52] Dopo aver richiamato i simboli di Christoffel di prima e di seconda specie e

---

[47] Bianchi (1923), prima edizione tedesca, 563-599 e 600-640.

[48] Si veda Blaschke (1954), 49.

[49] Bianchi (1923), seconda edizione, vol. 1, 351.

[50] Si veda Torretti (1995), 322.

[51] Si vedano le Conclusioni della presente relazione.

[52] Bianchi presenta i contenuti dell'articolo del 1902 con le seguenti parole: "Sono ben note le identità algebriche fra i simboli di Riemann a quattro indici, nella teoria delle forme differenziali quadratiche. Non sembra invece che siano ancora state osservate le identità differenziali che li legano ai simboli di Christoffel a tre indici, di cui tratto nella seguente Nota." (Bianchi (1902), 140). Sulla buona fede di Bianchi nel fare quest'ultima affermazione non credo davvero che sia il caso di congetturare: vorrei solo ricordare come si espresse in proposito Ricci nel 1924: "Queste relazioni

il tensore di curvatura di Riemann,[53] l'autore mostra le identità che si accinge a dimostrare:

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(rk,ih)+\frac{\partial}{\partial x_i}(rk,hl)+\frac{\partial}{\partial x_h}(rk,li)=\sum_t^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} ri \\ t \end{Bmatrix}(kt,lh)+\sum_t^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} rh \\ t \end{Bmatrix}(kt,il)+$$
$$+\sum_t^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} rl \\ t \end{Bmatrix}(kt,hi)+\sum_t^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} ki \\ t \end{Bmatrix}(rt,hl)+\sum_t^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} kh \\ t \end{Bmatrix}(rt,li)+\sum_t^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} kl \\ t \end{Bmatrix}(rt,ih) \qquad (4.1)$$

Ora seguiamo attentamente il passo seguente: "Si possono porre le identità precedenti sotto un'altra forma, introducendo con Christoffel simboli a cinque indici (rk,ihl) colla formola:

$$(rk,ihl)=\frac{\partial}{\partial x_l}(rk,ih)-\sum_t^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} lr \\ t \end{Bmatrix}(tk,ih)-\sum_t^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} lk \\ t \end{Bmatrix}(rt,ih)-\sum_t^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} li \\ t \end{Bmatrix}(rk,th)-\sum_t^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} lh \\ t \end{Bmatrix}(rk,it)\text{'}$$ ossia,

come si esprime il Ricci, formando le derivate covarianti dei simboli Riemanniani, allora la [(4.1)] può scriversi sotto la forma equivalente: $(rk,ihl)+(rk,hli)+(rk,lih)=0$".[54] Si tratta di un passaggio molto significativo, al quale l'autore fa seguire una dimostrazione delle identità in questione mediante calcolo diretto, elementare ma nel contempo macchinoso e, se vogliamo, "innaturale" (si ricordino le parole di Finikoff citate nel secondo capitolo della presente relazione).[55] Tutto questo rappresenta a mio avviso la sintesi perfetta dell'indifferenza di Bianchi nei confronti dei metodi di Ricci. Bianchi cita sì Ricci e l'algoritmo della derivata covariante (sembra peraltro che Ricci venga citato solo per aver introdotto una particolare terminologia ad un procedimento di Christoffel, quando sappiamo bene che fu lo stesso Ricci a cogliere l'importanza e la potenza di tale strumento per scrivere le equazioni della geometria e della fisica in termini invariantivi) ma in realtà non lo usa e dunque non ne sfrutta le potenzialità, mettendo così in ombra il carattere di relazioni generalmente covarianti che le identità dimostrate possiedono. Di fatto, le identità di Bianchi perdono ogni aspetto

furono da me comunicate al compianto Prof. Ernesto Padova, che le fece conoscere in una Nota: *Sulle deformazioni infinitesime* (...) Il Prof. Bianchi, che non avvertì la cosa perché confinata in una postilla in margine alla suddetta Nota, giunse per suo conto alle stesse relazioni (...)." (Ricci Curbastro (1924), 432).

