Levi-Civita e il problema classico dei tre corpi

Luca Dell'Aglio[1]

1 - Introduzione

Sono vari i motivi di interesse storiografico che presenta la questione dei rapporti tra l'opera di Tullio Levi-Civita e il problema classico dei tre corpi. Si tratta di motivi che riguardano questioni di carattere sia tematico – in relazione ai contenuti e ai risultati delle ricerche del matematico italiano – che di metodo – in connessione al modo specifico in cui tali contenuti e risultati sono affrontati e ottenuti. Per ragioni di natura descrittiva, si inizierà dagli aspetti tematici della questione, per arrivare poi a trattare quelli metodologici, di particolare interesse perché connessi alla visione di fondo che Levi-Civita presenta, nel corso delle sue ricerche, del problema classico dei tre corpi come prototipo di un generico problema di carattere fisico-matematico.

2 - Cenni sul problema classico dei tre corpi a fine Ottocento

Riguardando in gran parte il periodo a cavallo tra il XIX e il XX secolo, le ricerche di Levi-Civita sul problema classico dei tre corpi si collocano in un momento particolare nella storia di tale questione. La seconda parte dell'Ottocento rappresenta, infatti, uno dei momenti più critici nell'evoluzione della meccanica celeste classica; momento in cui si assiste alla sostanziale chiusura delle due direzioni di ricerca – l'integrazione diretta e quella per serie delle nove equazioni differenziali del secondo ordine che regolano il moto – che erano state seguite classicamente nello studio del problema dei tre corpi.[2]

Come è ben noto, infatti, vari risultati 'negativi' – relativi sia alla non esistenza di altri integrali primi del moto oltre quelli già noti dall'epoca classica (i sei integrali del centro di massa, i tre del momento angolare e quello dell'energia) sia all'impossibilità di ridurre oltre il sesto l'ordine del sistema di equazioni differenziali che regola il moto – indicavano come l'integrazione delle equazioni del moto non fosse praticamente più perseguibile in modo diretto. D'altro canto, la prova della divergenza delle serie trigonometriche utilizzate in precedenza nella soluzione del problema dei tre corpi oscuravano, almeno da un punto di vista teorico, l'integrazione per serie delle equazioni di moto. Se a questo si aggiunge che anche la ricerca di soluzioni particolari non aveva ricevuto sviluppi dall'epoca delle soluzioni ottenute da Lagrange[3] – in relazione ai casi in cui i corpi restino costantemente allineati o ai vertici di un triangolo equilatero –, ci si rende conto che la fine dell'Ottocento rappresenta un momento di reale crisi nel campo della meccanica celeste classica; crisi che è, in primo luogo, quella dell'idea stessa di 'soluzione' del problema dei tre corpi.

Questo stato di cose apre la strada, nell'ultimo decennio del secolo, a un globale slittamento delle ricerche sul problema dei tre corpi dalla questione dell'integrazione delle equazioni del problema a quella riguardante gli aspetti globali del moto. Si tratta di uno slittamento tematico che ha essenzialmente luogo in due direzioni, connesse ad alcuni sviluppi tardo-ottocenteschi della teoria delle equazioni differenziali ordinarie.

Da un lato, con l'introduzione delle tecniche di carattere qualitativo nello studio del sistema di equazioni differenziali che regola il moto. Si tratta di tematiche che, come è ben noto, si rifanno in ultima analisi alle ricerche di Henri Poincarè sulle traiettorie di un'equazione differenziale ordinaria, e che sono alla base del suo approccio alla meccanica celeste classica; approccio che si realizza principalmente con la pubblicazione della memoria "Sur le problème des trois corps et les équations

---

[1] Dipartimento di Matematica, Università della Calabria.
[2] Cfr. Marcolongo 1919.
[3] Cfr. Lagrange 1873.

de la Dynamique" del 1890 e poi del celebre trattato *Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*[4].

Come è ben noto, queste ricerche dovranno attendere parecchi decenni – e cioè la seconda parte del Novecento – per svilupparsi in modo effettivo nel contesto teorico della moderna analisi qualitativa delle equazioni differenziali ordinarie. esse, tuttavia, a fine Ottocento trovano alcune isolate, ma rilevanti forme di sviluppo: da un lato, in direzione di una estensione di carattere analitico con le ricerche di Ivar Bendixson[5] – cui si deve, tra l'altro, la prima formulazione analitica generale del cosiddetto teorema di Poincaré-Bendixson sulla classificazione delle traiettorie di un'equazione differenziale ordinaria del I ordine (la cui enunciazione originaria caratterizza la prima parte della memoria di Poincaré del 1881); e, dall'altro, con alcune ricerche di Alexander Liapounov[6] che segnano la nascita della moderna teoria della stabilità, contenendo tra l'altro la precisazione del metodo di linearizzazione e l'introduzione di alcuni metodi di carattere qualitativo a esso alternativi (metodo delle funzioni di Liapounov).

