I problemi della fisica e dello spazio in alcuni matematici italiani della fine dell'Ottocento

Giovanni Acocella

Sommario

Anche per il contributo non secondario alla fondazione della Relatività è importante studiare, nell'ambito delle conoscenze matematiche, la riflessione critica che portò, nel XIX secolo, alla nascita di nuove idee sullo spazio e sulle geometrie.

Dopo il necessario riferimento ai lavori di Gauss, Lobacevskji, Bolyai e Riemann, vanno segnalati gli elementi essenziali della critica al concetto di spazio di Mach e Poincaré, per l'influenza, che esercitarono in Europa e in Italia

Per l'alta qualità delle nostre scuole matematiche e per il ruolo che esse rivestivano nella società e nello stesso sistema politico è importante studiare la partecipazione attiva degli italiani al discorso in questione. Per un esempio della profondità delle riflessioni e del grado di elaborazione ci riferiamo al pensiero di due matematici, attraverso due loro magistrali prolusioni: quella del prof. Enrico D'Ovidio all'Università di Torino nel 1889 e l'altra del prof. Alfonso Del Re in quella di Modena nel 1896. (Da sottolineare che il prof. Del Re insegnò a lungo fino alla scomparsa, nell'Ateneo napoletano). Esse avvengono nel contesto seguente: Mach, qualche anno prima, aveva dato alle stampe la sua "Meccanica "; tra le due prolusioni uscirono importanti pubblicazioni di Poincaré.

Premessa

La critica e l'analisi del concetto di spazio, nella prima e, soprattutto, nella seconda metà dell'Ottocento, hanno contribuito in modo determinante alla fondazione dei principi della fisica contemporanea e, in particolare, della Relatività.

Solo per brevità non mi dilungherò sui contributi, puntualmente sintetizzati dagli studiosi di storia delle scienze; rinviando, ove fosse necessario, alle opere e alle pagine citate in fondo.

Mi limito a rilevare che il problema è stato oggetto di attenzione da parte degli scienziati naturali, in particolare dei fisici, ma anche dei matematici di diverse specializzazioni.

E' chiaro l'intento di allargare l'orizzonte, anche alle metriche, fra i secondi, e di descrivere adeguatamente e compiutamente i fenomeni, da parte di fisici e di naturalisti.

1. Le concezioni della geometria e dello spazio nelle prolusioni di due matematici italiani: Enrico D'Ovidio e Alfonso Del Re[1]

Ho scelto due prolusioni significative per mettere in luce i rapporti tra i matematici italiani e quelli europei della stessa epoca. Il carattere di tali lavori è tale da consentirci di cogliere lo stato degli studi e della ricerca in questo periodo.

La prima è svolta a Torino nel 1889 e la seconda a Modena nel 1896. I due professori italiani non erano distanti culturalmente. Si conoscevano e si frequentavano.

Se Mach aveva pubblicato la sua *"Meccanica"* prima di entrambe, Poincaré, come vedremo più avanti, pubblica scritti importanti sulla relazione tra spazio fisico e spazio geometrico proprio a cavallo fra le due. I documenti danno anche la misura dell'influsso esercitato dal pensatore francese.

Enrico D'Ovidio (1843-1933) e Alfonso Maria Del Re (1859-1922) erano due studiosi di geometria, che insegnarono a lungo, il primo nell'Ateneo torinese e il secondo in quello partenopeo.

Il prof. Del Re nella prolusione svolta all'apertura dell'Anno Accademico 1896-97 nell'Università di Modena affronta dal vivo e con rigorosa attualità i temi che costituivano l'oggetto delle speculazioni di quel periodo, tra i matematici, i fisici e i pensatori europei. Il suo ruolo non era marginale tra i matematici italiani: Giuseppe Peano lo designerà, infatti nel 1913, come successore, nella direzione di quella *Rivista di matematica*, da lui stesso fondata.

E il prof. Enrico D'Ovidio, di cui leggeremo il Discorso del 1889 sui temi della matematica pura e del suo sviluppo, avrebbe annoverato, per un certo periodo, lo stesso Peano, tra i suoi allievi, e poi, fra i suoi assistenti.

2. La prolusione di Torino

E' oltremodo interessante rileggere, nelle parti che riguardano la geometria e lo spazio, la prolusione con la quale il prof. Enrico D'Ovidio inaugura l'Anno Accademico 1889-90 nella Regia Università di Torino [2]. Le considerazioni in essa

---

[1] Note su questi due matematici si possono ricavare per D'Ovidio nel vol. 41 del *Dizionario biografico degli Autori* dell'Istituto per l'Enciclopedia Italiana (Roma 1992) pagg. (582-584) e per Del Re nelle pagg. (259-260) del vol. 30 del medesimo (Roma 1990), in cui si legge, a cura di F.S. Rossi: *"Egli precorse in termini generali la teoria relativistica, affrontando con padronanza argomenti che furono poi sviluppati da Albert Einstein"*.

[2] Il Discorso (d'ora in poi EdO) fu letto il 4 novembre1889 in occasione della solenne apertura degli studi nella Regia Università di Torino. Il titolo è: *Sulla origine e sullo sviluppo della matematica pura* (Raccolta Battaglini presso l'Istituto di analisi superiore dell'Università Federico II di Napoli). Su entrambi gli autori

contenute possono darci un'idea del grado e del livello di partecipazione di uno dei matematici italiani più prestigiosi al processo di formazione e di acquisizione di nuovi concetti, nel campo delle geometrie non euclidee e nella formulazione delle nuove teorie dello spazio.

La prima parte, nel clima proprio della celebrazione, che caratterizza i momenti di solennità, indulge un poco alla esaltazione della disciplina e fornisce solo un abbozzo approssimato delle problematiche e delle posizioni, che risulteranno meglio definite nei passaggi successivi.

Al di là dell'occasione in cui viene pronunciato, il discorso, l'elogio della disciplina è naturale e quasi scontato in chi la coltiva con tanta passione e con esiti lusinghieri: il contesto, per giunta, è di particolare rigoglio degli studi matematici, per il loro sviluppo eccezionale, per il contributo offerto da questi al progresso delle altre scienze, per le applicazioni sempre più sorprendenti, per la florida salute della scuola italiana in quello stesso periodo. E' un lungo "peana", che utilizza riferimenti fisici e indulge, talvolta, ad una retorica piacevole e suggestiva.

Ogni conquista del pensiero matematico, egli afferma, *potrà avere una diversa sistemazione , ma non* sarà mai infirmata. *L'ultima parola di ogni teoria della fisica è una formula o un enunciato matematico*

Sull'utilità della matematica egli cita il caso delle perturbazioni del moto di Urano, che costituirono una sorta di *fonte misteriosa della scoperta poi annunciata* del pianeta Nettuno. Questa avvenne effettivamente nella notte del 23 settembre del 1845, confermando una teoria puramente matematica [3].