[53] Questi sono rispettivamente: $\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{il}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i}-\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}\right)$, $\begin{Bmatrix} ik \\ \lambda \end{Bmatrix}=\sum_l^{1\ldots n} A_{\lambda l}\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix}$, ove $A_{\lambda l}$ rappresenta il "reciproco" del tensore metrico $a_{\lambda l}$, $(rk,ih)=\frac{\partial}{\partial x_h}\begin{bmatrix} ri \\ k \end{bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x_i}\begin{bmatrix} rh \\ k \end{bmatrix}+\sum_{\lambda,\mu}^{1\ldots n}A_{\lambda\mu}\left\{\begin{bmatrix} rh \\ \lambda \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} ik \\ \mu \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ri \\ \mu \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} hk \\ \mu \end{bmatrix}\right\}$.

[54] Bianchi (1902), 141-142.

[55] Per una analisi più dettagliata, si veda Toscano [forthcom].

artificioso e acquistano una chiara connotazione analitica e geometrica (nonché il loro ben noto e importantissimo significato fisico) solo se viste alla luce del calcolo di Ricci, del quale, sebbene portino il nome del suo più intransigente oppositore, costituiscono oggi un fondamentale risultato. Nessun testo moderno di relatività o di geometria differenziale dimostra le identità di Bianchi tramite calcolo diretto.[56] Va comunque riconosciuto a Bianchi il merito di averle per primo messe in evidenza e di non aver esitato a definirle, in tempi non sospetti, formule "per sé notevoli"[57] (quasi avesse intuito in esse un contenuto, quanto meno geometrico, ancora da svelare). Dopo l'articolo del 1902 il matematico parmense non tornò più sulle "sue" identità. Curiosamente queste comparvero l'anno successivo in un lavoro su varie questioni di geometria differenziale proprio di Ricci, il quale peraltro non esitò ad attribuirle a Bianchi.[58] Questo più che un atto di modestia pare confermare l'affermazione di Levi-Civita, che ho riportato nel paragrafo precedente, secondo la quale Ricci aveva dimenticato le identità da lui trovate tredici anni prima di Bianchi.

5. Conclusioni

Le identità di Bianchi, scoperte da Ricci nel 1888, riscoperte e poste in evidenza da Bianchi nel 1901, rimasero sostanzialmente inutilizzate (ma soprattutto sconosciute) fino al 1917, anno in cui vennero introdotte nella relatività generale da Levi-Civita nella sua prima memoria dedicata a questo campo di studi.[59] A partire da questo lavoro, il matematico padovano svolse per lungo tempo intense e importanti ricerche sulla relatività generale, dandone una personale formulazione e ponendosi sempre come obiettivo prioritario quello di chiarire e di semplificare i procedimenti deduttivi della teoria, unitamente alla costante ricerca del massimo rigore formale.[60] E proprio nel mostrare limpidamente come la legge di conservazione per il tensore energia-impulso della materia possa essere dedotta dalle identità di Bianchi, Levi-Civita, col suo primo contributo originale nella sua prima memoria propriamente relativistica, compì il primo, importantissimo passo nell'ambito di quel programma di ricerca di semplicità unita al rigore matematico a cui ho appena accennato.[61]

---

56 Oggi è ben noto che le identità di Bianchi possono essere facilmente ricavate sfruttando il fatto che la derivata covariante del tensore di Riemann è a sua volta un tensore covariante. Si veda, ad es., Weinberg (1972), 146-147.

57 Bianchi (1902), 140.

58 Ricci Curbastro (1903), 302.

59 Levi-Civita (1917b). È da sottolineare il fatto importante che proprio con questa memoria venne presentata per la prima volta in Italia la versione finale della relatività generale. Si veda Pastrone (1998), 461.

60 Sui contributi di Levi-Civita alla relatività generale, si veda Cattani (1994) e Pastrone (1998), 460-466.

61 La paternità di questo risultato (sottolineata, per es., in Galletto (1980), 153-172) è stata peraltro quasi completamente dimenticata in tempi recenti (Pastrone (1998), nota 47, 488).