Oltre alla nascita e allo sviluppo delle tematiche di carattere qualitativo, lo slittamento degli studi sul problema dei tre corpi verso la trattazione di questioni di carattere globale risulta anche testimoniato, durante la seconda metà dell'Ottocento, da un crescente interesse per le condizioni di regolarità del moto. Più in dettaglio, lo studio delle singolarità nel problema dei tre corpi è una questione che ha origine nell'ultimo decennio dell'Ottocento principalmente per opera del fisico-matematico francese Paul Painlevé, nel contesto teorico della sua teoria analitica delle equazioni differenziali[7]. Painlevé, riuscì, in particolare, a caratterizzare la presenza di tali singolarità nel caso del problema dei tre corpi con i casi di urto tra due o tra tutti e tre i corpi; mostrando, invece, che in tutte le altre circostanze si ha la regolarità del moto e la possibilità di sviluppare le coordinate dei corpi in serie convergenti rispetto a determinate funzioni della variabile temporale. In questa direzione, per superare lo stallo che, come si è detto si era venuto a creare intorno all'idea di 'soluzione', Painlevé indicò l'eventualità precedente – cioè, la sviluppabilità in serie rispetto a una certa funzione della variabile temporale – come condizione equivalente alla risoluzione stessa del problema; ciò che, di fatto, rappresenta la nascita di un'idea formale di 'soluzione' nello studio del problema dei tre corpi e di un problema fisico-matematico in generale. Malgrado questo, le ricerche del fisico-matematico francese presentano in genere una visione concreta del problema dei tre corpi, in cui i corpi vengono (per lo più) considerati in modo non puntiforme e in cui il problema di base relativo alle singolarità del moto è principalmente quello della previsione degli urti – cioè, della determinazione delle circostanze eccezionali che caratterizzano la loro presenza.

Negli stessi anni, tuttavia, tende a emergere, in particolare modo nell'ambiente scientifico scandinavo, un'altra questione riguardante le singolarità del moto nel problema dei tre corpi; di natura più formale, tale questione è relativa alla regolarizzazione del moto – cioè, all'eventuale eliminazione delle singolarità del moto attraverso una opportuna serie di trasformazioni. Sulla scia di una prima regolarizzazione delle equazioni nel caso ristretto del problema dei tre corpi ottenuta nel 1896, da un punto di vista strettamente algoritmico, dall'astronomo danese T.N. Thiele,[8] la questione della eliminazione delle singolarità delle equazioni del moto acquista una propria autonomia da un punto di vista teorico nello stesso anno,

[4] Cfr. Poincaré 1881, 1882, 1885 per la nascita dell'analisi qualitativa e Poincaré 1886, 1890, 1892-1899 per le maggiori applicazioni di questa teoria in meccanica celeste.
[5] Bendixson 1901.
[6] Liapounov 1907(1892).
[7] Cfr. Painlevé 1896a, 1896b, 1897a, 1897b.
[8] Thiele 1896.

quando compare esplicitamente come tema di un premio indetto dall'Accademia Reale delle Scienze di Danimarca.[9] Si tratta di una tradizione di ricerca che trova il suo culmine qualche anno dopo nei lavori dell'astronomo finlandese Karl F. Sundman[10]; lavori in cui il problema della regolarizzazione delle equazioni del moto trova una completa soluzione tramite la dimostrazione della olomorfia delle soluzioni rispetto ai valori di una variabile ausiliare, in corrispondenza biunivoca con il tempo. E' interessante osservare che, sulla base dello slittamento che, come detto, si va producendo in questi anni nell'idea di 'soluzione' di un problema fisico-matematico, tale risultato fu visto da parte della comunità scientifica dell'epoca come la 'soluzione' stessa del problema dei tre corpi. Esso, di fatto, faceva leva su una visione estremamente astratta del problema dei tre corpi, prevedendo, tra l'altro, la considerazione del moto dei corpi anche dopo un eventuale urto, tramite (da un punto di vista tecnico) un prolungamento analitico delle soluzioni.