L'autore si abbandona un tantino alla retorica quando riporta il proclama napoleonico: *"l'avancement et le perfectionnement des mathématiques ont liés à la prospérité de l'Etat".*

Aggiunge poi, con una dose di motivato ottimismo, che *"ciò che oggi sembra per avventura puro e sterile lusso di teorie, può diventare sorgente di imprevedute applicazioni importantissime"*[4].

---

citati si possono consultare, per Del Re la pag. 44 e per D'Ovidio le pagg. 47-48 del volume di Francesco Tricomi: *Matematici italiani del primo secolo dello Stato unitario* (Accademia delle Scienze di Torino 1962). In esse si riconosce a D'Ovidio il merito di *aver posto le basi, su cui qualche tempo dopo, per opera prevalente di C. Segre, che fu suo allievo, fu fondata la maggiore Scuola geometrica italiana.*

[3] Il riferimento (EdO pag. 34) è all'esperimento di Galle, berlinese, che trovò il pianeta Nettuno a 2500 milioni di miglia dal Sole nel luogo indicatogli dal Leverrier, sulla scorta della teoria newtoniana, puntando il telescopio nella notte del 23 settembre 1845.

[4] Per eliminare ogni equivoco sulla necessità di ricadute pratiche della ricerca matematica l'A. precisa (EdO pag.35): *"Tuttavia non vorrei altri credesse che io consideri la pratica utilità come una condizione necessaria perché una scienza possa proclamarsi degna di essere studiata e divulgata".* Cita l'esempio dei

Ma il discorso si inerpica progressivamente lungo sentieri sempre più impegnativi e affronta nel vivo la questione del rapporto tra matematica ed esperienza, tra teoria e mondo fisico, con una chiara presa di posizione. [5]

D'Ovidio dapprima cerca nei sensi quasi una conferma e una legittimazione delle teorie matematiche: *in cotesta loro provenienza, c'è una guarentigia di verità e di utilità.* Poi diventa più ardito e affronta la tematica dello spazio e delle geometrie, attraverso un rigoroso inquadramento delle teorie geometriche nell'ambito più generale di quelle scientifiche.

Alla base c'è una rigorosa impostazione deterministica dei fatti del mondo fisico e morale. *"Tutto ciò che accade nel mondo fisico e morale deve avere un perché, anzi una necessità; deve quindi obbedire ad una legge".* Di qui nasce la fiducia che l'affinamento dello strumento matematico renderà possibile la lettura di tanti fenomeni. [6]

Dopo un interessante passaggio, peraltro, ancora attuale, sulla scuola e sul processo educativo [7] e dopo aver spezzato una lancia a favore della logica deduttiva

---

geometri greci che *"credevano la terra piana ed immobile, allorché studiavano con tanto amore le curve dette sezioni coniche,....., non potevano menomamente prevedere che, molti secoli dopo, Keplero avrebbe ravvisato la forma ellittica delle curve che i pianeti descrivono attorno al sole"* (EdO pag. 35)

[5] Sulla genesi delle teorie matematiche mette a raffronto Hamilton e D'Alembert, fautori della tesi che la *matematica è scienza di puro ragionamento* con le opinioni di Stuart Mill, che sostiene che *" le verità matematiche, specie quelle geometriche, riposano sulla esperienza".* Condivide le tesi di Riemann e di Clifford , alimentando lo storico dibattito, che non ha dato sinora risposte definitive, sulla genesi e sulla natura delle conoscenze matematiche (EdO pag.36)

[6] Tra i matematici e i fisici dell'epoca era molto avvertita .l'esigenza di una correzione delle orbite planetarie per *la mutua azione perturbatrice dei corpi celesti* (EdO pag. 43). D'Ovidio si chiede: *E se la legge di Newton fosse soltanto l'approssimazione della legge vera come la somma di una serie differisce dalla somma finita dei termini della medesima?* Conclude, naturalmente, con un atto di fiducia, sul perfezionamento definito della scienza (EdO pag. 43).

[7] Vuole in certo senso "rassicurare coloro, i quali si sgomentano pensando che ogni giorno vada crescendo il numero delle cognizioni che i giovani debbo apprendere nelle scuole e temono che verrà pure il tempo in cui gli uomini saranno costretti a sedere nei banchi degli scolari fino alla vecchiaia, se pure il sovraccarico intellettuale non li avrà resi pazzi o non li avrà uccisi giovani. E non parlo poi di certi padri, i quali altro non vedono nella scuola che una tirannia dello Stato intento a ritardare pei loro figlioli il giorno del lucro. Costoro forse pretenderebbero che il Governo facesse con loro come Giamblico racconta che fece Pitagora con un giovane manovale; al quale volle insegnare l'aritmetica e la geometria, dandogli

(alla quale anche Del Re offrirà un tributo importante, come autore di un corso specifico, raro all'epoca, ma originale ed apprezzato [8]) afferma senza equivoci che *"si è costruita una scienza, se si ammette un gruppo di postulati che si considerano primordiali"* sotto le due condizioni *"che siano i più chiari possibili e che nessuno sia conseguenza degli altri"*. Sulla scelta di questi *l'uomo si lascia guidare dall'esperienza.* Ai fini dell'utilità pratica sta bene *tenere conto dei fatti naturali, ma ciò non ha importanza dal punto di vista scientifico.*

Per valutare la consistenza di una affermazione egli propone una impostazione anticipatrice di future teorie: *"La valutazione dei fondamenti è verificata con il metodo della falsificazione"*, (e cita le disavventure provocate dalla mancata applicazione di questo metodo nel caso del postulato di Euclide, considerato un *"a priori compatibile con le idee di retta e di piano"*) [9]. Dalle ricerche emerge, infatti, che il postulato sulle parallele non è dimostrabile, che si può ammetterlo o no, senza deviare dalla sana logica; che, anzi, è possibile costruire tre geometrie, tutte

---

inoltre, in premio tre oboli, ossia il prezzo di una giornata di lavoro da manovale, per ogni proposizione da imparare". Quanta attualità in queste riflessioni! (EdO pag. 43)

[8] Alfonso Del Re tenne nel primo decennio un corso molto apprezzato di *Algebra della logica* presso l'Università di Napoli di cui v'è traccia nella Raccolta Battaglini già menzionata.

