Il concetto di tensione nella meccanica dei solidi del secolo XIX

Danilo Capecchi[1]

1 - Introduzione

Quello di pressione all'inizio non è, come oggi, un concetto derivato, e in quanto tale distinto, dal concetto di forza. Anzi la pressione è un tipo di forza, e proprio quello percepito più distintamente degli altri. La sensazione, di pressione, che ci troviamo sulle mani spingendo un corpo nel tentativo di spostarlo appare più distinta anche della sensazione dello sforzo muscolare che percepiamo quando imponiamo la contrazione dei muscoli di un braccio per sollevare un peso.

Nella concezione moderna, la pressione non è più una grandezza primitiva, ma è intesa come densità di forza, più precisamente come forza di contatto per unità di superficie; essa può essere anche attrattiva e normalmente viene chiamata tensione. Per pervenire all'idea moderna di tensione, il concetto di pressione si è prima evoluto come grandezza primitiva qualificandosi come azione interna suscettibile di una determinazione quantitativa. Entrambi questi aspetti, la natura di azione interna e la sua determinazione quantitativa, emergono principalmente non all'esame della pressione esercitata per contatto tra due corpi solidi ma piuttosto dallo studio dei fluidi in equilibrio.

Il concetto di pressione si è evoluto per adattarsi alle esigenze esplicative e applicative dei vari periodi storici. Dapprima non c'è bisogno di una definizione precisa; è sufficiente considerare la sua natura di spinta intesa in senso globale ed è sufficiente disporre di una relazione quantitativa limitata a quella di maggiore - minore. La pressione è una forza e può essere misurata, o meglio il suo effetto può essere misurato, con dei pesi. Ma questa misura presenta qualche problema, perché, ad esempio, la forza che si esercita sul fondo di un recipiente che contiene un liquido fino a una certa altezza, cresce con la superficie del fondo, che è indeterminata. Siccome però la forza cresce anche con la profondità, ovvero con l'altezza misurata a partire dal fondo, e questa grandezza non ha lo stesso carattere di arbitrarietà della superficie, appare naturale assumerla come misura. È questa l'idea del barometro, che ha un uso inizialmente limitato a misurare la pressione dell'aria e esteso poi alla misura anche in altri fluidi. Con l'idea newtoniana di forza impressa, la pressione perde in parte il suo stato ontologico e di essa si guarda solo la forza impressa. Contemporaneamente, con lo sviluppo del Calcolo, si sente la necessità di pervenire a una misura puntuale. All'inizio questa misura è fornita ancora dalla profondità del fluido nel punto in esame; successivamente si perviene all'idea di forza per unità di superficie, intesa come limite del rapporto tra la forza e la superficie elementari.

Nel secolo XIX il concetto di tensione dei corpi solidi si è sviluppato secondo due direttrici diverse, la prima ricava i sui elementi dall'idrostatica, la seconda da una concezione atomica della materia in cui gli atomi sono centri di forze. Le direttrici non sono completamente indipendenti in quanto la prima ha prodotto le idee da cui è sviluppata la seconda. In linea di principio i concetti di tensione che si sono ottenuti presuppongono due diverse concezioni della materia, una materia di tipo continuo, divisibile all'infinito nel primo caso, una materia di tipo corpuscolare nel secondo caso. In realtà le cose non stanno proprio così; quello che di fatto risulta diverso nei due casi è il modello matematico della materia; e esso può essere considerato continuo anche se si ammette una struttura corpuscolare della materia.

La nazione i cui scienziati hanno dato di gran lunga il contributo più importante allo sviluppo del concetto di tensione è stata la Francia e l'istituzione scientifica più importante l'École polythecnique, che fondata con la rivoluzione francese, si è rivelata un crogiolo di matematici e ingegneri di enorme valore. Il periodo più importante è quello che va dal 1822 al 1830; si tratta quindi di un periodo relativamente breve. Nel 1822 Cauchy presenta la sua definizione di pressione per un corpo solido modellato come un mezzo continuo; negli anni 1827-1828 Cauchy e Poisson definiscono la pressione sulla base del modello corpuscolare della materia.

[1] Università di Napoli *Federico II*. Dipartimento di Scienza delle Costruzioni, via Claudio 21, 80125 Napoli - capecchi@grisnet.it.

Questa definizione verrà poi perfezionata da Duhamel, ancora nel 1828, e specialmente da Saint-Venant nel 1834.

Nel presente articolo, dopo una sintesi dell'evoluzione del concetto di tensione nei fluidi tratterò della pressione nei corpi solidi modellati come mezzi continui; successivamente affronterò il caso dei corpi trattati come un assemblaggio di corpuscoli. In questi ultimi il problema della pressione è sempre stato trattato facendo riferimento a un comportamento elastico o comunque a un legame costitutivo dato; ciò nonostatnte, anche se non è stato facile fare una separazione tra ciò che riguarda solo l'equilibrio delle forze e ciò che riguarda il legame costitutivo, riferirò solo gli aspetti che riguardano il primo punto.

2 - La pressione in un mezzo continuo

2.1 - L'idrostatica di Euler

Nei *Principes generaux de l'état d'èquilibre* del 1753 (55?) Leonhard Euler (1707-1783) mette a punto il moderno concetto di pressione nei fluidi. Esso è definito come la forza per l'unità di superficie infinitesima; forza che è esercitata dal fluido in direzione normale alle pareti o a ogni superficie interna che separa una porzione di fluido da un'altra. Riporto nel seguito i passi più significativi di tale lavoro:

10. Da ciò segue, che se se si conosce la pressione su una parte della superficie, si avranno contemporaneamente le pressioni su tutte le altre parti della superficie che sono richieste per l'equilibrio. Così ponendo la base $AB = aa$, e la forza da cui essa è compressa = P, un'altra base qualunque $CD = cc$, sarà compresso dalla forza = cc/aa P. Questa regola diviene più semplice, se noi esprimiamo la forza P per mezzo del peso di un cilindro di un materiale omogeneo e pesante, la cui base è = aa, vale a dire quella su cui tale forza agisce; questo cilindro avrà poi una certa altezza, e sia p, e pertanto la forza P sarà uguale al peso di una massa della detta materia omogenea, il cui volume è = $aa\ p$, ovvero si potrà porre $P = aa\ p$: da qui, la forza che deve agire sulla base $CD = cc$, essendo = $cc/aa\ P$ diverrà = $cc\ p$ o sarà uguale al peso di un cilindro della stessa materia omogenea, la cui base è = cc e l'altezza la stessa di prima = p. Per la stessa ragione tutte le altre porzioni della superficie = ff di questa massa fluida sosterranno una forza =$ff\,p$.

11. Dunque per conoscere lo stato delle pressioni, da cui una massa fluida è mantenuta in equilibrio, è sufficiente conoscere l'altezza p, comune a tutti i cilindri formati da tale materia omogenea e pesante, tramite il cui peso noi esprimiamo qui le forze sollecitanti. Perché nota quest'altezza p, si assegnerà facilmente la forza, da cui ciascuna parte della superficie del fluido è compressa: così prendendo una porzione = aa, questa forza sarà espressa dal peso = $aa\ p$. Siccome tale forza agisce ovunque perpendicolarmente alla superficie, è evidente che non si saprà determinare immediatamente la forza sostenuta da una porzione concava o convessa della superficie; bisognerà dunque ricorrere a degli elementi infinitamente piccoli di superficie e detto tale elemento =$ds2$, la forza da cui è compresso sarà = $p\ ds2$ e la direzione perpendicolare all'elemento, che può sempre essere riguardato come piano.

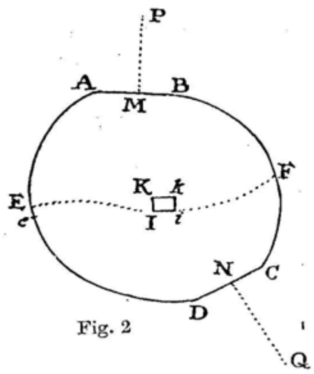

Figura 1

12 [….]
13. Ma trovandosi il fluido in un tale stato di pressione per l'azione di qualche forza *PM = aa p*, non solo tutti gli elementi del recipiente sostengono delle pressioni, che corrispondono alla medesima altezza *p*, ma anche tutti gli stessi elementi del fluido stesso si troveranno nello stesso stato di pressione. Si immagini all'interno del fluido un diaframma immateriale *EIiF*, che isoli dalla massa del fluido una porzione qualsiasi *AEFB*; e poiché questa porzione è in equilibrio, tutte le particelle del diaframma sosterranno così delle forze, corrispondenti alla medesima altezza *p*. Da cui segue che ciascun elemento *IKki* sarà compresso da tutte le parti da forze simili; ovvero tutte le particelle del fluido saranno compresse le une contro le altre da forze che corrispondono alla stessa altezza *p*; è dunque l'uguaglianza di tali forze che costituisce lo stato di equilibrio, supponendo sempre che non si abbiano affatto delle forze particolari, come la gravità, che agiscono sulle particelle del fluido (Euler, Principes generaux de l'etat d'equilibre des fluides, pagg. 5-7).

La prima parte dei *Principes*, da cui sono stati tratti questi brani, riguarda il caso di fluidi perfetti e incompressibili, in assenza di forze esterne di massa. La semplicità della situazione, caratterizzata da pressione costante in ogni punto, si presta all'introduzione in modo chiaro del concetto di pressione. Il testo è sufficientemente perspicuo e non merita commenti particolari. Le forze della pressione sono chiaramente considerate come interne (paragrafo 13), una parte del fluido agisce su di un'altra, e non riguardano più solo l'azione sulla superficie di un corpo immerso in un fluido: "Da cui segue che ciascun elemento *IKki* sarà compresso da tutte le parti da forze simili; ovvero tutte le particelle del fluido saranno compresse le une contro le altre da forze che corrispondono alla stessa altezza *p*". La pressione è una grandezza fisica ben definita, che seguendo Johann Bernoulli [Opera Omnia, 1762], viene identificata con il simbolo *p*; essa è tale che su di una superficie *ds2* si abbia una forza proporzionale a *p ds2*. La pressione *p* non viene ancora identificata esplicitamente e formalmente come una forza per unità di superficie, ma da un'altezza. Però adesso l'altezza non si riferisce al fluido sovrastante, ma è semplicemente un'unità di misura della pressione che è dovuta non solo al peso agente in condizioni idrostatiche, ma a qualunque agente che solleciti il fluido, causandone o meno il moto.