3 - Il quadro delle ricerche di Levi-Civita sul problema classico dei tre corpi

Illustrato brevemente lo stato degli studi sul problema classico dei tre corpi a fine Ottocento, vediamo in quale modo si inseriscono le ricerche di Levi-Civita in questo quadro. Appartenenti al periodo patavino dell'attività scientifica del matematico italiano[11], tali ricerche possono essere suddivise, da un punto di vista sia temporale che tematico, nelle seguenti fasi essenziali:

1. una serie di ricerche (1899-1901) relative alla questione della stabilità delle orbite periodiche nel problema ristretto dei tre corpi[12] (cioè, in quella forma particolare del problema dei tre corpi – introdotta e a lungo trattata da Poincaré nelle sue opere di meccanica celeste – in cui si considera il moto di un corpo di massa trascurabile sul quale agiscono gli altri due, di massa finita e che si suppongono muoversi in moto kepleriano, attorno al loro centro di massa);
2. una prima serie di lavori (1903-1906) riguardanti il tema della singolarità delle equazioni del moto, con particolare riguardo per la questione della loro previsione[13];
3. una seconda serie di ricerche (1915-1916) riguardanti il tema della singolarità delle equazioni del moto, in relazione ora alla questione della loro eliminazione (cioè, come detto, alla questione della regolarizzazione delle equazioni del moto)[14].

Questo è il quadro delle ricerche più rilevanti di Levi-Civita sul problema classico dei tre corpi[15], che rappresenta a sua volta una parte considerevole della sua opera complessiva nell'ambito della meccanica celeste classica. In tale quadro si può notare una certa preponderanza delle ricerche riguardanti gli aspetti globali del moto, ambiti in cui le opere del matematico italiano segnano dei momenti di decisiva importanza, come si cercherà di illustrare nei prossimi paragrafi.

---

[9] "Questions mises au concours por l'année 1896", *Oversigt over det Kongelige Videnskabernes Selksbas Forhandlinger*, 1896, pp. I-IV; IV-V.
[10] Cfr. Sundman 1907, 1909, 1910, 1912.
[11] Cfr. Amaldi 1946; Galletto 1973; Hodge 1942.
[12] Levi-Civita 1900a, 1900b, 1900c, 1901.
[13] Levi-Civita 1903a, 1903b, 1904a, 1904b, 1906.
[14] Levi-Civita 1915a, 1915b, 1915c, 1916a, 1916b, 1918.
[15] Come conseguenza del continuo rapporto tra innovazione e tradizione che caratterizza la opera di Levi-Civita, a essa appartiene anche un lavoro sul problema dei tre corpi riguardante un tema classico come quello della riduzione dell'ordine del sistema di equazioni differenziali che regola il moto: cfr. Levi-Civita 1915a.

4 - Levi-Civita, l'analisi qualitativa e il suo uso in meccanica celeste

Le ricerche di Levi-Civita della prima fase si inseriscono direttamente nel filone di carattere qualitativo di Poincaré, caratterizzandosi, con le ricerche di Bendixson e di Liapounov, come uno dei primi casi di continuazione degli studi del matematico francese. E', anzi, possibile mostrare che le ricerche del matematico italiano costituiscono uno dei principali anelli di connessione tra l'opera di Poincaré e gli sviluppi novecenteschi dell'analisi qualitativa delle equazioni differenziali ordinarie, con particolare riguardo per i lavori del matematico americano George D. Birkhoff.

Come accennato, il soggetto principale di questo primo gruppo di ricerche di Levi-Civita è costituito dalla questione della stabilità delle orbite periodiche nel problema ristretto dei tre corpi, in direzione di una diretta estensione di alcuni concetti e risultati presenti nelle opera di Poincaré. L'idea di 'soluzione periodica', come è ben noto, costituisce infatti uno dei concetti cardine delle ricerche del fisico-matematico francese in meccanica celeste, sia in relazione alla questione della loro esistenza – come nuove forme di soluzioni particolari del problema dei tre corpi –, sia in relazione alla possibilità di studiare tramite esse soluzioni che ne differiscono di poco (tra cui le celebri soluzioni asintotiche e doppiamente asintotiche). Si tratta in questo ultimo caso di uno studio che viene effettuato da Poincaré lungo diverse direzioni, sia con la considerazione delle cosiddette 'equazioni alle variazioni' che regolano il moto perturbato; sia tramite l'adozione di un particolare modello geometrico – il cosiddetto 'metodo delle superfici di sezione' – ottenuto considerando le intersezioni che una traiettoria presenta con un piano a essa trasversale.