[9] Con questo presupposto esamina criticamente il lavoro di padre Saccheri, il quale evidenziò le tre conseguenze che potevano scaturire, tutte ugualmente ipotizzabili, ma non si arrestò di fronte ad un assoluto non dimostrato. L'Autore sottolinea la prudenza di Legendre, che si limitò a constatare soltanto una delle conseguenze possibili della non validità del postulato di Euclide. Riporta anche la conclusione di Gauss sulla non indipendenza della dimostrazione sulla somma degli angoli interni di un triangolo dal postulato delle parallele. Alla fine di questi passaggi espone il contenuto sostanziale della "Dissertazione" di Riemann (pubbl. nel 1868 *('67?)* col tit. *Uber die Hypothesen, welche der geometrie zu Grunde liegen* tenuta nel 1854), in base alla quale, dalla illimitatezza dello spazio *"non consegue necessariamente che esso sia pure infinito"*, portando gli esempi della sfera, illimitata, finita e rientrante in se stessa.

Dopo la digressione sul concetto di verità matematica primordiale e sul modo di accedervi, passa a descrivere i passaggi più importanti che hanno consentito il superamento della geometria euclidea e la fondazione delle nuove, da Saccheri a Legendre e Gauss, da Lobacevskji e Bolyai a Riemann, Helmholtz, Klein e Cayley (EdO pag. 47).

Non può sfuggire il costante collegamento del procedere astratto (nel caso delle varietà n multiple) ai casi concreti della realtà fisica.

logicamente esatte, avendo in comune tutto ciò che da quel postulato non dipende. Quale di queste *"si presta ad essere assunta come conforme ai fenomeni naturali?"*

E' il sottofondo di un pensiero costantemente rivolto alla fisica, alle figure concrete (non eliminabili, anche quando si vogliono costruire modelli astratti), che avranno poi una loro logica autonoma, ma che nascono. comunque, da sostanze materiali e palpabili.

Possiamo solo dire che le osservazioni e le misure (anche interplanetarie) *"concordano con la geometria di Euclide"*. Ma anche *"le distanze ... non sono che piccola cosa rispetto alle tante che non riusciremo a misurare! Pensate che il Sole non è che una delle innumerevoli stelle della Via Lattea!"*

D'Ovidio sostiene che *"la questione delle parallele ha potentemente contribuito a suscitare un'altra questione interessantissima, relativamente al concetto di spazio"*: Tale problema non può essere sciolto dai sensi, né dall'immaginazione che non ci consentono, ad esempio, né di affermare, né di respingere l'esistenza di uno spazio a quattro dimensioni. E richiama il caso, illustrato da Helmholtz, degli ipotetici esseri bidimensionali, vincolati a muoversi su una superficie sferica.

Ipotizza quindi un doppio lavoro di *specializzazione* e di *generalizzazione,* passando, nel primo caso, da quelle che in geometria vengono definite *varietà n-ple* a quelle semplici come casi particolari o generalizzando, nel secondo, le questioni sulle linee o sulle superfici o sullo spazio ordinario per passare alle questioni relative alle *varietà n-ple.*

Conclude poi sulla validità della geometria sintetica, che tende a liberare dai calcoli e a ridurre la disciplina a comprensibili operazioni di natura concreta.

Il richiamo alla concretezza dei greci nell'investigare *"le coniche come sezioni prodotte da un piano in un cono circolare retto"* è un modo evidente di *costruire* la geometria astraendo dal concreto. (Sarà ripreso qualche anno dopo da Henri Poincaré).

Il discorso oscilla dialetticamente tra una costante ricerca di riferimenti alla "realtà dei fenomeni", e l'intuizione di una "essenza misteriosa" della matematica, chiamata a spiegare, attraverso la costruzione di teorie astratte, l'arcano di ciò che si svolge attorno a noi.

Si avverte chiaramente, dalla lettura della Prolusione, il peso e l'importanza delle correnti di pensiero che dominarono l'Ottocento. L'idealismo ispira la parte iniziale. La dialettica permanente tra il concreto e l'astratto domina i passaggi che concernono la genesi e la validità delle teorie scientifiche.

Il positivismo interviene soltanto per il rafforzamento della realtà fattuale e nella sua versione di fiducia illimitata nel progresso indefinito dell'attività scientifica ed umana. E' originale l'anticipazione del falsificazionismo in una versione, che non è affatto positivistica, ma più affine alla critica popperiana.

3. Il problema della geometria e dello spazio in Henri Poincaré

Negli anni immediatamente successivi alla prolusione di Torino il filosofo e matematico francese Henri Poincaré pubblica una serie di memorie [10] sullo stato delle conoscenze geometriche ed esprime i suoi punti di vista sul concetto di spazio, sul valore da attribuire alle varie geometrie e sul rapporto di queste con i fatti naturali. Tentiamo di riassumerle.

Poincaré prende le mosse dall'assetto che Beltrami ed Helmholtz avevano dato al cosiddetto "problema delle tre geometrie" di Euclide, Lobacevskij e Riemann.

Sottolinea che esse sono fondate sui tre assiomi (che egli chiama *espliciti*) dell'unicità della retta per due punti, del minimo percorso e dell'esistenza di una, più o nessuna parallela per il punto P ad una retta data. La loro coerenza rientra nel quadro delle superfici a curvatura costante.

Ma egli si chiede se esistono altri assiomi fondanti (che definisce *impliciti*) di geometrie altrettanto coerenti.

Lo fa attraverso l'analisi del concetto di *"definizione"*, facendo notare che l'opinione di Stuart Mill (in base alla quale *"ogni definizione contiene un assioma, poiché, nel definirlo, si afferma implicitamente l'esistenza dell'oggetto definito"*) è in realtà contraddetta dalla prassi del matematico. E' raro infatti che *"si dia una definizione senza farla seguire dalla dimostrazione dell'esistenza dell'oggetto definito"*, anche se questa come *essere matematico* è condizionata soltanto dal principio della non contraddizione [11].

Ma non arriva ad un rifiuto generalizzato dell'opinione del pensatore inglese. Molte definizioni nascono, infatti, da assiomi impliciti. E' il procedimento che consente di definire l'uguaglianza e la stessa nozione di retta.[12]

---

[10] Le considerazioni sono contenute in alcuni lavori originali di Poincaré: *Les géometries non-euclidiennes* da *Revue générale des Sciences pures et appliquées* (d'ora in poi R. g. S. p. a.) t.2 Paris, 15 dicembre 1891 (pagg. 769 - 774) e nella stessa R.g..S.p.a. (t.3 Paris gennaio 1892, pagg. 74 - 75) *Lettre à Mouret*, sintetizzate nel volume *Science et Hypothéses* (tradotto in *La scienza e l'ipotesi,* Dedalo Bari 1989 -d'ora in poi S. et H.)

"La geometria di Riemann a due dimensioni, non differisce dalla geometria sferica, che non è che una branca della geometria generale" (S. et H. pag. 63). La geometria a due dimensioni di Lobacevskij è, anch'essa, secondo Boltzmann *"una semplice branca della geometria generale"*, facendo l'esempio di una figura disegnata su una tela flessibile ed inestensibile applicata ad una superficie: Con lo spostamento della tela sulle superfici a curvatura costante può variare la forma della figura ma restano invariate le linee (S. et H. pag. 63).