2.2 - La tensione nei solidi

L'analisi delle forze interne ai solidi viene fatta comunemente risalire a Galilei che nei suoi *Discorsi e dimostrazioni matematiche sopra due nuove scienze* del 1638 studia la resistenza di una trave inflessa. Con Parent (1666-1716) e Coulomb (1736-1806) si arriva a concezioni abbastanza simili a quelle moderne, limitatamente però a quello che oggi si chiamerebbe stato piano di tensione (Capecchi, 2001).

Nel 1823 Louis Augustin Cauchy (1789-1857) pubblicò, sul Bollettino de la Societé Philomathique, un breve lavoro dal titolo: *Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques*, che rappresenta il sommario dello stato delle sue ricerche, comunicato il 30 settembre 1822 all'Accademia delle Scienze di Parigi[2]. In questo lavoro è enunciato il principio della tensione[3] (stress principle), secondo cui su qualunque superficie orientata e regolare di separazione di una parte di un corpo da un'altra parte esiste un campo vettoriale regolare di tensioni dovute all'azione di una parte del corpo su un'altra parte dello stesso corpo:

Queste ricerche traggono lo spunto da una memoria pubblicata da M. Navier, il 14 agosto 1820. L'autore, per determinare l'equazione di equilibrio di una lastra elastica, aveva considerato due tipi di forze prodotte, le une dalla dilatazione o dalla contrazione, le altre dalla flessione di questa lastra. Di più aveva supposto, nei suoi calcoli, le une e le altre perpendicolari alle linee o alle facce contro cui esse si esercitano. Mi era parso che queste due tipi di forze potessero essere ridotte a una sola, che doveva chiamarsi tensione o pressione, e che era della stessa natura della pressione idrostatica esercitata da un fluido in riposo contro la superficie di un corpo solido. Solo che la nuova pressione non rimaneva affatto sempre perpendicolare alle facce che le erano sottoposte, né la stessa in tutti sensi in un punto fissato Sviluppando queste idee, arrivai presto alle conclusioni seguenti.

Se un piccolo elemento di volume delimitato da delle facce qualsiasi, in un corpo solido elastico o non elastico, viene reso rigido e invariabile, questo elemento sarà soggetto sulle sue differenti facce e in ogni punto di ciascuna di esse a una pressione o tensione determinata. Questa pressione o tensione sarà assimilabile alla pressione che un fluido esercita contro un elemento dell'involucro d'un corpo solido, con la sola differenza che la pressione esercitata da un fluido a riposo, contro la superficie d'un corpo solido, è diretta perpendicolarmente a questa superficie dall'esterno verso l'interno, e in ogni punto indipendente dall'inclinazione della superficie rispetto ai piani coordinati, mentre la pressione o tensione esercitata in un punto dato d'un corpo solido, contro un piccolissimo elemento di superficie passante per questo punto, può essere diretta perpendicolarmente oppure obliquamente a questa superficie, talvolta verso l'interno, se si ha condensazione, talaltra verso l'esterno, se si ha dilatazione, e può dipendere dall'inclinazione della superficie rispetto ai piani di cui sopra [cioè i piani coordinati] (Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques, Bulletin de philomathique, 1823, pag. 9).

L'enunciato di Cauchy, rappresenta il culmine e la sintesi di concetti derivati dall'idrostatica e dai lavori di meccanica dei solidi, in particolare quelle riguardanti la flessione delle travi e delle lastre. Gli aspetti importanti della definizione sono, l'identificazione qualitativa delle tensioni all'interno dei solidi con la pressione dei fluidi, con la differenza che adesso si tratta di una grandezza vettoriale, e l'introduzione implicita dell'ipotesi del continuo. Cauchy aveva tutti gli elementi per pervenire alla sua definizione; conosceva bene i lavori di Euler sull'idrostatica, argomento su cui aveva svolto attività di ricerca dal 1815 e che era stato oggetto del suo insegnamento all'École polythecnique (i risultati ottenuti da Cauchy sui liquidi sono riassunti nel lavoro *Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement des fluides*, Œuvres complètes, 2, **8**, 128-146). Inoltre Cauchy

[2] Sembra che. il 30 settembre 1822, Cauchy si sia limitato a informare l'Accademia delle sue ricerche, senza darne una lettura pubblica né depositare un manoscritto (Belhoste, pag. 97): Spesso nella letteratura (*vedi* Thodhunter and Pearson, 1886, per esempio) si legge che egli presentò effettivamente il suo lavoro all'Accademia.

[3] Cauchy si riferisce alla tensione come alla "tensione" o "pressione", identificando il primo termine con le trazioni e il secondo con le compressioni. Solo con Clebsch si userà il termine tensione per entrambi i casi.

conosceva i lavori di Coulomb sulla trave, sia in qualità di studente dell'École polythecnique e successivamente dell'École des pontes et chaussées, ma principalmente per la sua attività di ingegnere, per cui si era dovuto occupare anche di resistenza dei materiali producendo anche qualche scritto (Belhoste, 1991). Dall'idrostatica di Euler deve avere ricavato il concetto di pressione come forza per unità di superficie elementare; dai lavori di Coulomb la possibilità di parlare di forze interne ai corpi solidi e principalmente il fatto che queste forze interne hanno anche componenti tangenziali.

Cauchy non sembra trovare un particolare imbarazzo a parlare di forza, come invece avverrà per Saint-Venant. Egli è principalmente un matematico e un ingegnere e non un fisico; la forza era un concetto entrato oramai nell'uso comune e, come accade oggi, se non ci si facevano troppe domande sul suo significato e sulla sua origine lo si poteva usare con disinvoltura. Come dice Poinsot nei suoi *Élements de statique*, "Senza considerare la forza in se stessa, noi concepiamo molto chiaramente che essa agisce secondo una direzione e con una certa intensità".

Cauchy pubblicò in forma estesa i suoi risultati, annunciati nel 1822 e riassunti nel 1823, solo nel 1827 e 1828, su una serie di articoli apparsi sugli Exercices de mathématique[4] (Capecchi, 2001), di cui il più importante è *De la pression ou tension dans un corps solide* del 1827 (Œuvres complètes, 2, **7**, 59-78). Nel seguito riporto le pagine introduttive di questo lavoro:

I Geometri che hanno studiato le equazioni dell'equilibrio o del moto delle onde o delle superfici elastiche o non elastiche, hanno distinto due specie di forze, prodotte le une dalla dilatazione o contrazione, le altre dalla flessione di queste stesse superfici. Inoltre, essi hanno generalmente supposto, nei loro calcoli, che le forze della prima specie, chiamate tensioni, restano perpendicolari alle linee contro le quali esse si esercitano. Mi è sembrato che queste due specie di forze potevano essere ridotte ad una sola, che deve costantemente chiamarsi tensione o pressione, che agisce su ciascun elemento di una sezione fatta a piacere, non solamente in una superficie flessibile [prodotte dalla flessione], ma anche in un solido elastico o non elastico, e che è della stessa natura della pressione idrostatica esercitata da un fluido in riposo contro la superficie esterna di un corpo. [...] sia v il volume della porzione di corpo assunta rigida, s, $s¢$, $s¢¢$, ... le aree delle superfici piane o curve che delimitano il volume v; x, y, z le coordinate rettangolari di un punto (P) preso a caso della superficie s; p la pressione o tensione esercitata in questo punto contro la superficie; a, b, g gli angoli che la perpendicolare *(n)* alla superficie *(s)* forma con i semiassi positivi delle coordinate; infine l, m, n gli angoli formati con gli stessi semiassi dalla direzione della forza p. Se si proiettano sugli assi delle x, y, z le varie tensioni o pressioni alle quali la superficie è sottoposta, le somme delle loro proiezioni algebriche su questi tre assi saranno rappresentate dagli integrali[5]:

$$(1)\qquad \begin{cases} \int\int p\cos\lambda\cos\gamma\; dydx, \\ \int\int p\cos\mu\cos\gamma\; dydx, \\ \int\int p\cos\nu\cos\gamma\; dydx \end{cases}$$

mentre, se si prende come polo dei momenti l'origine delle coordinate, le somme delle proiezioni algebriche dei loro momenti lineari saranno rispettivamente,

[4] Gli Exercices erano una rivista, nata nel 1826, edita da Cauchy stesso e pubblicata dalla famiglia Bury imparentata con Cauchy.
[5] Nelle formule seguenti Cauchy ha una svista e commette l'errore di considerare cos g in luogo del valore corretto $\cos^{-1}$g. La svista poi viene riassorbita.

$$(2)\qquad \begin{cases} \int\int p(y\cos\nu - z\cos\mu)\cos\gamma\; dydx, \\ \int\int p(z\cos\lambda - x\cos\nu)\cos\gamma\; dydx, \\ \int\int p(x\cos\mu - y\cos\lambda)\cos\gamma\; dydx, \end{cases}$$

(Cauchy, De la pression ou tension dans un corps solide, Œuvres complètes, pagg. 61-62).

Più avanti Cauchy espliciterà la convenzione dei segni che egli assume per la tensione; essa, come oggi, è positiva se di trazione e negativa se di compressione; ciò equivale a considerare una normale n ortogonale alla superficie elementare s del volume v diretta verso l'esterno.