Le ricerche di Levi-Civita si collegano direttamente a questi argomenti con la considerazione di un metodo geometrico per la discussione del problema della stabilità delle soluzioni periodiche nel problema ristretto dei tre corpi – il cosiddetto 'metodo delle trasformazioni stabili' –, che risulta una diretta estensione dell'idea di Poincaré di superficie di sezione. Il metodo – esposto in modo sistematico nella prima parte della memoria *Sopra alcuni criteri di instabilità*[16] – si basa sulla considerazione delle proprietà di stabilità di una generica trasformazione geometrica del tipo

(1) $x_i^{(1)} = f_i(x_1, \ldots, x_m)$ $\qquad$ $i = 1, \ldots, m$

avente come iterazioni le trasformazioni:

(2) $x_i^{(n)} = f_i(x_1^{(n-1)}, \ldots, x_m^{(n-1)})$ $\qquad$ $i = 1, \ldots, m$

Con questi simboli la trasformazione (1) è detta 'stabile' se per ogni e >0 esiste un h>0 tale che per ogni x_i per cui $|x_i|<h$ si ha $|x_i^{(n)}|<e$.

Nella prima parte della memoria citata è presente l'abbozzo di una teoria sistematica della stabilità delle trasformazioni geometriche, con vari risultati centrali quali la deduzione del teorema di Liapounov (relativo al caso di esponenti caratteristici non tutti a parte reale nulla) e lo studio di alcuni casi particolari non contemplati da tale teorema, di cui viene dimostrata l'instabilità.

E' sulla base di questo insieme di risultati che successivamente, nella seconda parte del lavoro, si ha la discussione della questione della stabilità delle soluzioni periodiche nel problema ristretto dei tre corpi, fino alla deduzione numerica di alcune particolari orbite instabili. Ciò ha luogo considerando una soluzione periodica $x_i=j_i(t)$ – o ciò che è lo stesso, tramite un opportuno cambiamento di coordinate, $x_i=0$ – del sistema

(3) $\qquad dx_i/dt = X_i(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}, t)$ $\qquad$ $i = 1, \ldots, m$

[16] Levi-Civita 1901.

dove le X_i sono analitiche nelle x_i e periodiche in t, di periodo T.
Se inoltre

(4) $x_i = F_i(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}, t)$ i= 1, ..., m

indica l'integrale generale di (3) con le F_i analitiche nelle variabili $x_i^{(0)}$ in un intorno dell'origine, e si pone

(5) $x_i^{(n)} = F_i(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}, nT)$ i= 1, ..., m

si ha, per la periodicità delle X_i, che

(6) $F_i(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}, T) = F_i(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}, t\text{-}nT)$ i= 1, ..., m.

In virtù di queste relazioni, se si introduce la trasformazione f_i tramite le seguenti identità

(7) $x_i^{(1)} = F_i(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}, T) = f_i(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$ i= 1, ..., m

si ottiene per $x_i^{(n)}$, la forma iterata

(8) $x_i^{(n)} = f_i(x_1^{(n-1)}, \dots, x_m^{(n-1)})$ i= 1, ..., m

e il problema della stabilità della soluzione periodica x_i=0 viene ricondotto da Levi-Civita al problema della stabilità della trasformazione geometrica f_i.
Si può allora dire che l'approccio di Levi-Civita al problema della stabilità delle soluzioni periodiche nel problema ristretto dei tre corpi è contraddistinto da un programma di riduzione di tale questione allo studio delle proprietà di stabilità delle trasformazioni geometriche, tramite un'applicazione sistematica del metodo delle superfici di sezione di Poincaré. In questo modo, in una direzione che testimonia una chiara influenza tematica e metodologica da parte delle opere di carattere qualitativo del matematico francese, le ricerche di Levi-Civita in teoria della stabilità possiedono una assoluta rilevanza nello sviluppo dell'analisi qualitativa nei decenni successivi. In particolare, il metodo delle trasformazioni stabili costituisce uno dei temi sui cui si baseranno poi le ricerche di George D. Birkhoff in direzione delle tematiche della moderna teoria dei sistemi dinamici, come anche testimonia la corrispondenza da loro avuta, in parte contentuta presso l''Archivio Levi-Civita' dell'Accademia Nazionale dei Lincei.