[11] (vedi a pag..66 di S. et H.)

[12] Viene assunta, come esempio, la definizione dell'uguaglianza tra figure mediante la sovrapponibilità, nel sottinteso di uno spostamento senza deformazione. Quale

Tra gli assiomi impliciti Poincaré ne individua uno, che, di fatto, restringe il campo delle geometrie alle tre considerate. Negandolo, però, si può costruire una geometria diversa, la quarta, strana quanto si voglia, ma priva di contraddizioni. [13]

Quante geometrie si possono allora costruire? Un teorema di Sophus Lie stabilisce che il numero di queste dipenderà dalle dimensioni dello spazio, se si ammette la possibilità del movimento di una figura invariabile, in evidente contraddizione con Riemann, che lo fa dipendere dal *"modo i cui si definisce la lunghezza di una curva"*. Sembra di potere concludere: infiniti modi, infinite geometrie. [14]

La concretezza a questo punto induce il pensatore francese a rilevare la *"pura analiticità"* delle geometrie fondate su definizioni incompatibili con il movimento di una figura invariabile e si interroga soprattutto sulla natura degli assiomi.

Questi non possono essere giudizi sintetici a priori, perché non ci consentirebbero di concepire alcuna proposizione contraria, con la relativa costruzione teorica. Viene offerto, come esempio di tale categoria di giudizi, quello dell'induzione, largamente usato in matematica. Né gli assiomi possono essere verità sperimentali perché *"non si compiono esperimenti su rette o circonferenze ideali"* e non si può subordinare una scienza esatta alle continue e necessarie approssimazioni, non potendosi può postulare l'esistenza di un solido rigorosamente invariabile.

La conclusione di Poincaré è che gli assiomi hanno una natura convenzionale e la loro scelta è "guidata da fatti sperimentali", ma libera e limitata soltanto dalla necessità di evitare contraddizioni. "Gli assiomi della geometria non sono che

---

senso potrebbe avere per un *"essere che abitasse in un mondo in cui non ci fossero che fluidi?"*. Se ci appare chiaro, afferma P., *"è perché noi siamo abituati alla proprietà dei solidi naturali, che non differiscono molto da quelle dei solidi ideali"*. Della retta può essere data l'unica, vera definizione che segue: *"Può accadere che il movimento di una figura invariabile sia tale per cui tutti i punti di una linea appartenenti a tale figura restano immobili mentre tutti i punti situati al di fuori di questa linea si muovono. Una linea siffatta si chiamerà linea retta"* (S. et H. pag. 67).

[13] *Si consideri una retta AC mobile attorno al punto A e originariamente sovrapposta alla retta fissa AB; la si fa girare fino a quando non divenga un prolungamento della medesima. Supponiamo di accettare la proposizione che tale rotazione o prolungamento sono possibili e di sapere che possono continuare fino a che le rette divengano l'una il prolungamento dell'altra. Ne deriverà una serie di strani teoremi fra i quali: una retta può essere perpendicolare a se stessa* (pag. 68 di S. et H.). E' la geometria del cono-luce, dello spazio di Minkowskj.

[14] Sono citate, insieme alle infinite geometrie di Riemann, quelle non-archimedee di Veronese ed Hilbert (S. et H. pag. 70)

"definizioni travestite". Non ha senso, quindi, la domanda sulla verità, ma importa quella sulla "comodità". [15]

In base alla nostra condizione di esseri umani e alle nostre impressioni si è consolidata in noi un'idea dello spazio continuo, infinito, omogeneo, isotropo e tridimensionale: ma già la sua rappresentazione da parte dei nostri sensi, ricavata dalle impressioni sulla nostra rètina, è disomogenea, anisotropa, limitata e a due dimensioni. (La terza viene percepita attraverso uno sforzo muscolare di accomodamento e la convergenza degli occhi). [16]

Ma lo spazio rappresentativo è differente da quello geometrico non solo per alcune caratteristiche (dimensioni, omogeneità ecc.) ma anche per una sostanziale indipendenza.

"Noi non rappresentiamo i corpi esterni nello spazio geometrico, ma ragioniamo su tali corpi, come se fossero situati nello spazio geometrico".

Ma il concetto di "localizzazione" come rappresentazione dei "movimenti necessari per raggiungere un oggetto", non richiede la preesistenza della nozione di spazio. Come dire è vincolata dalle condizioni fisiche, è influenzata dalle nostre idee. La nostra nozione di spazio si sviluppa indipendentemente, come atto di pensiero, sia pure dietro il suggerimento delle impressioni, da considerare non isolatamente ma nella loro successione. Solo il modo di succedersi consente di distinguere, ad esempio, i cambiamenti di stato da quelli di posizione (correggibili).[17]

---

[15] L'*apriori* filosofico si risolve quindi nella pura convenzione, suggerita da criteri di logica e di convenienza. La geometria euclidea si è imposta per la sua semplicità e perché "si accorda sufficientemente con le proprietà dei solidi naturali"

Per la definizione del concetto di spazio Poincaré parte da considerazioni affatto generali. Un essere pensante e sensitivo come noi, può essere indotto dalle impressioni, in un certo mondo, a costruire un certo tipo di geometria, ma può concepirne un'altra in un mondo diverso. Siamo noi quindi a scegliere un particolare tipo di spazio e a pronunciarci sugli schemi ai quali si è storicamente riferita la speculazione geometrica.

[16] Dal lavoro originale: *Lettre à Mouret* (R. g .S. p. a. -tomo 3 gennaio 1892). Di solito queste concordano ma potrebbero anche essere indipendenti, in teoria. Nell'ultima circostanza lo "spazio visivo completo" ci apparirà come un continuo fisico a quattro dimensioni. "*Se l'educazione dei nostri sensi avvenisse in un ambiente differente,... le nostre sensazioni muscolari sarebbero associate secondo altre leggi*" (S. et H. pag. 77).

[17] Sono importanti i processi di compensazione mediante i quali si correggono due cambiamenti. E' necessario che "le diverse parti dell'oggetto esterno e i diversi organi dei nostri senso si ritrovino nella stessa posizione.

E' pregiudiziale, a questo fine, l'introduzione del concetto di "solido invariabile". Perché gli esperimenti sono *"basati non sullo spazio ma sui corpi"*. [18]

Quando la compensazione (ossia la correzione reciproca di due cambiamenti) si verifica (non sempre) ci consente di distinguere fra cambiamento di stato e cambiamento di posizione. Attribuire delle proprietà allo spazio (per esempio, dire che lo spazio è isotropo ed omogeneo) significa presupporre alcuni tipi di cambiamento, governati dalle rispettive leggi. [19] *"Le leggi di questi fenomeni costituiscono l'oggetto della geometria"*. La prima è quella dell'omogeneità.