Come è noto, nel Novembre del 1915 Einstein[62] aveva formulato le corrette equazioni del campo gravitazionale in presenza di una distribuzione di materia:

$$R_{\mu\nu} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \tag{5.1}$$

dove $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico, $R_{\mu\nu}$ è il tensore di Ricci, $\kappa = 8\pi G / c^4$ (dove G è la costante di Newton e c la velocità della luce nel vuoto), $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia-impulso della materia e $T \equiv T^{\mu}_{\mu}$ è la sua traccia. Dalla (5.1) si può ottenere, tramite innalzamento degli indici:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -\kappa T^{\mu\nu} \tag{5.2}$$

Ebbene, è ben noto che, nel 1915, Einstein non conosceva le identità di Bianchi[63] e tantomeno le identità di Bianchi contratte:

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)_{;\nu} = 0 \tag{5.3}$$

e non si rese quindi conto che la conservazione dell'energia-impulso, $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$, consegue automaticamente dalle equazioni (5.2) e (5.3). E' molto importante sottolineare il fatto, storicamente fondamentale, che, non conoscendo le identità di Bianchi, Einstein aveva seguito il cammino inverso rispetto a quello appena mostrato: nella memoria del 1915 il principio di conservazione dell'energia-impulso viene usato come un vincolo imposto alla teoria, e dunque non appare come automatica conseguenza della covarianza generale. Nell'Ottobre del 1916 Einstein ritornò sulla conservazione dell'energia-impulso; questa volta il grande fisico tedesco diede una dimostrazione generale secondo la quale, per ogni lagrangiana materiale L, il tensore $T^{\mu\nu}$ soddisfa le relazioni $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ come conseguenza delle equazioni del campo gravitazionale.[64] Di lì a poco Levi-Civita doveva tuttavia mostrare come questo principio di conservazione si possa dedurre in modo più semplice e diretto. Partendo dalle identità di Bianchi, attraverso successive contrazioni degli indici Levi-Civita derivò, per la prima volta, la loro forma contratta (5.3).[65] Non ebbe così difficoltà a mostrare che tali identità di Bianchi contratte

[62] Einstein (1915).
[63] Si veda Pais (1991), 278-79.
[64] Einstein (1916).
[65] Levi-Civita (1917b), 54-55.

giustificavano il tensore gravitazionale di Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ quale primo membro delle equazioni di campo (5.2), con gli indici in alto naturalmente, in quanto tensore a quadridivergenza covariante nulla.

Vorrei concludere la presente relazione con una riflessione di carattere epistemologico. Oggi le identità di Bianchi occupano un posto di primo piano in ogni trattato di geometria differenziale e di relatività generale, ma non è sempre stato così. Scoperte per la prima volta da Ricci nel 1888 e rapidamente dimenticate anche dallo stesso autore, esse furono riscoperte e dimostrate da Bianchi tredici anni dopo; e comunque, seppur poste in evidenza questa volta da uno dei più prestigiosi matematici del tempo, le identità rimasero per lungo tempo sconosciute e inutilizzate. Questo fatto appare peraltro strettamente legato al progressivo calo di interesse che la geometria riemanniana andava registrando all'inizio del XX secolo. Anche considerando la fama di Bianchi, non si può certo dire che, all'epoca della loro comparsa nella sua opera, le omonime identità fossero considerate uno dei più rilevanti contributi del grande geometra italiano.[66] Ma poi, con l'affermarsi della teoria fisica della relatività generale, e di un nuovo conseguente paradigma storico, queste relazioni matematiche mostrarono di possedere un fondamentale significato fisico che, è evidente, non poteva essere contemplato al momento (o ai momenti) della loro scoperta. Così, per queste ragioni, le identità di Bianchi costituiscono un particolare ed esemplare caso di quella che Salomon Bochner chiama "matematica prefabbricata",[67] ovvero di una matematica che è stata costruita prima della teoria fisica in cui viene usata: un risultato matematico del passato (una semplice relazione come, per l'appunto, le identità di Bianchi, o una intera teoria come, per esempio, lo stesso C.D.A. di Ricci), apparentemente privo di sostanziali conseguenze nel momento e nel contesto in cui viene ottenuto, diventa nel presente, con un avvenuto cambiamento del paradigma storico, un risultato fondamentale, ricco magari di contenuti fisici fino a prima impensabili.

Il modo in cui oggi vengono dedotte le equazioni gravitazionali di Einstein nei testi di relatività è quello, reso classico dall'approccio di Levi-Civita, che fa ricorso alle "vecchie" identità trovate da Ricci e da Bianchi.

Bibliografia

Beltrami, E. (1886): "Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell". *Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna* (4), 7, 1-38

Beltrami, E. (1889): "Relazione sul concorso al premio Reale per la Matematica per l'anno 1887". *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei* (4), 5, 300-307.

[66] Si veda Mehra (1974), nota 242, 78.

[67] Bochner (1966), 42-45. Si veda anche Boniolo (1995), 328.