Sulla base della sua definizione di tensione, utilizzando solo le leggi dell'equilibrio, Cauchy riconosce di fatto la natura tensoriale della tensione. Egli fa l'assunzione, implicita, che la tensione in un punto, attraverso una superficie elementare che lo contiene, non dipenda dalla forma di questa superficie ma solo dalla normale n ad essa, e quindi in luogo della superficie reale può fare riferimento a una superficie piana (normale a n). Questa assunzione implicita di Cauchy è oggi resa esplicita e, nei trattati di meccanica del continuo, va sotto il nome di postulato di Eulero-Cauchy (Capecchi, 1995). Con l'ausilio di tale postulato, Cauchy dimostra il suo famoso teorema secondo cui la tensione in un punto, rispetto a una certa giacitura è definita completamente dalla conoscenza della tensione su tre piani distinti passanti per tale punto. Facendo l'equilibrio alla traslazione di un elemento infinitesimo a forma di tetraedro, con il vertice nel punto in cui si vuole conoscere la tensione, con tre facce parallele ai piani coordinati e la quarta faccia che ha la giacitura, definita dai coseni direttori cos a, cos b, cos g, rispetto a cui si vuole la tensione ottiene[6]:

$$(20)\qquad \begin{cases} p\cos\lambda = A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma, \\ p\cos\mu = F\cos\alpha + B\cos\beta + D\cos\gamma, \\ p\cos\nu = E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma. \end{cases}$$

Con le parole di Cauchy: “Queste ultime equazioni permettono di conoscere le relazioni che sussistono, per il punto (x, y, z), tra le proiezioni algebriche

$$(21)\qquad \begin{cases} A, & F, & E; \\ F, & B, & D; \\ E, & D, & C \end{cases}$$

delle pressioni *p¢*, *p¢¢*, *p¢¢¢* esercitate in questo punto, dal lato delle coordinate positive, contro tre piani paralleli ai piani coordinati, e le proiezioni algebriche

$$(5)\qquad p\cos\lambda,\quad p\cos\mu,\quad p\cos\nu$$

[6] Vale la pena di notare che nei suoi passaggi analitici Cauchy utilizza ancora il linguaggio degli infinitesimi nella sua forma settecentesca, anche se di essi aveva una concezione sostanzialmente moderna almeno sin dalla sua suo *Analyse Algébrique* del 1821.

della pressione ovvero tensione *p*, esercitata nello stesso punto contro un piano qualunque perpendicolare ad una retta che, prolungata dal lato in cui la forza *p* si manifesta, forma, con i semiassi delle coordinate positive, gli angoli a, b, g (Œuvres complètes. 2, **7**, 68-69)".

Con l'introduzione del concetto di tensore i coefficienti *A, F, E, B, C, D*, vengono interpretati oggi come le componenti del tensore della tensione. Molti anni più tardi Cauchy cambierà simbologia, introducendo una notazione a due indici per le componenti della tensione, probabilmente su suggerimento di Saint-Venant che lo aveva a sua volta adottato sin dal 1837 una proposta di Coriolis (Navier, *Resumé des lecons donné a l'école des pontes et chaussées*...; App. III, pag. 547). Nella memoria *Sur la torsion des prismes,* Cauchy introduce senza nessun commento la notazione a due indici. In questo lavoro utilizza i simboli p_x, p_y, p_z, per i moduli delle "pressioni o tensioni esercitate sul punto p (*x, y, z*), dalla parte delle coordinate positive su tre piani ortogonali agli assi *x, y, z*", mentre con:

$$\begin{matrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{matrix}$$

indica "le proiezioni algebriche della forza p_x o p_y o p_z, sugli assi delle *x, y, z* (Cauchy, *Sur la torsion des prismes*, Comptes Rendus, Tome 37, 1854 ; pag. 327)".

Per quanto poi riguarda i motivi che spinsero Cauchy a ritardare la pubblicazione dei suoi risultati del 1822, Belhoste (1991) ritiene che siano di due tipi; uno relativo ad aspetti di natura "politica" un altro invece di natura scientifica, relativo a una maturazione di alcuni concetti. Quando presentò i suoi risultati nel 1822 all'Accademia, Cauchy sapeva che il suo lavoro si ispirava alle *Recherches sur la flexion des plans* di Navier del 1820[7] (tanto da ammetterlo nei suoi scritti) dove questi trattava separatamente gli effetti assiali da quelli flessionali delle forze agenti su una piastra ammettendo però l'ortogonalità delle forze interne alle superfici su cui si esercitano. Inoltre il lavoro di Cauchy si concentrava sullo stesso argomento del lavoro ancora di Navier del 1821, *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*, che era ancora al vaglio della commissione dell'Accademia. La pubblicazione del lavoro di Cauchy del 1823 irritò Navier che scrisse una lettera di protesta alla Société de Philomathique ottenendo che le sue osservazioni venissero pubblicate sullo stesso numero del bollettino su cui doveva apparire la nota di Cauchy e dove apparve anche un'aspra lettera di Fresnel che difendeva la priorità di Navier (e forse anche la sua). Così, probabilmente, Cauchy si decise a rinviare la pubblicazione del suo lavori a dopo la pubblicazione di quelli di Navier, che avvenne nel 1827. Un'altra ragione, più seria, può avere operato nel ritardo di Cauchy. Egli aveva basato il suo concetto di tensione e la sua teoria dell'elasticità sul modello idrostatico, trattando i solidi come mezzi continui. Ma nel mondo accademico francese il modello molecolare era diventato dominante anche per trattare la teoria dell'elasticità; quindi si può pensare che solo dopo che ebbe preso confidenza con il modello corpuscolare dell'elasticità Cauchy avrebbe deciso di pubblicare il suo scritto, avendo, così in qualche modo le spalle coperte. Questa tesi è parzialmente avvalorata dalla presenza nel suo lavoro del 1827, di un'appendice ove riporta una trattazione di tipo corpuscolare delle forze interne, quasi a dimostrare che lui sapeva che c'era anche un modo diverso da quello continuista di trattare i solidi elastici.

[7] Di questo lavoro, mai pubblicato, Cauchy ricevette quasi sicuramente una copia, visto che Navier ne diffuse un certo numero di riproduzioni litografiche (Belhoste, 1991).

Cauchy non abbandona però il modello continuo della materia, che coesiste ancora per qualche tempo con quello molecolare. Particolarmente istruttivo al proposito è un suo lavoro *Sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps considérés comme des masses continues* del 1830 (Œuvres complètes, 2, **9,** 342-372), dove confronta i risultati del modello continuo e di quello discreto. Sembra comunque che Cauchy non abbia compreso in pieno le differenze tra i due modelli per quello che riguarda il legame costitutivo. A questo proposito, e anche per quello che riguarda più in generale il legame costitutivo e la polemica sul numero di coefficienti necessari per descrivere il comportamento elastico, rinvio a Navier (1864) e a Todhunter e Pearson (1886-89).

3 - La pressione come forza tra molecole

3.1 - Concezione corpuscolare della materia.

Il primo modello corpuscolare della materia basato sull'esistenza di forze interne è dovuto a Newton che nelle *Questions* dell'Opticks si pone la domanda:; “Le parti più piccole dei corpi non hanno certe potenze, virtù o forze per effetto delle quali agiscono a distanza …. (Newton, *Scritti di ottica*, Questione 31, pag. 581)”. Poi “Considerate tutte queste cose mi sembra probabile che Dio, al principio del mondo, abbia formato la materia di particelle solide, compatte, dure, impenetrabili e mobili […] (Ibidem, pag. 601)”.

Newton e i suoi immediati successori si resero poi conto che non occorreva una grande quantità di materia atomica per spiegare le proprietà dell'universo. Si arrivò alla così detta *teoria del guscio di noce* (Thackray, 1981; pagg. 188-200), secondo cui l'intera materia dell'universo potrebbe anche essere contenuta in un guscio di noce. È interessante al proposito sentire Voltaire dalle sue *Letters concerning the English nation*, del 1783, che esprime le concezioni della materia degli scienziati inglesi: “un francese che arrivi a Londra troverà che la filosofia, come ogni altra cosa, è molto cambiata. Ha lasciato un mondo plenum e lo ritrova vacuum”.

Alla fine con Roger John Boscovich (1711-1787) la "materia" sparisce del tutto e i corpi dell'universo sono concepiti come formati da un assemblaggio di centri di forze. Nella sua *Theoria philosophiae naturalis* (A theory of natural philosophy), del 1758, Boscovich espose la sua concezione atomica: “Secondo la mia opinione gli elementi ultimi della materia sono punti privi di estensione, assolutamente indivisibili; essi sono così dispersi in un immenso vuoto che ogni due di essi sono separati tra loro da uno spazio finito. Questo spazio può essere aumentato o diminuito a piacere, ma non può mai sparire senza la compenetrazione dei punti stessi […] 8. Come proprietà di tali punti ammetto una propensione interna a rimanere nello stesso stato di riposo o di moto uniforme in linea retta, nel quale essi fossero inizialmente posti […] (Boscovich, *Theoria philosophiae naturalis*, pagg. 38-39)”. Per Boscovich le unità ultime della materia sono simili tra loro, del tutto senza dimensione ma dotate di massa e principalmente esse esercitano una forza che dipende dalla distanza, passando da repulsiva a distanze piccole, ad attrattiva a distanze maggiori, tendendo alla legge dell'inverso del quadrato della distanza. Nelle posizioni intermedie la forza oscilla tra attrattiva e repulsiva, assumendo di conseguenza anche valori nulli. Boscovich usa la parola forza, ma a essa non dà un significato di causa; con le sue parole: “Ritengo pertanto che due punti qualsiasi siano determinati a certe distanze ad avvicinarsi reciprocamente, ad altre distanze ad allontanarsi reciprocamente. Questa determinazione io la chiamo *forza* […] questo termine non denota il modo di azione, ma la determinazione stessa, quale che ne sia l'origine, la cui grandezza cambia con la distanza (Boscovich, *Theoria philosophiae naturalis*, pag. 39)”. Secondo Boscovich dall'unione di tre o più atomi si generano particelle del primo ordine; dall'unione di particelle del primo ordine si generano particelle del secondo ordine e così via, fino a quelle particelle che determinano le proprietà dei corpi.