Grazie a questa e all'isotropismo possiamo affermare che *"un movimento prodottosi una volta si può ripetere senza che le sue proprietà varino"*. Si può, così, estendere alla geometria il processo d'induzione illimitata della matematica.

Se lo spazio fosse, invece, assoluto, ossia una cornice necessaria per ciascuno dei fenomeni, *"non potremmo cambiare nulla della nostra geometria"*.

"La geometria è il riassunto delle leggi, secondo le quali le immagini (delle nostre rappresentazioni) *si succedono.* In ambienti diversi sono possibili geometrie diverse. [20] Come è possibile rappresentare mondi non euclidei, così possiamo immaginare e rappresentare mondi a quattro dimensioni. La geometria è, quindi, una elaborazione del pensiero, che trova nell'esperienza *"soltanto un'occasione per farlo venire fuori"*. I concetti preesistono e la scelta di questi può essere consigliata, mai necessitata

---

[18] Vedi a pag. 100 di S. et H.

[19] Possiamo immaginare un passaggio dall'insieme di impressioni A a quello B, in cui il cambiamento α è corretto da un movimento correlativo volontario β che lo riporti nell'insieme A, e supporre un movimento corrispettivo volontario β' che corrisponde nel passaggio dall'insieme A a B alle stesse sensazioni muscolari: Ciò significa affermare che lo spazio è omogeneo ed isotropo.

[20] Può essere immaginata una grande sfera con temperatura massima al centro e dello zero assoluto sulla superficie massima (limite) variabile con una legge secondo cui $T = k(R^2 - r^2)$, in cui r è la distanza dal centro e R il raggio della sfera limite. Se i corpi hanno lo stesso coefficiente di dilatazione, assumono una lunghezza massima al centro e, sempre più piccola, man mano che si spostano verso la sfera limite, praticamente irraggiungibile, perché i passi diventano sempre più brevi, fino ad annullarsi sulla superficie esterna di questa. Tale mondo apparirebbe infinito ai suoi abitanti. Per gli esseri immaginari di tale mondo la geometria rappresenterà non lo studio degli spostamenti degli oggetti invariabili, ma quello di corpi deformati. Un altro caso immaginario è quello di un mezzo in cui l'indice di rifrazione è inversamente proporzionale a $R^2 - r^2$.

4 La prolusione di Modena

La memoria [21] consta idealmente di due ambiti: il primo, che sta nel testo del discorso pronunciato, comprende la descrizione critica delle opinioni scientifiche correnti sull'argomento; il secondo, che si ricava dalle note. Queste, oltre a contenere una serie preziosa di citazioni, esprimono, in alcuni passaggi, il pensiero dell'Autore su una serie di questioni concettuali aperte, evidenziando, non solo una sorprendente attualità, ma anche una profondità eccezionale, non limitata al versante scientifico e specialistico, ma, ancor più marcatamente, collocata nel più vasto orizzonte del dibattito culturale e della speculazione pura.

Nei passaggi iniziali l'A. chiarisce il senso del concetto di spazio, che *"per il matematico moderno è una forma astratta del nostro pensiero, alla quale, oltre al principio filosofico della continuità, noi attribuiamo certe proprietà fondamentali, suggeriteci dapprima dall'osservazione della natura, e poi via via, con un processo di idealizzazione successiva, idealizzate fino a renderle indipendenti"*. E più avanti: lo spazio *" è un insieme di concetti semplici, primitivi, congiunti fra loro da un gruppo di postulati opportunamente coordinati"*

E' in sostanziale accordo con Poincaré, quando afferma che, certamente, è qualcosa di profondamente diverso dallo spazio tattile e visivo. Né lo spazio matematico, né lo spazio fisico possono essere ridotti alle rappresentazioni, che ci danno il tatto e la vista. Queste fanno percepire oggetti e punti luminosi, attraverso le sensazioni muscolari e la formazione di immagini sulla superficie limitata e bidimensionale della rétina.

Il discorso di Del Re si sviluppa dai fatti naturali alla costruzione di una teoria dello spazio verificata nei due sensi: quello che va alle teorie, partendo dai suggerimenti ricavati dalle sensazioni, e l'altro che si sviluppa, partendo dalle costruzioni astratte, lungo il sentiero del confronto di queste con la realtà.

Dapprima egli si chiede *"in qual modo, idealizzando i fatti naturali, noi siamo pervenuti ad una siffatta nozione"*; si interroga successivamente sulla indipendenza o meno della nozione dalla presenza dell'osservatore, sulla finitezza o meno dello spazio, sulle modalità di estensione nell'intorno di ogni suo punto.

La prima domanda induce ad un altro interrogativo, insoluto, sull'esistenza di osservatori diversi da quelli della specie umana e quindi sulla legittimità di visioni dell'universo differenti da quelle che l'uomo ha costruito sinora.

---

[21] Il titolo completo è: *"Sulla struttura geometrica dello spazio in relazione al modo di percepire i fatti naturali"* discorso pronunciato in Modena il 16 novembre 1896 da Alfonso Del Re professore di geometria descrittiva (d'ora in poi AdR). Una copia è stata rilevata dalla Raccolta Battaglini (Univ. Federico II Napoli). Su Alfonso Del Re si legga il profilo di F. S. Rossi a pag. 259 del volume 30 del "Dizionario biografico degli autori" (Ist. Enc. Ital., Roma 1990) e ancora a pag.44 di F.G. Tricomi, *Matematici italiani del primo secolo dello stato unitario* (Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, serie 4 vol. I, 1962).

L'ultimo dilemma è, chiaramente, fuori dalla nostra portata e ci induce a restringere il campo delle osservazioni a quelle del genere umano.

La risposta al quesito sulla dipendenza dall'osservatore è affermativa. *"Cambiando l'organizzazione cambia l'esperienza e quindi anche l'aspetto dei fatti naturali e delle leggi che per astrazione se ne possono dedurre".* Nulla vieta di immaginare altre esperienze. Possiamo però trarre conclusioni solo per gli esseri umani, con le caratteristiche proprie del modo umano di valutare e di apprezzare i singoli fatti. *"Siamo inclini a definire necessità ciò che in realtà avviene con maggiore frequenza o appare più semplice".* [22]

Ma la dipendenza dell'assunto dalla presenza dell'osservatore può far correre il rischio di ricadere nel soggettivismo e l'Autore lo esclude quando chiarisce che il punto di vista è quello del *nostro-io*, elemento comune agli esseri umani.

Non si possono escludere a priori altre rappresentazioni.

"L'Universo non ha un aspetto a sé, ma lo ha in relazione all'essere che lo osserva; tante forme differenti vi sono per l'Universo quante sono le specie degli esseri che ne registrano le impressioni, ogni essere idealizza in qualche modo lo spazio del suo universo, e quel che importa di decidere è appunto ciò che riguarda il numero e i caratteri di siffatte specie di esseri".