Bianchi, L. *Opere*, 11 vols. 1952-1959. Edizioni Cremonese, Roma.

Bianchi, L. (1897): "Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti". *Memorie della Società Italiana delle Scienze* (3), 11, 267-352. In *Opere*, IX, 16-109.

Bianchi, L. (1902): "Sui simboli a quattro indici e sulla curvatura di Riemann". *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei* (5), 11, 3-7. In *Opere*, IX, 140-144.

Bianchi, L. (1904): "Relazione sul concorso al Premio Reale, del 1901, per la Matematica". *Atti della R. Accademia del Lincei. Rendiconto dell'adunanza solenne del 5 Giugno 1904*, 142-151.

Bianchi, L. (1910): "Vita ed opera scientifica di Julius Weingarten". *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei* (5), 19, 470-477. In *Opere*, I (parte seconda), 217-225.

Bianchi, L. (1916): "Sugli spazi normali a tre dimensioni colle curvature principali costanti". *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei* (5), 25, 59-68. In *Opere*, IX, 215-224.

Bianchi, L. (1922a): "Le reti di Tchebychef sulle superficie ed il parallelismo nel senso di Levi-Civita". *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 1, 1-6. In *Opere*, X, 37-42.

Bianchi, L. (1922b): "Sul parallelismo vincolato di Levi-Civita nella metrica degli spazi curvi". *Rendiconti dell'Accademia di Napoli* (3), 28, 150-171. In *Opere*, X, 43-64.

Bianchi, L. (1923): *Lezioni di Geometria Differenziale*, 2 vols. (1922, 1923). Spoerri-Zanichelli, Pisa and Bologna. Edizione litografica, 1886. Nistri, Pisa. Prima edizione, 1894. Spoerri, Pisa. Seconda edizione, 3 vols. (1902, 1903, 1909). Spoerri, Pisa. Prima edizione tedesca (traduzione di Max Lukat), 1899: *Vorlesungen über Differentialgeometrie*. Teubner, Leipzig. Seconda edizione tedesca (traduzione di Max Lukat), 1910. Teubner, Leipzig and Berlin.

Blaschke, W. (1954): "Luigi Bianchi e la geometria differenziale". *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* (3), 8, 43-52.

Bochner, S. (1966): *The role of mathematics in the rise of science*. Princeton University Press, Princeton.

Boniolo, G. (1995): "La matematica nella fisica: segno o miracolo?-contra E. Wigner". *Epstemologia* (18), 2, 313-339.

Cattani, C. (1994): "Early debates on General Relativity in Italy". *Proceedings of the Tenth Italian Conference on General Relativity and Gravitational Physics*. World Scientific, Singapore, 93-110.

Dell'Aglio, L. (1996): "On the genesis of the concept of covariant derivation". *Revue d'Histoire des Mathématiques* 2, 215-264.

Dell'Aglio, L. (1997): "Sul concetto di tensore in Ricci Curbastro". *Bollettino di storia delle scienze matematiche* (XVII), 1, 13-49.

Einstein, A. (1915): "Feldgleichungen der Gravitation". *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, 25 November, 844-847.

Einstein, A. (1916): "Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie". *Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, Sitzungberichte*, 1111-1116.

Fubini, G. (1929): "Luigi Bianchi e la sua opera scientifica". *Annali di Matematica pura ed applicata* (4), 6, 45-83. In Bianchi, *Opere*, I, 35-73.

Galletto, D. (1980): *I rapporti di Einstein con la Scuola matematica italiana: Ricci Curbastro, Bianchi, Levi-Civita*. In Libertini, F. R. & Conte, A. & Rasetti, M. (1980): *Sette lezioni su Einstein*. Stampatori didattica, Torino, 153-190.

Kuhn, T. S. (1999): *La struttura delle rivoluzioni scientifiche*. Einaudi, Torino. Prima ed. originale, 1962.

Levi-Civita, T. *Opere*, 5 vols. 1954-1970. Zanichelli, Bologna.

Levi-Civita, T. (1917a): "Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana". *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, XLII, 173-215. In *Opere*, IV, 1-39.

Levi-Civita, T. (1917b): "Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein". *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei* (5), 26, 381-391. In *Opere*, IV, 47-58.

Levi-Civita, T. (1925): *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*. Stock, Roma.

