## Il problema del solido di rivoluzione, avente resistenza minima all'avanzamento, nei "Principia" di Newton

*Vittorio Banfi*[1]

### 1 - Introduzione

Nello Scolio della Proposizione XXXIV (Libro II) dei "Philosophiae Naturalis Principia mathematica", I. Newton presenta il problema del solido rotondo che sperimenta la minima resistenza all'avanzamento quando si muove, attraverso un mezzo non molto denso, con velocità costante diretta secondo l'asse del corpo. La precisazione: mezzo non molto denso, si riferisce all'assunzione, da parte di Newton, di resistenza proporzionale al quadrato della velocità del corpo stesso rispetto al mezzo.

La formulazione del problema può enunciarsi sinteticamente così: "Cercasi la curva passante per due punti dati e che, ruotando attorno ad un asse passante per le ascisse di detti punti, genera un solido il quale muovendosi immerso in un mezzo nella direzione del suo asse, incontri una resistenza minima". Ancorché formulazioni generali su problemi di stazionarietà di certe grandezze nello studio delle proprietà del mondo fisico fossero state espresse, seppur vagamente, da Galileo e da A. Borelli nel XVII secolo, sicuramente il problema di Newton appartiene al rango di quelli attinenti al calcolo delle variazioni, in senso proprio e contemporaneo del termine.

Per comprendere i risultati analitici e le conclusioni di Newton occorre premettere alcune considerazioni di natura storica. I contemporanei di Newton ebbero alquante perplessità a fronte delle affermazioni e delle considerazioni a carattere geometrico, alcune del tutto incomprensibili, contenute nei "Principia". Ad una prima lettera, con richiesta di spiegazioni, da parte di D. Gregory, fu risposto dal Nostro con un documento esplicativo, dallo stesso Gregory incluso in un libro dal titolo "Newtoni methodus fluctionum". Ulteriori dettagli chiarificatori contenuti in una seconda lettera di Newton a Gregory, furono "salvati" da J.C. Adams in un'appendice al suo "Catalogo della collezione di Portsmouth di libri e articoli scritti da o appartenenti a Sir I. Newton" (Cambridge, 1888). Con i dettagli dei calcoli così resi disponibili, una ricostruzione del suo metodo è stata possibile da parte di O. Bolza (bibl.1), A.R. Forsyth e E.T. Whiteside (bibl.2). Nel prosieguo di questo scritto saranno considerati questi studi nella traccia del commento generale di S. Chandrasekhar (bibl.3).

### 2 - La soluzione odierna mediante le equazioni di Eulero-Lagrange

Prima di presentare il metodo di Newton è utile considerare la soluzione offerta oggigiorno dal calcolo delle variazioni.

E' rappresentata in Figura 1 la curva $y=y(x)$, che con la rotazione attorno al proprio asse genera il solido di rivoluzione che si desidera abbia la minima resistenza. In base a quanto detto al paragrafo 1, detta resistenza è fornita dalla formula $Cv^2$, con $C$ opportuna costante, quando è sperimentata dall'elemento superficiale, perpendicolare al vettore $\vec{v}$. Sia nN la tangente in N inclinata rispetto all'asse, coincidente con l'asse $x$, di un angolo $\vartheta$. La resistenza offerta dal mezzo è fornita dall'integrale seguente:

$$R = Cv^2 \int_{s_1}^{s_2} 2\pi y \sin\vartheta \sin^2\vartheta ds \qquad (1)$$

ove $s$ è l'arco misurato lungo la curva (a partire da un'origine prefissata $s_0$), $y$ è l'ordinata della curva nel punto generico N, essendo poi $C$ e $v$ noti. La curva $y=f(x)$ cercata sia espressa in forma parametrica (parametro $t$) ossia

[1] Centro di Astrodinamica "G. Colombo"