La risposta di carattere antropico suona in questo modo: *"Data la specie umana, data la* ***sua*** *visione dell'universo e dato il* ***suo*** *modo di idealizzare, cercare le ipotesi intorno alla costituzione dello spazio che non siano in contraddizione con le* ***sue*** *scienze naturali".*

Il problema è allora quello di rappresentare una teoria delle relazioni spaziali con una geometria, *le cui conclusioni siano sempre, ad un alto grado di approssimazione, in armonia coi* dati dei nostri sensi. Lo spazio visivo ci offre, quindi, soltanto dei dati che vanno, però, sottoposti all'elaborazione della nostra mente.

Anticipando lo stesso Poincaré, che lo sottolineerà in un lavoro successivo [23], Del Re evidenzia il suggerimento che viene dal "raggio di luce" per la costruzione di quell'importante elemento, sul quale si fonda la geometria, quella linea retta, caratterizzata dall'unicità nel passaggio fra due punti dati.

---

[22] E' chiara la matrice empiriocriticista. Analogo è l'atteggiamento di Mach nella: *"Meccanica, nel suo sviluppo storico critico"* Boringhieri Torino 1977 (d'ora in poi *Meccanica*). A pag. 243 si legge: *"l'uomo ha la tendenza ad ipostatizzare i concetti che gli sono utili e in particolare quelli ai quali è arrivato istintivamente, senza conoscere la storia della loro formazione* E' la via indicata da Lobacevski sulla quale sperimentarono gli astronomi indicati da Vassiliev (AdR pag.19). Vedi anche Poincaré: S. et H. (pag.43).

[23] Poincaré: *On the Foundation of geometry* (The Monist, Cambridge anno V vol. 9 ottobre 1898 pagg. 1-43).

Non basta, certo, la definizione di retta per fondare una geometria. Va affrontato il problema dell'esistenza, in qualunque punto P dello spazio, di una o più parallele alla retta data. Una questione che Riemann aveva tradotto in un diverso segno della curvatura dello spazio.

Poincaré affronta il problema nei suoi aspetti pratici. Una volta riconosciuta la traducibilità di una delle tre geometrie (Euclide, Lobacevskij, Riemann) in termini euclidei, esse ne acquistano la stessa coerenza logica. *A parità, di condizioni scegliamo*, egli conclude, *quella che appare a noi "la più comoda" e non c'è dubbio che l'opzione* è per quella di Euclide, più affine al nostro modo di sentire e di ragionare.

Del Re allarga il discorso alle ipotesi che possono scaturire da una realtà più ampia di quella percepibile dall'uomo. La "quarta geometria" di Poincaré è pur sempre una ipotesi prevedibile a livello antropico. Ma altre geometrie possono nascere quando si allarga l'orizzonte e, quindi, la scelta in questa ottica non è riducibile ad un esame di "comodità". Si tratterebbe di ragionare su realtà che trascendono notevolmente il campo della sensibilità umana e che sfuggono al controllo di questa. La loro esistenza può essere soltanto intuita, nel campo delle cose possibili, con procedimenti estensivi dei concetti, del tipo di quelli usati nel caso degli esseri bidimensionali, vincolati a muoversi su una superficie sferica, nell'esempio indicato da Helmholtz. [24]

L'intuizione degli ampliamenti viene dalla straordinaria dilatazione della sfera delle esperienze di quegli anni: la "fotografia dell'invisibile" [25] (quasi certamente l'esperienza di Röntgen dello stesso anno sui raggi X), le onde elettromagnetiche e le stesse esperienze di Marconi, le interazioni a livello molecolare, che a quelle distanze rendono inevitabile superare le interpretazioni puramente gravitazionali della materia. (Non è già il suggerimento dell'esistenza dell'interazione *forte*?)

Ma il discorso investe anche le distanze astrali, con la possibilità di calcoli più precisi delle parallassi delle stelle fisse, che potrebbero farci optare, a grandi distanze, per tipi di spazio diversi, e la stessa ipotesi del sistema solare in movimento.

---

[24] Il dibattito sulle dimensioni dello spazio era vivo a quell'epoca non solo fra gli scienziati ma anche nell'interesse dei più. Il tema trovò occasione di divulgazione, ad esempio, nel romanzo *Flatlandia* dell'abate Edwin A. Abbott, pubblicato anonimo nel 1882. (da *Riemann di* Rossana Tazzioli ed. Le Scienze Milano aprile 2000), che descriveva, seguendo una ipotesi di Helmholtz, il caso di esseri bidimensionali vincolati a muoversi su una superficie sferica.
Del Re immagina, invece, il caso di esseri bidimensionali vincolati a spostarsi su una superficie cilindrica indefinita, per i quali sono illimitati gli spostamenti lungo le generatrici e limitati quelli lungo le varie circonferenze. Viene citato l'esempio dell'ampliamento delle dimensioni dal caso euclideo con l'introduzione di altre variabile come il tempo o la temperatura.

[25] Dovrebbe essere la celebre esperienza di Roentgen sui raggi X (AdR pag.10).

Si può dire che, mentre Poincaré è interessato più al problema di definire qual è la geometria più valida nel rango dell'umana portata e conclude con il criterio della "comodità", Del Re si pone il problema di generalizzare, perché il campo delle nostre *osservazioni deve essere ritenuto infinitamente piccolo rispetto a quello che abbraccia tutta la materia e tutte le energie.*

Il costante riferimento alla fisica per ricavare un concetto di spazio sempre più evoluto, incoraggia ed amplia notevolmente le possibilità di comprensione, generando un entusiasmo, che porta a superare alcune concezioni, di cui sono prigioniere sia la geometria che la fisica. Non esita ad anticipare quel "de profundis dell'etere", che sarebbe stato pronunciato decenni dopo da Albert Einstein. [26]

Ma non si può concludere la lettura di questa Prolusione senza citare alcuni suggerimenti: dall'utilità delle teoria dell'estensione di Grassmann [27] che egli ritiene

---

[26] Invano gli si è chiesto (all'etere) che cosa sia l'energia elettrica, che cosa sia la materia... Se fosse vera la splendida ipotesi di Thomson dei "vorticelli atomici"? Sarebbe l'agente al quale andrebbe attribuita la facoltà creativa di produrre o di distruggere almeno un solo piccolo "vortice"? Forse l'etere è, nel dominio delle scienze sperimentali, ciò che è la geometria euclidea nel dominio delle relazioni spaziali; vale a dire soltanto una soluzione approssimata del problema generale della fisica, e, forse, le limitate proprietà che gli conferiscono il trovarsi localizzato in un ambiente a tre dimensioni sono le ragioni della sua insufficienza nella spiegazione di tutti i fenomeni (AdR pagg. 28 e 29).