Nella prima metà del secolo XIX, il modello di Newton o di Boscovich era comunemente accettato presso gli scienziati francesi; Cauchy, Ampére e Saint-

Venant, preferivano il modello di atomi immateriali, Laplace, Poisson, Biot invece pensano agli atomi come a particelle piccolissime, di fatto trattate come prive di estensione, secondo il modello newtoniano di punto materiale. Tutti gli autori che si occupano di elasticità useranno però il concetto di molecola, intesa come una porzione piccolissima di materia, e le forze in esame saranno le forze tra le molecole; che poi queste molecole siano costituite da atomi con estensione o senza estensione, o addirittura siano una porzione di continuo, è sostanzialmente irrilevante.

3.2 - Concezione della materia e della forza di Cauchy

Nei suoi primi studi di idrodinamica e di meccanica dei solidi (fino al 1822) Augustin Cauchy (1789-1857), adottando un modello continuo, aveva sostanzialmente ignorato gli aspetti costitutivi della materia. Non è noto se accettasse o meno l'ipotesi atomistica, anche se dato il tipo di studi che aveva fatto e dati i suoi rapporti con Laplace e Poisson, paladini dell'atomismo newtoniano, appare estremamente improbabile gli fosse contrario. Però solo relativamente tardi, egli comincerà, gradualmente, a usare un modello corpuscolare per lo studio dei solidi elastici. Nelle *Sept leçons de physique générale* tenute a Torino nel 1833, espone le sue concezioni mature riguardo alla struttura della materia; concezioni cui non è estranea la sua "religiosità" e che non lo vincolano completamente dal punto di vista fisico, perché egli non abbandonerà mai completamente il suo modello continuo.[8] Nella quinta *leçon*, dedicata allo spazio e all'estensione, Cauchy inizia dicendo:

> L'osservazione e il ragionamento ci conduce a considerare i corpi come formati da un numero prodigioso di aggregati di molecole ciascuno dei quali è composto a sua volta da atomi senza estensione, ma situati a certe distanze gli uni dagli altri. I corpi così formati sono visibili e tangibili; i corpi sono visibili perché i loro atomi non possono muoversi senza che il moto si propaghi nel fluido etereo. I corpi sono tangibili perché i loro atomi, quando si voglia avvicinarli gli uni agli altri, divengono sede di forze repulsive, e la sensazione del tatto proviene dalla repulsione delle molecole di un corpo sulla mano che si avvicina (Cauchy, Sept leçons de physique générale, Œuvres complètes 2, **15,** 430).

Per quanto riguarda le forze interatomiche Cauchy non si pone il problema del loro stato ontologico; le forze sono di fatto trattate secondo la concezione newtoniana di causa del moto.

> L'attrazione o la repulsione esercitata dal primo atomo sul secondo è uguale all'attrazione o repulsione esercitata dal secondo atomo sul primo [….]
>
> L'attrazione o repulsione di due atomi dipende dalla distanza che li separa […].
>
> Per determinare l'azione mutua di due corpi, le cui dimensioni sono molto piccole basterà conoscere le loro masse, le loro distanze e la funzione [unica] che esprime la legge secondo cui l'azione di un atomo su un altro varia con la distanza; infine [bisognerà conoscere] l'azione che due masse unitarie disposte a distanza unitaria esercitano tra loro (Cauchy, Sept leçons de physique générale, Œuvres complètes 2, **15,** pag. 438).

[8] All'inizio la molecola ha una connotazione fisica, un gruppo di atomi; successivamente nei lavori di meccanica quando adotterà una approccio continuo, per molecola intenderà una piccola porzione di continuo, che quindi può avere una forma qualsiasi (vedi ad esempio *Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre, ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique* (Exercices de mathématique, 1828, pag. 160)

3.3 - Concezione della materia e della forza di Saint-Venant

Adhémar J. C. Barré de Saint-Venant (1797-1886) è un sostenitore della teoria di Boscovich di cui accetta anche la concezione della forza come determinazione:

Il sistema evidenziato da Boscovich resta sempre il solo che si riconcilia con tutti i fatti e che fonda la meccanica come una scienza fisico-matematica. Esso è anche il solo che lascia intatta la legge di continuità del tempo e dello spazio, e per conseguenza del moto, e che, anche in ciò che vi è di più difficile, no la viola riguardo alla costituzione della materia, come fanno i sistemi di corpuscoli ove dal vuoto si passa bruscamente alla piena estensione […] (Navier, Resumé des lecons donné a l'école des pontes et chaussées ..; pag. cxliv).

La concezione della forza di Saint-Venant si riallaccia alla tradizione di d'Alembert e di L. Carnot, piuttosto che a quella di Newton. Data la posizione minoritaria di tale concezione egli si sforza di illustrarne i concetti base nei suoi scritti[9]. Nella *Mémoire sur les sommes et les differences geométriques, et sur leur usage pour simplifier la Mécanique* (Comptes Rendus, Tome 21, pagg. 620-625), Saint-Venant scrive: "l'equazione generale di un punto materiale può scriversi così […]:

$$\frac{d\overline{v}}{dt} = F + F' + \cdots + \quad "$$

Il termine $d\overline{v}/dt$ è chiamato *flusso geometrico*[10] della velocità. Flusso sta per flussione e geometrico perché si tratta di una grandezza vettoriale. I termini $\overline{F}$, $\overline{F}'$, sono dei vettori detti *flussi geometrici parziali*. "Ciascuno rappresenta il flusso effettivo delle velocità che m prenderebbe in virtù delle leggi particolari note, se ciascuna delle posizioni, ove si trova al momento, relativamente agli altri corpi fermi o in moto, variasse senza quella degli altri (ibidem, pag. 624". Quindi implicitamente Saint-Venant ammette il principio di sovrapposizione degli effetti, per cui i diversi flussi parziali si sommano tra loro. Saint-Venant continua arrivando a introdurre la massa del punto materiale e a definire la forza in modo sostanzialmente analogo a quanto farà Mach alcuni anni dopo (Mach; *La meccanica nel suo sviluppo storico*. 1992): "la seconda legge della meccanica sarà espressa dall'equazione geometrica:

$$mF_{mm'} + m'F_{m'm} = 0$$

ove $F_{mm'}$ rappresenta un flusso geometrico parziale della velocità del punto materiale m nella direzione del punto materiale m' e $F_{m'm}$ un flusso geometrico parziale di m' nella direzione di m. Questa legge può essere enunciata dicendo che i flussi geometrici effetti delle velocità dei punti materiali sono in ciascun istante, decomponibili geometricamente in linee o flussi parziali diretti verso altri punti e che il flusso parziale di un punto verso l'altro è costantemente opposto al flusso di questi verso quello, moltiplicando ciascun flusso per un coefficiente m sempre lo stesso per

[9] Saint-Venant parla della sua concezione della forza in varie occasioni; *vedi* al proposito Jammer (1971) e Navier (1864), ma l'esposizione sui Comptes Rendus del 1845 è particolarmente chiara.

[10] Nella memoria, da cui sono tratte le considerazioni che seguono, Saint-Venant ha elaborato un rudimentale calcolo vettoriale, definendo la somma tra vettori e il prodotto di vettori, cui si riferisce rispettivamente con il termine di somma geometrica e prodotto geometrico. Per fedeltà al testo ho tradotto "geometric" con "geometrico", anche se la traduzione più corretta sarebbe: "vettoriale".

ciascun punto, detto *massa* di questo punto (Saint-Venant, *Mêmoire sur les sommes et les differences geométriques,* pag. 624)".

La concezione della forza secondo Saint-Venant implica punti materiali che esercitano forze gli uni sugli altri indipendenti tra loro. Mentre Cauchy che manifesta un modesto impegno ontologico verso la concezione della forza, quando gli rimane più comodo, può accettare di trattare la materia come mezzo continuo, Saint-Venant, per coerenza, deve sempre difendere la costituzione molecolare della materia per poter giustificare le forze. E proprio per il suo impegno ontologico nella concezione della forza secondo Boscovich, Saint-Venant sarà il più strenuo difensore della teoria molecolare dell'elasticità, cui rimarrà fedele fino alla fine, anche quando si comincerà a intravedere che i risultati sperimentali, ancora un po' incerti, sono incompatibili con le sue previsioni; specie per i corpi elastici e isotropi.

In particolare Saint-Venant era contrario all'approccio introdotto nella teoria dell'elasticità da George Green (1793-1841) che, seppure non respingeva il modello molecolare, voleva indebolirne le assunzioni, rigettando il principio forte di azione e reazione. Secondo Green l'ipotesi che le forze tra le molecole agiscano sulla loro congiungente è troppo restrittiva e, data la completa ignoranza della vera legge, bisogna utilizzare un criterio più debole. Il criterio scelto da Green consiste nell'ammettere che le forze interne siano dotate di un potenziale e inoltre che, in corrispondenza dell'equilibrio, tale potenziale sia approssimabile da una funzione omogenea del secondo ordine della variazione della distanza tra le molecole rispetto al valore di riposo. Saint-Venant contesta il rigetto del principio di azione e reazione, perché esso è una legge fondamentale della dinamica, e la scelta di una funzione quadratica per approssimare il potenziale, perché, se non si fa nessuna ipotesi fisica non c'è nessun motivo per affermare che una funzione arbitraria debba avere dei termini quadratici dominanti. La seguente argomentazione di Saint-Venant illustra abbastanza chiaramente le sue concezioni epistemologiche:

Se la prudenza scientifica prescrive di non fidarsi di ogni ipotesi, essa prescrive non di meno di considerare fortemente sospetto ciò che è manifestamente contrario a una grande sintesi riguardante la generalità dei fatti […. Il modello molecolare è una tale sintesi]. Così, rispondiamo noi, tutte le formule teoriche, in contraddizione con la legge delle azioni quali funzioni continue della distanza e dirette secondo la loro linea di giunzione a due a due. Se incontriamo una di tali formule, che spiega più facilmente certi fatti, noi la considereremo sempre come un *espediente* troppo comodo (Navier, Resumé des lecons donné a l'école des pontes et chaussées ..; pag.747).