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (2)$$

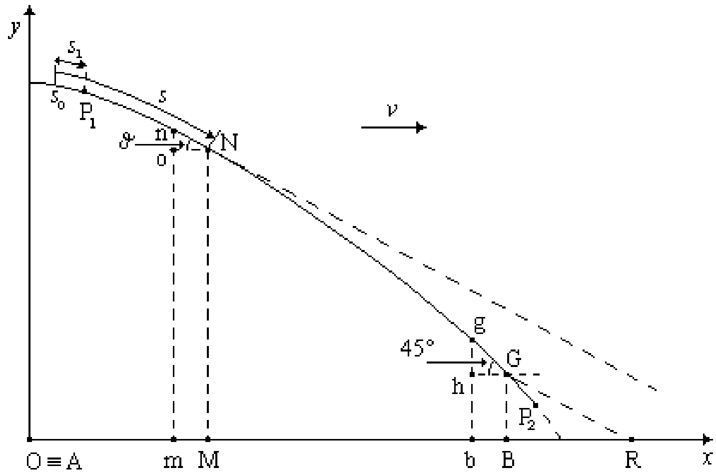


Figura 1 – La curva $y$=$y$($x$) che, con la rotazione attorno al proprio asse (coincidente con l'asse $x$), genera il solido di minima resistenza entrante nel mezzo con velocità $v$.

Indichiamo con $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, le derivate prime, rispetto al parametro $t$ dato, delle due variabili $x$ e $y$. Inoltre

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \qquad \dot{s} = \frac{ds}{dt} = \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{1/2}$$

pertanto

$$\begin{cases} \sin\vartheta = \dfrac{dy}{ds} = \dfrac{\dot{y}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{1/2}} \\ \cos\vartheta = \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{\dot{x}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{1/2}} \end{cases} \qquad (3)$$

Sostituendo le precedenti formule nella (1) otteniamo

$$R = 2\pi C v^2 \int_{s_1}^{s_2} \frac{y\dot{y}^3}{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \frac{ds}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{1/2}} = 2\pi C v^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{y\dot{y}^3}{\dot{x}^2+\dot{y}^2} dt\,. \qquad (4)$$

Nella (4) $t_1$ è il valore del parametro $t$ in corrispondenza del punto $P_1$, $t_2$ quello in corrispondenza del punto $P_2$. La (4) si scrive anche

$$R = 2\pi C v^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{y\dot{y}^3}{\dot{x}^2+\dot{y}^2} dt = 2\pi C v^2 \int_{t_1}^{t_2} F dt \qquad (5)$$

essendo

$$F = \frac{y\dot{y}^3}{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = F(\dot{x},\dot{y},y). \qquad (6)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange, nel nostro caso, porgono

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\frac{ds}{dt} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)\frac{ds}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Poiché $F$ è indipendente da $x$ [in conseguenza della (6)], dalla prima delle (7) deduciamo

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

ossia $\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \text{costante} = -2K$ .

Derivando poi rispetto ad $\dot{x}$ l'espressione $F$ otteniamo

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = -\frac{y\dot{y}^3\, 2\dot{x}}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^2} = -2K$$

e quindi

$$\frac{y\dot{y}^3\dot{x}}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^2}=K=\text{costante.} \tag{8}$$

A questo punto, utilizzando le (3), poniamo

$$q=\cot\vartheta=\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}=\frac{\dot{x}}{\dot{y}} \tag{9}$$

Dalla (8) deduciamo

$$K=\frac{y\dot{y}^3\dot{x}}{\dot{x}^4\left[1+\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right]^2}=\frac{y}{q^3}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{q^2}\right)^2}=\frac{yq}{\left(1+q^2\right)^2}; \tag{10}$$

la precedente consente di esprimere la variabile $y$ in funzione di $q$. Infatti si ha

$$y=\frac{K}{q}\left(1+q^2\right)^2=K\left(\frac{1}{q}+2q+q^3\right) \tag{11}$$

e quindi

$$\frac{dy}{dq}=K\left(-\frac{1}{q^2}+2+3q^2\right) \tag{12}$$

Ma l'espressione $\frac{dy}{dq}$ è legata a quella di $\frac{dx}{dq}$ in modo semplice:

$$\frac{dx}{dq}=\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dq}=\cot\vartheta\frac{dy}{dq}=q\frac{dy}{dq}.$$