[27] La Teoria dell'estensione è descritta nella *Die lineale Ausdehnunglehre ein neuer Zweig der Mathematik,* di Grassmann (Leipzig 1844), riassunto nel 1854 con altri suoi lavori del periodo dal 1844 al '45.Essi furono rivisti successivamente e ripubblicati nel 1862.

A pag. 1202 della Storia di Kline si riportano alcuni concetti di Grassmann:: *"Il mio calcolo dell'estensione è svincolato dall'intuizione e diviene pura scienza matematica, solo le applicazioni allo spazio (fisico) costituiscono la geometria"* e più avanti *"mentre la geometria ordinaria rimane confinata alla tre dimensioni dello spazio (fisico), la scienza astratta è libera da queste limitazioni"*, continuando, *"dovrebbe essere possibile creare una disciplina puramente intellettuale che dovrebbe trattare dell'estensione come di un concetto, piuttosto che dello spazio percepito dai sensi"*. Il modo di pensare di Grassmann è rappresentativo di una concezione, secondo cui al pensiero puro è consentito edificare costruzioni arbitrarie, che possono essere o non essere fisicamente applicabili.

Negli stessi anni il tema era trattato in termini non metafisici ma logici da Cayley: *"Chapter in the analytical geometry of n-dimensions"* (Cambridge Mathematical Journal IV-1845 -119-127).

In aggiunta a quanto richiamato da Poincaré sul corpo rigido la frase di Mach (pag, 250 della *Meccanica*): *"un sistema può essere determinato solo mediante i corpi dell'universo.* Sull'influenza che le idee di Mach ebbero sulle nuove costruzioni concettuali della fisica sentiamo Albert Einstein nella sua *Autobiografia* ingiustamente condannata all'oblio, alla teoria delle "superfici ondulate" di Clifford [28] che consentono di interpretare cambiamenti impercettibili nella posizione e nella curvatura di varie porzioni dello spazio al variare del tempo.

Propone ancora di estendere all'indagine fisica il principio della dualità, già fertile nelle discipline geometriche. *"Non è agevole costruire una geometria sul concetto di punto, ma [lo è] ragionando su una proprietà fondamentale a condizione che non si generino contraddizioni".*

Nelle note alla prolusione sono esplicitati i cardini del suo pensiero. Esse si aprono con una poderosa "critica alla critica kantiana" sul significato della universalità, da intendere esteso *da ogni uomo ad ogni essere in genere*. Potrebbe apparire come una forma di *"innatismo"* ma nasce invece dalla preoccupazione di escludere ampliamenti e generalizzazioni, che potrebbero nascere da nuove scoperte, in una fase di formidabile espansione delle scienze sperimentali.

Con tale precisazione per Del Re *"la conoscenza a priori è una conoscenza che, quantunque eccitata dall'esperienza, non ha sede nell'esperienza, ma è in questa logicamente presupposta".*

Seguendo Klein egli passa alla definizione del *reale* come *"un invariante rispetto ad ogni modo particolare di visione dell'Universo"* e definisce il *relativo come un invariante assoluto per una o più categorie di esseri pensanti.*

A questo punto al pensatore si affaccia il problema della geometria: *l'esistenza dell'assoluto si impone come assioma. E' l'ente ad infinite dimensioni. La geometria vera è quella che ha il carattere invariante rispetto a qualsiasi modo particolare di vedere delle cose dell'Universo.* [29]

---

scientifica Einaudi 1997 a pag. 18: *"Il suo libro, quand'ero studente, esercitò una profonda influenza su di me. Fu Mach a scuotere nella sua storia della Meccanica questa fede dogmatica* (nella meccanica stessa che gli altri "demolitori effettivi" Hertz e Maxwell, invece conservavano nel loro sistema metafisico) ", anche se più avanti afferma che Mach *"non mise nella giusta luce la natura essenzialmente costruttiva e speculativa del pensiero, e più particolarmente del pensiero scientifico".*

[28] Clifford aveva già visto (1870) nello spazio di Riemann la possibilità di fondere la geometria con la fisica. *"Egli suppose che la curvatura riemanniana in quanto funzione del tempo potesse dare origine a mutamenti nella metrica del campo alla maniera delle onde,* causando *in tal modo increspature che potevano essere interpretate fenomenicamente come movimento della materia* (Jammer *Storia del concetto di spazio* Feltrinelli Milano 1963 *pag.154)* e più avanti *"per Aristotele lo spazio era un accidente della sostanza; per Clifford la sostanza è, per così dire, un accidente dello spazio"* suscitando dura opposizione fra i filosofi accademici.

[29] A pag.40 del testo.

Quale allora l'estensione dello spazio? *Esso può essere finito o indefinito, può possedere le stesse proprietà dappertutto, e può non possederle: ha quel numero di dimensioni che gli si vuol fare avere, e lo si può considerare come fermo, o come variabile e sovrapponendosi a se stesso. Ognuna di queste ipotesi è conciliabile con una geometria.* Riconferma quindi il giudizio di Poincaré: *Le geometrie osculano il mondo dei sensi.* E' astratto fin che non ci decidiamo a riconoscere in qualche ente noto una ulteriore dimensione.

Nelle note conclusive viene spezzata una lancia molto efficace per la salvaguardia degli studi di matematica nelle scuole classiche, contro i tentativi di riduzione e di "semplificazione", ispirati da un generico "senso comune", e contro la banalizzazione dei programmi di matematica nei Licei classici. [30]

Vale la pena di riportare una considerazione che l'Autore fa nel corso della avvincente esposizione: " *Si è detto, e molti lo ripetono ancora, che queste questioni sugli spazi e sulle geometrie più o meno euclidee sono delle vere e proprie utopie nel campo delle scienze sperimentali. Sostengono che tutto ciò che esiste è soltanto ciò che si vede o si tocca... e somigliano a quel tale che per dimostrare l'immobilità della terra invocava l'autorità di Giosuè. Per essi vale la risposta che Voltaire pose in bocca al grande Galileo: Fu proprio allora* (quando Giosué lo fermò) *che il Sole stette fermo e la terra cominciò a girare".*

Egli conclude affermando che *"a noi non è dato pronunciarci in via definitiva: lo spazio può essere finito o indefinito, può possedere le stesse proprietà dappertutto e può non possederle; ha quel numero di dimensioni che si vuole fare avere; e lo si può considerare come fermo, o come variabile e sovrapponentesi a se stesso* [31], *ognuno di questi poteri è conciliabile con una geometria.* ***Le geometrie euclidea, riemanniana, lobacevskiana ritraggono soltanto, osculandolo, il mondo dei nostri sensi.*** [32]

5. Notazioni finali

I passaggi più importanti degli scritti presi in considerazione inducono a qualche riflessione conclusiva.