Saint-Venant sostiene che il fatto l'ipotesi matematica secondo cui il potenziale contiene termini di secondo grado dominanti dipende dall'ipotesi fisica che le forze varino con leggi continue delle distanze. Nel commento alla *Théorie de l'élasticité des corps solides* di Clebsh, Saint-Venant sostiene fortemente (je affirme hardiment [….] qu'il faudra absolument adopter la formule pag. 72) che il potenziale delle forze molecolari deve avere la forma:

$$U = U_1(r_1) + U_2(r_2) + \cdots$$

invece della forma:

$$U = U_1(r_1, r_2, \cdots)$$

perché le forze intermolecolari sono indipendenti le une dalle altre.

3.3 - La pressione delle forze molecolari

Se è vero che Claude Louis Marie Navier (1785-1836) può essere considerato il fondatore della teoria dell'elasticità dei continui tridimensionali (Navier, *Resumé des lecons donné a l'école des pontes et chaussées* ..; pag. cxlvij) è anche vero che il suo contributo diretto alla sviluppo del concetto di pressione è pressoché nullo; semplicemente perché, almeno nei suoi primi lavori sui continui elastici, Navier non utilizza questo concetto e descrive il comportamento dei corpi in termini degli spostamenti tra i punti e delle forze tra le molecole. La definizione di tensione per la struttura corpuscolare della materia va fatta risalire a Poisson, a Cauchy, a Duhamel e a Saint-Venant. Un qualche ruolo ebbero anche Lamé e Clapeyron.

Poisson e Cauchy presentarono due definizioni sostanzialmente simili e nello stesso periodo; non meraviglia quindi che sorse un conflitto, sulla priorità e un conflitto di priorità ancora più aspro sorse tra Poisson e Navier (vedi Belhoste, pag. 100)[11], non tanto sul concetto di tensione quanto sul modo di trattare i solidi elastici. La definizione data dai due scienziati francesi si prestava a qualche critica, come farò vedere in seguito, e Saint-Venant propose una propria definizione (suggerita in parte da Duhamel) che alla fine fu generalmente accettata; anche da Cauchy. A differenza di Navier che considera di fatto solo le forze intermolecolari che si destano a seguito degli spostamenti rispetto alla posizione di equilibrio, tutti gli autori che trattano della pressione nel modello molecolare della materia considerano le forze totali $f(r)$ che agiscono sulle molecole, salvo dimostrare che nello stato di equilibrio naturale la risultante delle forze totali che agiscono su ogni molecola è nulla.

3.3.1 - La pressione secondo Poisson

Riporto prima la definizione di Simon Denis Poisson (1781-1840) non tanto perché sia quella sviluppata per prima ma piuttosto perché, essa, almeno per quello che riguarda la definizione in sé è la più chiara. Poisson affronta il problema in due lavori *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques* (Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1829, tome VIII, pagg. 357-570; letto all'Accademia il 14 aprile 1828) e *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du Mouvements des corps solides élastiques et des fluides* (Journal de l'École polytechnique, Cahier 20, 1831, pagg. 1-174, letto all'Accademia il 12 ottobre 1829). Per una maggiore comprensibilità riporto prima la definizione di pressione del lavoro del 1829, perché più precisa, poi riporto una sintesi del lavoro del 1828, da confrontare con quello di Cauchy dell'analogo periodo, da cui si vedrà che quest'ultimo presenta degli sviluppi meglio articolati. Ecco cosa scrive Poisson nel 1829:

[…] sia M un punto situato all'interno di un corpo, a una distanza sensibile dalla superficie [esterna]. Da questo punto conduciamo un piano che divide il corpo in due parti, e che, per semplicità, supponiamo orizzontale. Indichiamo con A la parte superiore e con A' la parte inferiore, nella quale includiamo anche i punti materiali appartenenti al piano stesso. Dal punto M, come centro, descriviamo una sfera che comprenda un grandissimo numero di molecole, ma il cui raggio sia ciò nonostante piccolo rispetto al raggio di azione delle forze molecolari. Sia w l'area della sua sezione trasversale. Su questa sezione costruiamo in A un cilindro verticale, la cui altezza sia uguale almeno al raggio di azione delle molecole; chiamiamo B questo cilindro. L'azione delle molecole di A' su quelle di B, divisa per l'area w sarà la

[11] Molti anni dopo Cauchy scriveva: "Delle formule analoghe si trovano alla pagina 375 di una Memoria pubblicata da M. Poisson […]. Se non l'ho citata nell'articolo che è riportato nei Comptes Rendus delle scienze del 23 giugno [1845?] ciò dipende dal fatto che avevo scritto quest'articolo in campagna e potevo consultare solo i miei ricordi" (*Observation sur la pression que supporte un élément de surface plane dans un corps solide ou fluide,* Comptes Rendus, 1845).

PRESSIONE esercitata da A' su A, riferita all'unità di superficie e al punto M (Poisson, Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du Mouvements des corps solides élastiques et des fluides (Poisson, Mémoire sur les équations générales de l'équilibre … ; pag. 29).

La definizione è chiarissima e non necessita di spiegazioni; meno chiaro è il motivo che ha portato ad assumere questa definizione.

Nel suo lavoro del 1828 (*vedi* figura 2), Poisson considera una superficie elementare w centrata sul punto M su cui vuole calcolare la pressione e un sistema locale di coordinate che ha l'asse z_1 perpendicolare a w.

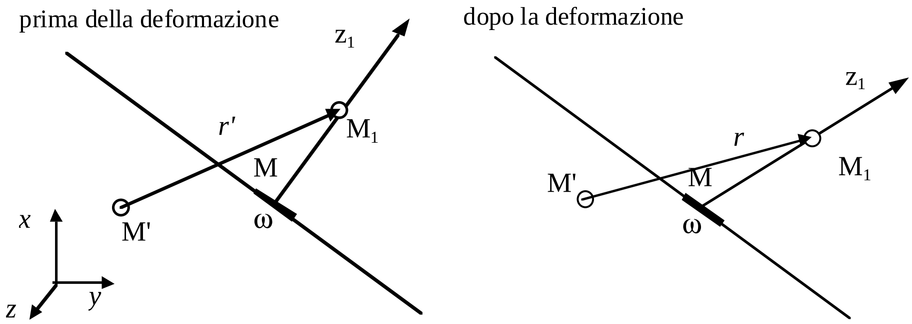

Figura 2

La forza che un punto M', situato sul semipiano z_1<0, prima della deformazione, esercita su un punto M_1 situato sull'asse z_1, dalla parte positiva, ha le componenti:

$$\cos\alpha f(r); \quad \cos\beta f(r); \quad \cos\gamma f(r)$$

ove r è la distanza tra M' e M_1 dopo la deformazione e a, b, g sono gli angoli che$r$ forma con gli assi di un sistema globale di coordinate, Oxyz, ed *f(r)* è la funzione che esprime la forza tra le molecole in funzione della loro distanza, con una legge che può variare da molecola a molecola.

Per ottenere la pressione su w bisogna sommare le forze che tutti i punti M' esercitano su tutti i punti interni al cilindro di asse z_1>0 e area w, prima della deformazione. Allo scopo Poisson considera prima la somma di tutte le forze che agiscono su un fissato M_1 dovute a tutti i punti M'; somma poi ciascuno di questi valori facendo variare M_1 sull'asse z_1>0. Infine moltiplica il tutto per il numero di molecole contenute sulla superficie w "assai piccola in modo che i loro valori [delle prime somme] non cambino sensibilmente in tutta la sua estensione, questi prodotti esprimeranno la componente dell'azione totale di questa stessa parte del corpo relativa alla porzione della superficie di cui il punto M fa parte"[12]. Indicando con a_0 la superficie media delle molecole che giacciono su w il loro numero sarà n = w/a_0, la forza complessiva che agisce sulle molecole del cilindro di area w situato dalla parte delle z_1 positive ha componenti:

[12] Poisson dice che le forze interatomiche hanno una legge come funzione della distanza diversa da coppia a coppia di molecole; effettuando il prodotto per il numero di molecole contenute nella superficie elementare w egli si contraddice in quanto assume implicitamente che tutte le leggi siano uguali.

$$\omega\sum\frac{\cos\alpha f(r)}{\alpha_0};\quad \omega\sum\frac{\cos\beta f(r)}{\alpha_0};\quad \omega\sum\frac{\cos\gamma f(r)}{\alpha_0}$$

ove le sommatorie sono estese a tutti i punti M' del semipiano $z_1<0$ e ai tutti i punti M_1 dell'asse z_1 dal lato positivo. Le parti entro le sommatorie rappresenteranno pertanto le componenti della pressione sulla superficie w rispetto agli assi di riferimento (forza diviso superficie).