Allora dalla (12) ricaviamo

$$\frac{dx}{dq}=K\left(-\frac{1}{q}+2q+3q^3\right)$$

che, integrata, porge

$$x = K\left(\frac{3}{4}q^4 + q^2 - \ln q\right) + C_0\,, \tag{13}$$

con $C_0$ costante d'integrazione. E' sufficiente porre le condizioni al contorno per calcolare le costanti $K$ e $C_0$. Nel punto $P_1$ (Figura 1) abbiamo $t=t_1$ e $q=q_1$ (dati) ed ugualmente nel punto $P_2$ abbiamo $t=t_2$ e $q=q_2$. Pertanto $K$ e $C_0$ risultano determinate. Il solido di rotazione poi, oltre la superficie considerata (cioè quella causata dalla rotazione del tratto $P_1P_2$), è completato da una porzione terminale tronco-conica, mediante considerazioni contenute nelle pagine 558-9 e 561-2 della bibl.3.

**3 - La soluzione ottenuta da Newton**

Innanzitutto viene stabilito dal Nostro che la soluzione richiede le condizioni di stazionarietà della quantità

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{y\dot{y}^3}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt\;, \tag{14}$$

in base alla (4) del paragrafo precedente. Newton intende stazionarietà, perché quest'ultima proprietà implica necessariamente la minimizzazione, per ovvie considerazioni di natura fisica. Nel suo calcolo delle flussioni la quantità a destra del segno uguale nella (14) è il limite della sommatoria

$$\sum_{n=1}^{N} F_n \Delta t_n\,,$$

dei prodotti $F_n$ (cioè lungo la curva tra $t_1$ e $t_2$) per i piccoli intervalli $\Delta t_n$ adiacenti (uguali o no tra loro, non importa), quando N tende all'infinito ed insieme i $\Delta t_n$ tendono a zero. Considerando l'infinitesimo, così ottenuto sotto il segno di integrale, avremo

$$\frac{y\dot{y}^3}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = y\frac{(dy)^3}{(dt)^3}\frac{(dt)^2}{(dx)^2 + (dy)^2}\,dt = \frac{y\,dy^3}{dx^2 + dy^2}\,. \tag{15}$$

Con riferimento alla Figura 2, consideriamo un trapezoide elementare costruito intorno ad un punto generico D, del tratto compreso tra $P_1$ e $P_2$. Il punto D avrà coordinate correnti $x$ e $y$; siano quindi

$dx$=AD=Ee, $dy$=AB,
$\delta y$=$\alpha$D=aA, $\delta x$=$\alpha$d=eH,

mentre ovviamente il tratto elementare di curva interessato, $ds$, è dato da BDd. Seguendo il ragionamento di Newton l'area del trapezoide BDdHEB, e quindi l'espressione (15), deve risultare stazionaria, al variare del tratto $ds$ (cioè BDd), se quest'ultimo è un tratto infinitesimo della curva cercata. Successivamente, "sommando" tutte queste aree infinitesime (in numero infinito), si ottiene l'integrale (14), che risulterà effettivamente stazionario.

Supponiamo ora di effettuare uno spostamento del tratto di curva *ds* (tenendo B e d fissi) in modo da ottenere un tratto "variato" *ds*', pari a BCd nella Figura 2, ove $\varepsilon$ è una quantità anch'essa infinitesima. A questo punto, per dimostrare che il tratto BDd è effettivamente un tratto elementare della curva cercata, è sufficiente scrivere che la quantità ottenuta sommando quella relativa ai due trapezoidi DeEB e dHeD è uguale alla quantità ottenuta sommando quella relativa ai due trapezoidi Ce'EB e dHe'C. In termini analitici

$$dy^3\left[\frac{y}{dx^2+dy^2}+\frac{y-\delta y}{(dx+\delta x)^2+dy^2}\right]=dy^3\left[\frac{y}{(dx-\varepsilon)^2+dy^2}+\frac{y-\delta y}{(dx+\delta x+\varepsilon)^2+dy^2}\right]$$

e quindi

$$ydy^3\left[\frac{1}{dx^2+dy^2}-\frac{1}{(dx-\varepsilon)^2+dy^2}\right]=$$
$$=(y-\delta y)dy^3\left[\frac{1}{(dx+\delta x+\varepsilon)^2+dy^2}-\frac{1}{(dx+\delta x)^2+dy^2}\right].$$