---

[30] Viene citata una frase di Kant: "*Allorché l'intelligenza e la scienza fanno difetto si fa richiamo al* "senso comune"; *è questa una delle sottili invenzioni del nostro tempo, con l'aiuto della quale il parlatore più futile può affrontare lo spirito più solido e resistergli. Però, finché nel mondo vi saranno ancora delle idee, si starà ben in guardia dal ricorrere ad una tale sorgente"*(AdR n.14 pag.49).

[31] AdR, pag. 35.

[32] AdR, nota 16, riportata a pag. 50 del testo.

Le Prolusioni, prodotte da studiosi attenti e lungimiranti, non si dimostrano strumenti di retorica ma occasioni importanti per la divulgazione, l'aggiornamento e la messa a punto di conoscenze e di opinioni maturate nell'ambito della singole discipline, oltre che di esposizione di concezioni ed acquisizioni personali.

Nello specifico consentono di evidenziare gli elementi di rottura introdotti da Poincaré sui temi specifici dello spazio.

Enrico D'Ovidio riassume, acquisendone le formulazioni più recenti, le posizioni del pensiero geometrico, entrate a pieno titolo nel patrimonio comune dei matematici europei di quegli anni. La sua concezione di teoria scientifica supera le visioni del razionalismo astratto e dell'empirismo. Egli non si preoccupa di formulare un giudizio di valore sulla teoria così definita, ritenendola un assunto teorico logicamente coerente, ma la sottopone ad una costante verifica con la realtà concreta.

Può essere considerato un precursore del falsificazionismo, quando sostiene che ogni teoria è scientificamente valida, quando è falsificabile.

Henri Poincaré insiste sulla natura puramente convenzionale delle teorie scientifiche. Queste sono collocabili sullo stesso piano di validità, se rispettose del principio della coerenza formale, cioè alla sola condizione della logicità e del rispetto del principio di non contraddizione. La coerenza delle geometrie non euclidee, verificata nell'ambito di modelli compatibili con quella euclidea [33], discende proprio dalla coerenza di quest'ultima. La scelta si affida al criterio della convenienza. Del Re, dopo aver definito lo spazio come *"forma astratta del nostro pensiero"*, si pone il problema del collegamento, nei due sensi, dal concreto all'astratto e viceversa.

Egli scioglie in senso positivo il quesito della dipendenza dall'osservatore, un tema molto discusso anche dalla fisica del Novecento.

Il problema, naturalmente, va posto comprendendo le reazioni di *"tutti i possibili esseri"* e non solo del genere umano. La spinta all'ampliamento dell'orizzonte del pensiero geometrico viene dalle scoperte sorprendenti di quegli anni.

Poincaré esita nel costruire una definizione di retta basata sul *"raggio di luce"*, indugiando sull'astrazione del corpo rigido rotante attorno ad un insieme di punti che restano fissi (quelli, appunto, della retta, che viene in tal modo definita). Non si rassegnerà all'abbandono esplicito del concetto di *etere*. [34]

Del Re, invece, non solo è chiaro nel definire la retta come *raggio di luce*, ma supera decisamente il concetto di *etere*. Come si vede, questa posizione è più vicina a quella di Albert Einstein, che offrì la giustificazione teorica della dipendenza dall'osservatore, dell'invarianza della velocità della luce nel vuoto e dell'inessenzialità dell'etere.

---

[33] Confrontare con L. Lombardo Radice nelle appendici a N. Lobacevskij: *Nuovi principi della geometria,* Bollati Boringhieri, Torino 1994 (pag. 274 e segg.)

[34] Poincaré: *Sur la dynamique de l'électron*, Rend. Circ. Matem. Palermo, 1906 Tomo XXI (stamp. 14 -12-1905) pagg. 129-176.

In definitiva il senso di questo mio lavoro sta nel tentativo di mettere in luce lo stretto rapporto e la comune attenzione per i problemi dello spazio fra i matematici italiani negli ultimi decenni del XIX secolo (manifestati attraverso gli interessi culturali e la produzione scientifica). Ciò consolida l'idea della saldezza di un processo intellettuale unitario e significativo, che coinvolgeva uomini e idee al di là dei confini nazionali.

Il periodo in esame è chiaramente influenzato dal contributo di Henri Poincaré, che godeva di grande autorità in Francia e di molti seguaci, anche in Europa. E' il terreno fertile nel quale Einstein costruì la sua Teoria, senza la pretesa di collegare obbligatoriamente il prodotto dell'ingegno di questo pensatore a tutta la produzione antecedente.

Alfonso Del Re, pur dimostrando il vivo apprezzamento per le geniali argomentazioni e per i risultati di Henri Poincaré, non smise di volgere lo sguardo verso orizzonti più ampi. Gli stessi nei quali Albert Einstein avrebbe elaborato le nuove teorie.

Bibliografia generale

- Max Jammer – *Storia del concetto di spazio* (Feltrinelli, Milano 1963)
- Morris Kline – *Storia del pensiero matematico* vol. II (Einaudi, Torino 1998)
- Carl B. Boyer – *Storia della matematica* (Mondadori, Milano 1998)
- Eric T. Bell – *I grandi matematici* (Sansoni, Bologna 1966)
- Antonino Drago – *La via geometrica alla relatività ristretta* (Atti dell'VIII Congresso degli storici della fisica e dell'astronomia)
- Antonino Drago e Salvatore Cicenia – *Teoria delle parallele secondo Lobacevskij* (Danilo, Napoli 1966)
- Paolo Rossi (a cura) - *Storia della scienza moderna e contemporanea* (UTET, Torino 1989) nei capitoli. curati da Umberto Bottazzini (vedi anche U.Bottazzini - *Storia. della matematica*, UTET Torino 1998). Nei mesi di settembre e ottobre 2000 è uscita a cura della TEA di Torino una nuova edizione dei volumi curati da Paolo Rossi.
- Rossana Tazzioli - *Riemann* (editrice " Le Scienze", Milano aprile 2000)
- Ernst Mach – *La meccanica nel suo sviluppo storico critico* (Boringhieri, Torino 1977)
- *Dizionario biografico degli autori* (Ist. Ital. per l'Enciclopedia, Roma)
- Henri Poincaré – *La scienza e l'ipotesi* (Dedalo, Bari 1989)
- Dalla *Storia d'Italia Annali vol.III* - Scienza e tecnica nella cultura e nella società dal Rinascimento ad oggi (Einaudi, Torino 1980) nei capitoli di Roberto Maiocchi: *Il ruolo delle scienze nello sviluppo industriale italiano* (863- 999) e di Massimo Galuzzi: *Geometria algebrica e logica fra Otto e Novecento* (1003 – 1105).
- Giorgio Candeloro: *Storia dell'Italia moderna* (Feltrinelli, Milano 1968 - 1972)