3.3.2 - La pressione secondo Cauchy

Cauchy riporta la sua definizione di pressione nel lavoro *De la pression ou tension dans un système de points matériels* del 1828 (Œuvres complètes, 2, **8,** 253-277). La pressione è definita esattamente nello stesso modo di Poisson, ancora senza spiegare le ragioni della scelta. Diverso rispetto a Poisson è il modo di esplicitare la somma e di trattare le forze intermolecolari che hanno adesso una legge unica forza distanza, in cui vengono fatte comparire esplicitamente anche le masse delle molecole; inoltre Cauchy calcola direttamente le componenti della pressione su piani paralleli a quelli coordinati. Per esempio per quanto riguarda la tensione su piani paralleli a xy e con riferimento alla figura 3, sia s un elemento di superficie del piano xy, piccolo ma di diametro molto maggiore delle distanze intermolecolari. Sia V un cilindro ortogonale a xy di base s e altezza l, dalla parte delle x negative. Siano poi m', m''… le molecole che stanno dalla parte delle x positive e m_1, m_2, … le molecole del cilindro V e sia m la molecola situata nel baricentro di s.

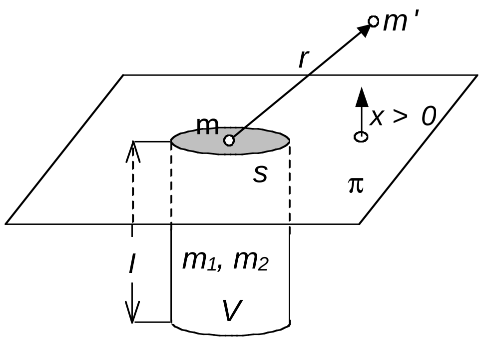

Figura 3

La forza che una singola molecola m' esercita su m è fornita da $m'\,m\,f(r)$**,** ove $f(r)$ rappresenta la forza intermolecolare per massa unitaria in funzione della distanza intermolecolare r. Volendo conoscere la componente di tale forza in direzione x basta moltiplicare per cos a, essendo a l'angolo tra r e x (in quanto $f(r)$ ha la direzione di r). La componente in direzione x della forza esercitata da tutte le molecole m', m'' … su m si ottiene sommando su tutte le molecole m':

$$\sum m'\,m\cos\alpha f(r) \qquad \text{(a)}$$

Per trovare la risultante delle forze che le molecole m', m'' … esercitano su tutte le molecole m_1, m_2, …, Cauchy considera tutte le molecole di V situate a distanza r da una qualsiasi delle molecole m', m'', …, secondo quanto illustrato nella figura 4.

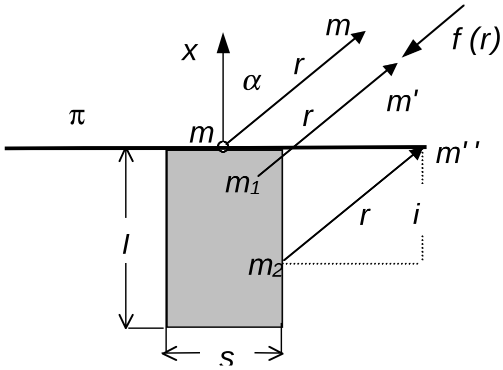

Figura 4

Come appare chiaro da questa figura esse sono contenute nella porzione di V di altezza $i = r$ cos a. Supponendo tutte le molecole uguali tra loro e di massa m, il numero di esse nel cilindro di altezza i è fornito da $n = D\ sr$ cos a/m, ove D è la massa specifica. Moltiplicando per tale valore i termini della sommatoria (a), si ottiene:

$$\Delta\sum m'\, r\cos^2\alpha f(r) s \qquad \text{(b)}$$

ove adesso la sommatoria è estesa solo alle molecole m', m'',..... Dividendo per la superficie s si ottiene la componente della pressione sulla faccia perpendicolare all'asse x nella direzione x, che Cauchy indica con la lettera A:

$$A = \Delta\sum m'\, r\cos^2\alpha f(r) \qquad \text{(c)}$$

Se si calcola la pressione esercitata su s dalle molecole della parte negativa delle x si ottiene un'espressione analoga, ove la sommatoria è estesa a tutte le molecole dalla parte delle x negative. Pertanto in luogo della (c), Cauchy suggerisce di usare l'espressione:

$$A = \frac{1}{2}\Delta\sum m' r\cos^2\alpha f(r)$$

ove adesso la sommatoria è estesa a tutte le molecole intorno a m. Le componenti della pressione sulla faccia xy nelle direzioni y e z sono poi fornite da:

$$F = \frac{1}{2}\Delta\sum m' r\cos\alpha\cos\beta f(r) \qquad E = \frac{1}{2}\Delta\sum m' r\cos\alpha\cos\gamma f(r)$$

3.3.3 - La pressione secondo Lamé

Nel 1828 Gabriel Lamé (1795-1870) e Benoit Paul Emile Clapeyron (1799-1864) presentarono all'Accademia di Parigi un lavoro basato sulla teoria molecolare dell'elasticità, pervenendo sostanzialmente agli stessi risultati di Navier nel 1822, pare senza conoscerne il lavoro. Ciò è credibile in quanto essi erano isolati dall'ambiente culturale francese, lavorando come ingegneri in Russia. Nella memoria presentata all'Accademia arrivarono anche a formulare delle espressioni della tensione nell'ambito della teoria molecolare dell'elasticità (Navier, 1864; pag. clxvij). Una formulazione chiara della loro concezione di pressione si trova nelle *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* di Lamé, del 1852.

La definizione di tensione di Lamé è la stessa di quella di Cauchy e di Poisson e non sto quindi a ripeterla in dettaglio. Dopo avere introdotto la tensione, riferendosi ad essa con il nome di forza elastica, assume implicitamente il postulato di Eulero-Cauchy. Se E w è la forza elastica attraverso la superficie w, il coefficiente E[13] "e i suoi due angoli di direzione F, Y, sono in realtà, nel caso dell'equilibrio, delle funzioni di cinque variabili, cioè le tre coordinate x, y, z del punto M, e dei due angoli f e y, adatti a determinare la direzione della normale alla superficie w". Quindi in un punto assegnato la tensione E dipende solo dalla normale alla superficie in esame.

Sono molto interessanti, anche se non necessariamente condivisibili, alcune considerazioni di Lamé sui diversi modi di definire la tensione; facendo riferimento alla definizione della pressione sulla base della teoria molecolare, Lamé scrive:

> Si può dare della forza elastica un'altra definizione, in apparenza più semplice di quella precedente [basata sulla teoria molecolare]. Immaginiamo che il corpo solido, leggermente deformati, in equilibrio elastico, sia tagliato da un piano LN in due parti, A e B. La soppressione di A distruggerà evidentemente l'equilibrio di B; ma si può ammettere che tale equilibrio possa essere conservato se si applicano nello stesso tempo, su ciascuna parte w del piano tagliante, una forza w E d'intensità e di direzione opportuna. Questa forza w E è precisamente la forza elastica esercitata da A su B e riferita all'elemento piano w di cui il punto M fa parte. La forza elastica, così definita, è analoga alla tensione in ciascun punto di un filo in equilibrio, o piuttosto la tensione del filo è un caso particolare della forza elastica (Lamé, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, 1852; pagg. 10-11).

Si noti come Lamé usa l'analogia del filo teso per definire la tensione, ritenendola probabilmente più significativa dell'analogia del fluido utilizzata da Cauchy, in quanto tutto rimane all'interno dei corpi elastici; non bisogna comunque dimenticare che lo scritto di Lamé è di circa trenta anni più tardo di quello di Cauchy e quindi è normale che se la sua definizione possa apparire più interessante. Continua poi Lamé:

> Ma se questa definizione è più rapida, essa non fornisce un'idea precisa della forza elastica, e sotto questo punto di vista la sua semplicità non è che una pura illusione. Quando si dice che una forza è applicata alla superficie di un corpo, ci si serve di un'espressione molto vaga, che un lungo uso e la sua accettazione generale non rendono affatto più chiara. Se si cerca di rendere conto del modo con cui la pressione di un gas si comunica alla superficie di un corpo solido, si presentano subito allo spirito dubbi e difficoltà. Non si potrà ammettere il contatto immediato delle molecole di gas e delle molecole di solido; si è portati a concepire una forza revulsiva, che il solido oppone alla sua penetrazione, derivante, non solo dalle molecole del primo strato solido ma anche da quelle degli strati interni e vicini [...]
>
> Quando si analizza il modo di applicazione di una trazione alla superficie di un solido, si è condotti anche qui a concepire delle forze tra strati sottili. Più in generale, tutti gli effetti che hanno luogo a contatto dei corpi, e anche il senso del tatto, non possono spiegarsi in modo soddisfacente se non facendo intervenire l'azione mutua degli strati interni. Così, la prima definizione che abbiamo dato della forza elastica, non solo è completa, ma inoltre può servire alla spiegazione di altri fenomeni; tuttavia, noi adottiamo la seconda. Precisata dalle considerazioni precedenti, appoggiate sull'analogia con la tensione, essa fa intuire con poche parole il ruolo

[13] Lamé si riferisce generalmente a E come a un coefficiente, mentre la forza elastica è wE. Talvolta però qualifica direttamente E come forza elastica.

importante delle forze elastiche nei fenomeni di cui ci occupiamo (Lamé, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, 1852; pagg. 11-12).

La conclusione, secondo cui sebbene la prima definizione sia più corretta, conviene di fatto scegliere la seconda, appare in contrasto con quanto Lamé ha affermato poco prima dicendo che "sotto questo punto di vista la sua semplicità non è che una pura illusione" ed esprime lo spirito pragmatico di un ingegnere. Si sa che il concetto di forza come azione di contatto presenta molti problemi da un punto di vista filosofo, però se non si è troppo puristi, questo concetto, o per ragioni intrinseche o per la sua diffusione nella vita di tutti i giorni, si presta ottimamente a fare dei ragionamenti sul comportamento dei corpi sotto l'azione delle forze esterne. Anche Cauchy sembra avere un'idea vicina a quella di Lamé, che invece era respinta dal "rigoroso" Saint-Venant.