Quest'ultima si può scrivere, per definizione di derivata parziale, nel seguente modo:

$$ydy^3\varepsilon\frac{\partial}{\partial(dx)}\frac{1}{dx^2+dy^2}=(y-\delta y)dy^3\varepsilon\frac{\partial}{\partial(dx+\delta x)}\frac{1}{(dx+\delta x)^2+dy^2}. \quad (16)$$

Questa uguaglianza deve essere ottenuta per qualsiasi valore arbitrario di $\delta x$ e $\delta y$. Quindi anche per $\delta x=\delta y=0$. Pertanto dalla (16)

$$ydy^3\frac{\partial}{\partial(dx)}\frac{1}{dx^2+dy^2}=\text{costante}, \quad (17)$$

cioè anche, dividendo per $dt^3$ numeratore e denominatore della precedente,

$$y\left(\frac{dy}{dt}\right)^3\frac{\partial}{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)}\frac{dt^2}{dx^2+dy^2}=y\dot{y}^3\frac{\partial}{\partial\dot{x}}\frac{1}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\text{costante}, \quad (18)$$

ossia

$$\frac{y\dot{y}^3\dot{x}}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^2}=\text{costante},$$

che è identica alla (8).

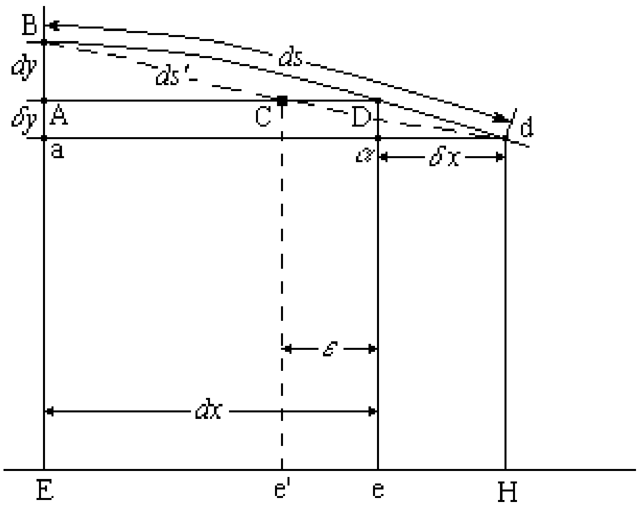


Figura 2 – Trapezoide elementare intorno al punto generico D della curva (nel tratto compreso tra $P_1$ e $P_2$).

**4 - Una conclusione contenuta nei "Principia"**

Nel citato Scolio (vedi introduzione) dei "Principia", I. Newton (bibl.4) propone un'affermazione, accompagnata da una costruzione geometrica, che risulta comprensibile solo alla luce della precedente ricostruzione analitica (basata a sua volta principalmente sulle lettere indirizzate da Newton a D. Gregory). Ecco il passo in oggetto:

"Se la figura DNFG è una curva di tipo tale che se da un suo punto qualsiasi N viene abbassata verso l'asse AB la perpendicolare NM, e dal punto dato G viene condotta la retta GR che sia parallela alla retta tangente alla figura in N, e che tagli in R l'asse prolungato, MN starà a GR come $(GR)^3$ a $4BR(GB)^2$, il solido che viene descritto mediante la rivoluzione di questa figura intorno all'asse AB, muovendosi nel predetto mezzo raro da A verso B, subisce una resistenza minore di quella di qualunque altro solido circolare descritto con la medesima lunghezza e larghezza".