5 - Levi-Civita e la questione delle singolarità delle equazioni del moto

Considerazioni analoghe possono essere svolte in relazione alle ricerche di Levi-Civita riguardanti il secondo aspetto di carattere globale del problema dei tre corpi che tende a emergere nell'ultima parte del XIX secolo, la questione cioè della regolarizzazione delle equazioni del moto; anche in questo caso, infatti, il ruolo svolto dal matematico italiano risulta di importanza centrale.

Nessuno nell'ambiente scientifico internazionale del primo decennio del Novecento è più vicino di Levi-Civita alla soluzione della questione della regolarizzazione del problema dei tre corpi. Di fatto, nelle sue opere della seconda fase – che contengono, in prosecuzione diretta dell'opera di Painlevé, la determinazione delle condizioni analitiche che individuano le traiettorie singolari nel problema ristretto dei tre corpi e in alcune sue possibili varianti – sono presenti tutte le tecniche necessarie per ottenere tale soluzione nel caso generale; tecniche che riguardano principalmente lo studio nell'intorno di un urto del comportamento di certe grandezze caratteristiche del moto e l'introduzione di particolari variabili ausiliare al posto della variabile temporale. Sono esattamente queste tecniche che saranno poi riprese e sviluppate da Sundman nei propri lavori, in modo da poter parlare di una effettiva influenza esercitata da Levi-Civita sull'astronomo finlandese.

In modo ancora più rilevante, le ricerche del matematico italiano sulle previsioni degli urti contengono una tra le prime formulazioni dell'idea stessa di regolarizzazione e anche una prima, effettiva regolarizzazione delle equazioni del caso ristretto del problema dei tre corpi. Ciò è effettuato applicando al sistema canonico di varabili canoniche x, y, p, q che regola il moto nel caso ristretto prima la trasformazione canonica:

$$x+iy = (x+ih)^2 \qquad (9)$$
$$p-iq = (w-ix)/2(x+ih)$$

e poi la seguente trasformazione della variabile temporale:

$$dt = d\mathit{t}/r^2 \qquad (10)$$

del tutto analoga a quella poi utilizzata da Sundman nelle sue ricerche.

C'è da notare che, a differenza di quella dell'astronomo finlandese, questa regolarizzazione è ottenuta operando solo in ambito canonico, senza uscire cioè dal dominio della meccanica analitica classica. Si tratta di una caratteristica non casuale che accomuna questa prima fase di ricerche di Levi-Civita sulle singolarità delle equazioni del moto a quelle della terza fase che, come detto, riguardano direttamente il problema della regolarizzazione. In linea di continuità con le opere precedenti, il matematico italiano pervenne in questo terzo gruppo di ricerche sul problema classico dei tre corpi alle prime regolarizzazioni delle equazioni del moto nel caso piano e in quello spaziale, facendo uso di sole trasformazioni canoniche.

6 - Aspetti metodologici delle ricerche di Levi-Civita sul problema dei tre corpi

Alcuni aspetti delle ricerche di Levi-Civita sulla questione delle singolarità delle equazioni del moto nel problema dei tre corpi mettono in evidenza certi risvolti di carattere metodologico, come in parte anticipato nell'introduzione. In primo luogo, sebbene nelle ricerche sulla previsione degli urti il matematico italiano arrivi, come visto, a una effettiva regolarizzazione delle equazioni del moto nel caso ristretto, egli non sembra associare a tale questione un'importanza centrale all'interno delle proprie ricerche. Per esempio, tale regolarizzazione è esposta in forma di osservazione all'interno di un lavoro che presenta finalità completamente diverse.[17] Inoltre, Levi-Civita non sembra mostrare interesse negli anni immediatamente successivi a estendere a contesti più generali il risultato ottenuto nel caso ristretto. Egli infatti, come si è visto, tornerà a occuparsi di tale questione solo dopo la pubblicazione delle ricerche di Sundman. Si può dunque affermare che, in questa prima fase delle sue ricerche sulle singolarità nel problema dei tre corpi, sebbene venga considerata da un punto di vista teorico, la questione della regolarizzazione delle equazioni del moto è vista da Levi-Civita come un problema analitico di importanza non centrale; una circostanza che appare piuttosto singolare se si pensa alla rilevanza teorica che sarà attribuita a distanza di pochi anni al risultato di regolarità di Sundman.