3.3.4 - La tensione secondo Saint-Venant

Saint-Venant, fa notare che se, con Poisson e Cauchy, si considerano "le azioni esercitate sulle molecole di un cilindro retto innalzato su questa faccia come base, da parte di tutte le molecole situate dalla parte opposta del piano di questa faccia", si vede "facilmente" che non vale la proprietà che sembra necessario richiedere alla pressione, secondo cui "la risultante delle pressioni sulle diverse facce di un elemento poliedrico coincide con la risultante sulle azioni esercitate sulle molecole di questo elemento da parte delle molecole esterne (Navier, *Resumé des lecons donné a l'école des pontes et chaussées* .., pag. 544)"; pertanto egli suggerisce una definizione diversa.[14] Come già accennato la definizione di Saint-Venant verrà poi accettata anche da Cauchy: "M. Cauchy, in una nota relativa alla meccanica razionale, inserita in Comptes Rendus del 23 luglio, pag. 1765, ha voluto ben citare, come più esatta [...] quella che io ho dato nel 1834 e nel 1837"[15].

La definizione di pressione secondo Saint-Venant è la seguente: "La pressione su un elemento molto piccolo va definita come la risultante delle azioni di tutte le molecole situate da un lato su tutte le molecole situate dall'altro lato, e di cui le direzioni [delle congiungenti le molecole] attraversano questo elemento (Saint-Venant, *Note sur la pression dans l'intérieur des corps ou à leurs surfaces de séparation*, pag. 24". "Duhamel ha proposto per primo questa seconda definizione, ma senza soffermarvisi, (Navier, *Resumé des lecons donné a l'école des pontes et chaussées* .., pag. clviij"[16] .

Per calcolare la tensione Saint-Venant ragiona nel modo seguente. La forza scambiata tra due molecole m' e m'' disposte da parti opposte rispetto a una superficie elementare w, perpendicolare all'asse x, è rappresentata da: $m'm''\,f(r)$. ove $f(r)$ è la funzione che esprime l'azione molecolare per unità di massa in funzione della distanza r tra le molecole. Per ottenere la pressione sull'area w bisogna calcolare la

---

[14] Anche se come si vedrà la formula ottenuta da Cauchy coincide con quella ottenuta da Saint-Venant.

[15] Saint-Venant torna sulla sua definizione di tensione in varie occasioni. A parte le definizioni degli anni 1834 e 1837 che non sono documentate da articoli o memorie (almeno non li ho trovati) e quella dai Comptes Rendus riferita più avanti, vanno citate anche quella riportata nel n° 524 del 1843 del Journal dell'*Institut*, quella riportata ne *La torsion des prismes* del 1853 e quella dell'appendice III del commento di Saint-Venant all'opera di Navier (1864, pag. 544).

[16] Non sono riuscito a trovare nessun articolo di Duhamel in cui egli dia la definizione di pressione che sia Cauchy sia Saint-Venant gli attribuiscono. Saint-Venant fornisce anche un'indicazione bibliografica; l'articolo di Duhamel in cui viene introdotta, sia pure di passaggio, la definizione di pressione sarebbe sul 21° cahier del Journal dell'École polythecnique del 1828 a pagina 213. Purtroppo quest'indicazione non è corretta; su questo numero del Journal c'è un articolo di Duhamel, in pagine diverse da quella indicata, che però parla di flusso di calore.

risultante di tutte le forze tra le molecole m' e m'' situate da lati opposti rispetto a w e tali che la attraversino. A questo proposito Saint-Venant considera insieme tutte le molecole che si trovano a una stessa distanza r - in modulo e direzione; esse sono contenute nel cilindro obliquo di base w e lato r, secondo quanto illustrato nella figura 5.

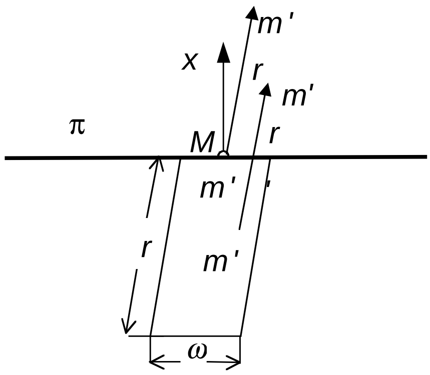

Figura 5

Supponendo tutte le molecole uguali tra loro e di massa m'', si hanno $n = g\ w\ r$ cos rx/m'' molecole. Pertanto la forza totale associata alla direzione r è data da:

$$p_r = \gamma \omega r m' \, f(r) \cos rx \qquad \text{(a)}$$

La componente, per esempio nella direzione y, è fornita da $p_{ry}=p_r \cos ry$. Per ottenere la componete p_{xy} della pressione attraverso w bisogna sommare tutte le p_{ry}, facendo variare m' ed r e dividere il tutto per w. Si ha quindi:

$$p_{xy} = \gamma \sum r\ m' \ f(r) \cos rx \cos ry \qquad \text{(b)}$$

La (b) si può riscrivere in modo più utile reinterpretando r come la distanza di una molecola qualsiasi m dal baricentro della superficie w e considerando tutte le molecole m situate attorno a w, da entrambe le parti, e dividendo per 2:

$$p_{xy} = \frac{1}{2} \gamma \sum r\ m\ f(r) \cos rx \cos ry \qquad \text{(c)}$$

Saint-Venant si pone anche il problema che le forze p_r possano provocare delle coppie, ma liquida la cosa sostenendo che si tratta di "coppie piccolissime di ordine superiore" e quindi non degne di considerazione.

3.4 - Somme e integrali

Nello studio dell'equilibrio e del moto dei corpi seguendo il modello molecolare, Cauchy e Poisson (e in qualche misura anche Navier) pervengono a delle equazioni in cui compaiono dei coefficienti espressi da sommatorie del tipo $\sum mrf(r)$. Naturalmente tali somme non possono essere esplicitate perché le funzioni $f(r)$ non sono note. Può avere però interesse svilupparle in parte, mantenendo ancora incognita la funzione $f(r)$, oppure facendo delle assunzioni limitate su di essa. Per questo è necessario trasformare le sommatorie in integrali tripli. Ciò crea però dei problemi in quanto può condurre a risultati assurdi; l'argomento che è stato oggetto di varie discussioni (Navier, *Resumé des lecons donné a l'école des pontes et chaussées* .., pagg. cixj-cixvij), deriva la sua problematicità dalla sostituzione di un modello discreto - quello molecolare - con un modello continuo - quello richiesto dall'integrale triplo - e nel dover far variare la distanza intermolecolare *r* tra zero e infinito.

Per essere più precisi riporto alcuni passaggi, tratti dal lavoro di Cauchy, *Sur l'équilibre et le mouvement d'un système des points matériels* … del 1828, pagg. 202 - 205. Posto:

$$G = \frac{1}{2}\sum mr\cos^2\alpha\left|f(r)\right| \qquad R = \frac{1}{2}\sum mr\cos^2\alpha\cos^2\beta f(r) \qquad \text{(a)}$$

in cui a e b sono gli angoli che *r* forma con *x* e *y*, Cauchy dimostra che la costante $k = G + R$, nell'ipotesi di piccoli spostamenti, collega le tensioni tangenziali alle distorsioni. Se si trasformano le sommatorie in integrali tripli si può pervenire al risultato assurdo secondo cui $k = 0$ e quindi che, nei corpi elastici, le tensioni tangenziali sono sempre nulle. Infatti, se si immagina di concentrare un certo numero di molecole, comunque molto grande, in un elemento di volume dV - il che secondo Cauchy "comporta fare astrazione dalle molecole *m, m', m''* , …, che sono più vicine alla molecola Arial [sotto studio]" - la (a) si può riscrivere con simboli moderni, nella forma:

$$G = \frac{1}{2}\Delta\int_V r\cos^2\alpha\left|f(r)\right|dV \qquad R = \frac{1}{2}\Delta\int_V r\cos^2\alpha\cos^2\beta f(r)dV \qquad \text{(b)}$$

ove D è la massa specifica e il volume V comprende tutte le molecole che esercitano un'azione non trascurabile sulla molecola sotto osservazione Arial. Se si fa l'ipotesi che $r^4 f(r)$ tenda a zero per r tendente a zero e che $f(r)$ decresca più rapidamente di $1/r^4$, Cauchy dimostra (pag. 203) che i due integrali della (b) forniscono $G + R = 0$.

Secondo Saint-Venant questa difficoltà nel calcolo degli integrali non è solo di carattere matematico ma esprime il fatto che i corpi non possono essere modellati come un continuo, ovvero che la materia ha una struttura atomica. Scrive Saint-Venant:

Esse [le considerazioni sulle difficoltà sopra riferite] provano, come Fresnel aveva già fatto notare, con una grande sagacità, per l'etere, che i corpi, come i fluidi non possono essere formati da una materia continua; conclusione che estesa alle particelle ultime, fa sparire anche gli atomi estesi e figurati, ma invariabili e indivisibili, di Leucippo e Democrito (Navier, Resumé des lecons donné a l'école des pontes et chaussées .., pag. cixij).

La conclusione di Saint-Venant non mi sembra così necessaria, perché si può anche sostenere che il problema è effettivamente matematico e non metafisico e può essere risolto modellando le forze del continuo in modo diverso rispetto a quello che si può fare per il discreto.

3.5 - Il teorema fondamentale di Cauchy nella teoria molecolare

La concezione continuista della pressione impegna meno dal punto di vista fisico; è una teoria con minore contenuto empirico rispetto alla concezione molecolare e quindi meno soggetta a falsificazione. È chiaro che questa sua caratteristica è anche una debolezza; essa è una teoria meno ricca in quanto dice meno sulle proprietà dei corpi elastici.