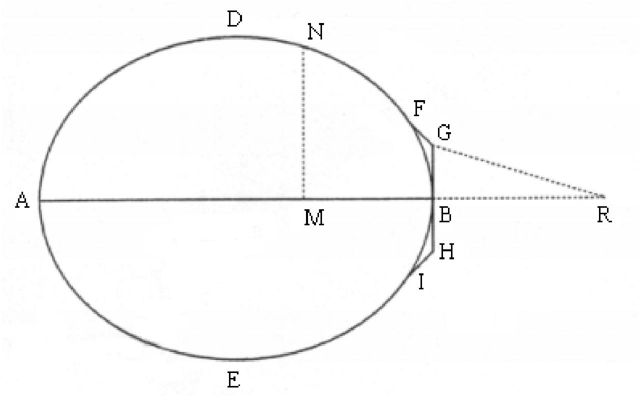


Figura 3 – Diagramma originale contenuto nei "Principia".

Riprendiamo la (9) del paragrafo 2, ossia

$$q = \cot\vartheta = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} \tag{9}$$

ed inoltre la (11) riscritta così

$$\frac{yq}{\left(1+q^2\right)^2} = K = \frac{y_3 q_3}{\left(1+q_3^2\right)^2}, \tag{19}$$

essendo il punto N indicato in Figura 1, intermedio tra $P_1$ e $P_2$ sulla curva. Il punto G, che definiremo in seguito, ha per ordinata $y_3$=BG, mentre N ha per ordinata $y$=MN, $q = \cot\vartheta$, in cui $\cos\vartheta = \frac{\text{mM}}{\text{nN}}$ e $\sin\vartheta = \frac{\text{on}}{\text{nN}}$. Riprendendo la (19) e considerando il membro a sinistra calcolato nel punto generico N e assumendo il punto G tale per cui $q_3$=1 (ossia $\vartheta$=45°), avremo

$$y\cos\vartheta\,\sin^3\vartheta = \frac{y_3}{4}$$

e quindi

$$\text{MN}\cos\vartheta\,\sin^3\vartheta = \frac{\text{BG}}{4}. \tag{20}$$

Ora, per costruzione, valgono le formule

$$\cos\vartheta = \frac{BR}{GR} \qquad \text{e} \qquad \sin\vartheta = \frac{BG}{GR}$$

che, sostituite nella (20), porgono

$$MN \times \frac{BR}{GR} \times \frac{(BG)^3}{(GR)^3} = \frac{BG}{4}$$

e finalmente

$$\frac{MN}{GR} = \frac{(GR)^3}{4BR \times (BG)^2}. \qquad (21)$$

La (21) è il risultato enunciato nello Scolio, che sarebbe incomprensibile se non fosse derivato dalla precedente trattazione.

**5 - Osservazioni finali**

Il ragionamento descritto al paragrafo 3 ha consentito a Newton di giungere alle equazioni risolventi e quindi all'affermazione contenuta nello Scolio. Tutto ciò è descritto nel lavoro di J.C. Adams citato nell'introduzione.

Nel testo di E.T. Bell (bibl.5) si trova, alla pagina 116, il seguente passo:

"Se i suoi premurosi amici lo avessero lasciato in pace, Newton avrebbe facilmente trovato il calcolo delle variazioni, questo strumento di scoperta matematica e fisica superato solo dal calcolo differenziale e integrale, invece di lasciarne il compito ai Bernoulli, ad Eulero e a Lagrange. Nei suoi "Principia" ne aveva avuto un barlume quando aveva determinato la forma della superficie di rivoluzione capace di attraversare un fluido con la minima resistenza; c'erano in lui le qualità necessarie per disegnare le grandi linee di tutto il metodo."

**Bibliografia**

1. O. Bolza, Bibliotheca Mathematica Ser. 3, 13, 146-149 (1913).
2. E.T. Whiteside, "The mathematical papers of Isaac Newton", vol. IV, Cambridge Univ. Press (1974).
3. S. Chandrasekhar, "Newton's PRINCIPIA for the common reader", Clarendon Press, Oxford (1995).
4. I. Newton, "Principi matematici della filosofia naturale", a cura di A. Pala, Utet (1971), pp. 517-518.
5. E.T. Bell, "I grandi matematici", Sansoni, Firenze (1977).