Mehra, J. (1974): *Einstein, Hilbert, and the Theory of Gravitation*. D. Reidel Publishing Company, Boston.

Padova, E. (1888): "Sull'uso delle coordinate curvilinee in alcuni problemi della teoria matematica dell'elasticità". *Studi editi dalla Università di Padova a commemorare l'ottavo centenario della origine della Università di Bologna*, vol. III, Tipografia del Seminario, Padova, 3-30.

Padova, E. (1889a); "Sulle deformazioni infinitesime". *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei* (4), 5, 174-178.

Pais, A. (1991): *«Sottile è il Signore...»*. Boringhieri, Torino. Prima ed. originale, 1982.

Pastrone, F. (1998): "Fisica Matematica e Meccanica Razionale". In Di Sieno, S. & Guerraggio, A. & Nastasi, P. (eds.) (1998): *La Matematica Italiana dopo l'Unità*. Marcos y Marcos, Milano, 381-504.

Reich, K. (1989): "Das Eindringen des Vektorkalküls in die Differentialgeometrie". *Archive for history of exact sciences* (40), 3, 275-303.

Reich, K. (1994): *Die Entwicklung des Tensorkalküls. Von absoluten Differentialkalkül zur Relativitätstheorie*. Birkhäuser Verlag, Basel.

Ricci Curbastro, G. *Opere*, 2 vols. 1956-1957. Edizioni Cremonese, Roma.

Ricci Curbastro, G. (1887): "Sulla derivazione covariante ad una forma quadratica differenziale". *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei* (4), 3, 15-18. In *Opere*, I, 199-203.

Ricci Curbastro, G. (1888): "Delle derivazioni covarianti e controvarianti e del loro uso nella Analisi applicata". In *Studi editi dalla Università di Padova a commemorare l'ottavo centenario della origine della Università di Bologna*, vol. III, 3-23. Tipografia del Seminario, Padova. In *Opere*, I, 245-267.

Ricci Curbastro, G. (1892): "Résumé de quelques travaux sur les systèmes variables de fonctions associés à une forme différentielle quadratique". *Bulletin des Sciences Mathématiques* (2), 16, 167-189. In *Opere*, I, 288-310.

Ricci Curbastro, G. (1898): *Lezioni sulla teoria delle superficie*. Drucker, Padova.

Ricci Curbastro, G. & Levi-Civita, T. (1900): "Méthodes de Calcul différentiel absolu et leurs applications". *Mathematische Annalen*, 54, 125-201. In Ricci Curbastro, *Opere*, II, 185-271.
Ricci Curbastro, G. (1903): "Sulle superficie geodetiche in una varietà qualunque e in particolare nelle varietà a tre dimensioni". *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei* (5), 12, 409-420. In *Opere*, II, 301-314.
Ricci Curbastro, G. (1924): "Sulle varietà a invarianti principali eguali". *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei* (5), 33, 3-4. In *Opere*, II, 431-433.
Sansone, G. (1977): *Algebristi, analisti, geometri differenzialisti, meccanici e fisici-matematici ex normalisti del periodo 1860-1929*. Scuola Normale di Pisa, Pisa.
Schur, F. H. (1886): "Ueber den Zusammenhang der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses mit den projectiven Räumen". *Mathematische Annalen*, 27, 537-567.
Scorza, G. (1930): "In memoria di Luigi Bianchi". *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* (1), 16, p. 27. In Bianchi, *Opere*, I, 19-34.
Speziali, P. (1981): "Ricci Curbastro, Gregorio". In *Dictionary of scientific biography*, vol. 11, 406-411. Charles Scribner's Sons, New York.
Tazzioli, R. (1993): "Ether and theory of elasticity in Beltrami's work". *Archive for history of exact sciences*, 46, 1-37.
Torretti, R. (1995): *Relativity and geometry*. Dover, New York.
Toscano, F. [forthcom]: "Bianchi, Ricci and the discovery of the Bianchi identities". *Preprint.*
Vincensini, P. (1957): "Vue d'ensemble sur l'oeuvre géométrique de Luigi Bianchi". *Università e Politecnico di Torino, Rendiconti del Seminario Matematico*, 16, 115-157.
Vincensini, P. (1972): "La géometrie différentielle au XIX siècle". *Scientia*, 107, 617-660.
Weinberg, S. (1972): *Gravitation and cosmology*. J. Wiley and Sons, New York.