La storia della meccanica dei corpi solidi e fluidi ha dimostrato che la teoria molecolare è incompatibile con i risultati sperimentali e quindi da rigettare; appena oggi si riescono a capire i motivi di questo fallimento e sono state presentate teorie corpuscolari più articolate, che possono trovarsi in accordo con i "dati". Quindi è la teoria continuista di Cauchy che è adottata nei manuali che trattano del comportamento meccanico dei corpi. In questi manuali l'analisi statica dei corpi è divisa in tre parti; l'analisi dello stato tensionale, l'analisi del cinematismo e l'analisi del legame costitutivo; con il modello molecolare non sarebbe possibile uno studio separato dei singoli aspetti. Per comprendere in parte le differenze che si originano nel problema statico tra il modello continuo e quello corpuscolare della materia è utile vedere come si presenta nei due casi il teorema fondamentale di Cauchy.

Nella teoria continuista il teorema fondamentale di Cauchy (eq. 20, paragrafo 2.2) viene ottenuto sulla base delle sole equazioni della statica - con l'ipotesi aggiuntiva che la tensione non dipende dalla particolare forma della superficie che lo contiene ma dipende solo dalla direzione della normale a tale superficie (postulato di Eulero-Cauchy) - e non dipende dal legame costitutivo. Nella teoria molecolare la dimostrazione di tale teorema richiede invece l'ipotesi di piccoli spostamenti con la conseguente linearizzazione del legame costitutivo; per compenso non sembra necessario postulare il lemma di Eulero-Cauchy. Questa dimostrazione, suggerita ma non riportata esplicitamente da Cauchy, consiste nello scrivere le espressioni delle componenti del tensore della tensione *A, F, E, B, D, C* nella forma riportata nel paragrafo 3.3.2 e l'equazione della tensione *p* per una giacitura qualsiasi, identificata dai coseni direttori, a, b, g. Queste espressioni vengono poi semplificate ammettendo che le funzioni *f(r)* varino linearmente con *r* per piccoli spostamenti intorno alla posizione di equilibrio, inoltre si linearizzano anche le relazioni cinematiche che esprimono la variazione di *r*. Dal confronto di tutte le relazioni così ottenute si perviene al teorema fondamentale di Cauchy nella forma dell'equazione 20.

Una teorema analogo al teorema fondamentale di Cauchy fu ottenuto da Fresnel nel 1820 nei suoi studi sulla rifrazione della luce, trattata secondo l'approccio ondulatorio, in cui il mezzo etereo che trasmetteva le onde luminose era considerato come formato da punti materiali. L'enunciato del teorema era il seguente:

> Allorché si tratta di piccoli spostamenti, e qualunque sia la legge delle forze che le molecole esercitano le une sulle altre, lo spostamento di una molecola in una direzione qualsiasi, produce una forza repulsiva uguale, in grandezza e direzione, alla risultante di tre forze repulsive prodotte da tre spostamenti ortogonali di questa molecola, uguali alle componenti statiche del primo spostamento (Fresnel, Supplément au mémoire sur la double réfraction, 1821, Œuvres complètes, pag. 344-345).

Questo teorema, che riguarda le forze tra le molecole e non le tensioni e che "è pressoché evidente (Navier, *Resumé des lecons donné a l'école des pontes et chaussées* .., pag. clij)" fu ripresentato da Cauchy nell'*Addition* dell'articolo *De la pression ou tension dans un corps solides*, citando correttamente Fresnel. Esso viene dimostrato nell'ipotesi di piccoli spostamenti che consentono semplificazioni sia nel cinematismo, sia nel legame costitutivo, in modo da poter venire linearizzati entrambi. La formula che Cauchy ottiene è:

$$P\cos\lambda = A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma$$
$$P\cos\mu = F\cos\alpha + B\cos\beta + D\cos\gamma$$
$$P\cos\nu = E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma$$

ove *P* è la forza, di coseni direttori cos l, cos m e cos n, che si esercita su una molecola *m* per uno spostamento unitario nella direzione *r* definita dai coseni direttori cos a, cos b e cos g, mentre *A, F, E* sono le componenti della forza che si desta in m per uno spostamento unitario nella direzione x, F, B, D, le componenti della forza in m per uno spostamento unitario nella direzione y ed E, D, C, le componenti della forza in m per uno spostamento unitario nella direzione z.

4 - Conclusioni

C'è un periodo nel secolo XIX in cui si fronteggiano due definizioni di tensione, da un lato quella derivata dall'idrostatica, sviluppata da Cauchy, che presuppone una modellazione continua della materia; essa è più vicina al senso comune, non fosse altro perché è in continuità con concetti oramai consolidati. Dall'altro lato c'è la concezione molecolare, dovuta a Poisson, a Saint-Venant e ancora a Cauchy, basata sull'ipotesi della costituzione atomica della materia in cui gli atomi assumono il ruolo di centri di forze. Questo secondo modo di concepire la tensione appare più realistico, però essa sembra sfuggire all'intuizione, trasformandosi in un immateriale flusso di "forze". Il commento di Lamé sui due diversi modi di definire la tensione, quello continuista e quello molecolare, è particolarmente illuminante: "Così, la prima definizione [quella molecolare] che abbiamo data della forza elastica, non solo è completa, ma inoltre può servire alla spiegazione di altri fenomeni. Tuttavia, noi adottiamo la seconda [quella continua]" perché più vicina al senso comune.

Naturalmente il mistero che investe la pressione è il mistero che riguarda la forza, un concetto che ad oggi non è completamente inteso e che è ancora vitale nonostante le istanze di carattere antimetafisico del positivismo vecchio e nuovo, che però non ha saputo sviluppare la meccanica alternativa nata dalle idee di Leibniz, d'Alembert e Lazare Carnot, che forse poteva evitare tale concetto.

In un primo tempo la concezione molecolare è prevalente; poi essa viene gradualmente abbandonata, seppure a malincuore dato il suo fascino, perché in contrasto con i risultati sperimentali. La teoria continuista sviluppata dal primo Cauchy resiste invece alla forza dei "dati sperimentali" e ancora oggi, nonostante un ritorno di teorie molecolari più sofisticate di quelle del secolo XIX, è dominante, perlomeno nelle applicazioni.

Bibliografia

BARRÉ DE SAINT-VENANT A. J. C., Note sur la pression dans l'intérieur des corps ou à leurs surfaces de séparation, *Comptes Rendus*, Tome 21, 1845; 24-26.

BARRÉ DE SAINT-VENANT A. J. C., Mémoire sur les sommes et les différences géométriques, et sur leur usage pour simplifier la Mécanique, *Comptes Rendus*, Tome 21, 1845; 620-625.

BARRÉ DE SAINT-VENANT, A. J. C., *De la torsion des prismes. Avec Considérations sur leur flexion*, Imprimerie Impériale, Paris, 1855.

BELHOSTE B., *Augustin-Louis Cauchy, a biography*, Springer-Verlag, New-York, 1991.

BIOT J. B., *Traité de physique expérimentale et mathématique*, Detrville, Paris, 1816

BENVENUTO E. e Becchi A, Sui principi di filosofia naturale che orientarono la scelta di Saint-Venant, *Omaggio a Ceradini*, Dip. Ingegneria strutturale e geotecnica, Università di Roma, 1988, pagg. 125-128.

BENVENUTO E., CORRADI M. E FOCE F., Considerazioni critiche sulle cosiddette relazioni di Cauchy, *Atti XI congresso AIMETA*, Trento, 1992, pagg. 79-84.

BERNOULLI JOHANN, *Opera Omnia*, Marc Michel Bousquet, Losanna-Ginevra, 1762.

BOSCOVICH R. J., *Theoria philosophiae naturalis: redacta ad unicam legem virium in natura existentium*, (1758) (latin-english edition) Open Court, Londra, 1922.

CAPECCHI D., *La tensione secondo Cauchy,* Hevelius*,* Benevento, 2001.

CAPECCHI D., *Scienza delle costruzioni*, CISU, Roma, 1995.

CAUCHY A., *Oeuvres completes*, Gauthier-Villars, Parigi, 1882-1974.

CLEBSH R. F. A., *Thèorie de l'èlasticité des corps solides*, Dunod, Parigi, 1883.

EULER L.; Leonhardi Euleri Opera Omnia, Fussli Turici, Losanna 1954.

FOCE F., The theory of elasticity between molecular and continuum approach in the XIX century, in *Between Mechanics and architecture*, Birkhauser, Basilea, 1995 (p. 301-314).

FRESNEL A. J., Supplément au mémoire sur la double réfraction (1821), Oeuvres Complètes d'Augustin Fresnel, Imprimerie Impériale, Paris, 1868..

GALILEI G., *Discorsi e dimostrazioni matematiche* (*1638*)*,* Boringhieri, Torino, 1958.

JAMMER M., *Storia del concetto di forza*, Feltrinelli, Milano, 1971.

MACH E., *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico* (*1883*), Boringhieri, Torino, 1992.

NAVIER C.L.M.H., *Résumé des leçons donnés a l'école des pontes et chaussées …* (avec des notes et des appendices par M. BARRÉ DE SAINT-VENANT, Dunod, Paris, 1864.

NAVIER C.L.M.H., Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastique (1821), *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, (1824) 1827, Tome VII, pagg. 375-393.

NEWTON I., *Scritti di ottica* (1669-), a cura di A. Pala, UTET, Torino, 1997.

POISSON S. D., Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques (1828), *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 1829, tome VIII, pagg. 357-570

POISSON S. D., Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvements des corps solides élastiques et des fluides (1829), *Journal de l'École polytechnique*, Cahier 20, 1831, pagg. 1-174)

THACKRAY A., *Atomi e forze*, Il Mulino, Bologna, 1981.

TODHUNTER I., PEARSON K., *A history of the theory of elasticity and the strength of materials from Galilei to the present time*, Part 1-2, Cambridge, 1886-1889.

TIMOSHENKO S. P., *History of strength of materials*, Dover, New York, 1983.