Si tratta di una circostanza che può essere compresa considerando la particolare lettura del problema dei tre corpi che viene data da Levi-Civita nelle sue ricerche, come particolare problema di carattere fisico-matematico. A totale differenza di

[17] Levi-Civita 1904b.

Sundman, tale lettura risulta di carattere essenzialmente fisico, con i corpi che vengono ritenuti assimilabili a dei punti materiali solo in prima approssimazione. Appare indicativo al riguardo il fatto che il lavoro stesso che contiene la regolarizzazione nel caso ristretto, (Levi-Civita 1904b), è in realtà dedicato alla estensione al caso di corpi reali di alcuni risultati ottenuti in relazione alla previsione degli urti tra punti materiali. In questo modo, la questione della regolarizzazione mostra per Levi-Civita, nelle sue ricerche sulla previsione degli urti, una totale assenza di significato fisico: gli urti tra corpi celesti sono considerati come eventi catastrofici al di là dei quali una continuazione, anche solo formale, del moto non è immaginabile. E' sostanzialmente per questo motivo che, sul punto di risolvere un aspetto teorico fondamentale della meccanica celeste classica (il problema, cioè, della regolarizzazione) Levi-Civita tenda a non considerarlo di centrale importanza, in quanto sostanzialmente privo di significato fisico.

Queste considerazioni trovano una totale conferma nelle ricerche del matematico italiano sulle singolarità del problema dei tre corpi successive a quelle di Sundman. In queste ricerche, infatti, Levi-Civita mostra un atteggiamento in parte critico nei confronti dei risultati ottenuti dall'astronomo finlandese, visti come troppo formali per costituire una reale 'soluzione' del problema dei tre corpi:

à M. Sundman revient le mérite d'avoir dans un certain sens résolu le fameux problème qui avait résisté pour deux siècles aux efforts des plus illustres géomètres. Je vien de dire résolu dans un certain sens. Voici pourquoi. Nul doute que la résolution des problèmes s'entend maintenant en analyse dans un sens très large: tout algorythme est bon pourvu qu'il conduise au bout.

Emerge qui una chiara contrapposizione sul significato da attribuire all'idea di 'soluzione' del problema dei tre corpi e, più in generale, di un generico problema di natura fisico-matematica. All'idea formale di soluzione di un problema analitico esposta nel brano precedente, Levi-Civita ne contrappone una più circoscritta, relativa al caso concreto di un problema di carattere meccanico:

Mais, lorsqu'il s'agit d'une question mécanique, on doit prétendre aussi d'être à même d'en prévoir, ne fut-ce qu'en concept, par des opèrations mathématiques déterminées (et en nombres fini) les traits essentiels: formes des trajectoires, allure générale du mouvement, et, dans notre cas, d'une manière essentielle, chocs eventuels. La solution de M. Sundman, si remarquable qu'elle soit, est donc loin d'épuiser la question.[18]

Sulla base di queste osservazioni, le ricerche di Levi-Civita della terza fase possono essere considerate come una globale riformulazione 'concreta', una sorta di riottenimento dei risultati di Sundman sulla regolarizzazione del problema dei tre corpi. In linea con la tradizione della meccanica classica, tale 'concretizzazione' riguarda essenzialmente la forma delle equazioni considerate durante l'intero processo analitico di trasformazione[19]: come accennato nel paragrafo precedente, per il matematico italiano l'eliminazione delle singolarità dalle equazioni del moto possiede un senso 'reale' solo se è ottenuta facendo uso di trasformazioni canoniche, mantenendo cioè la forma hamiltoniana delle equazioni. Ancora parlando del risultato di Sundman, egli afferma a questo proposito:

[18] Levi-Civita 1926, p. 102.

[19] Levi-Civita stimolò anche la realizzazione di ricerche che fornissero una interpretazione fisica diretta della regolarizzazione di Sundman in qualche caso particolare: si veda, a questo proposito, Armellini 1915.

Cependant la dite régularisation est atteinte d'une manière indirecte, par l'introduction d'un nombre assez grand d'auxiliaires et en sortant du cadre des équations de la dynamique: circonstance assez gênante, puisqu'il n'est plus permis (du moins sans discussion préalable) d'appliquer au système régularisé ni les résultats théoriques, ni les méthodes de calcul de la mécanique analytique.[20]

In questo modo, le ricerche di Levi-Civita sulle singolarità del problema dei tre corpi mettono globalmente in evidenza un preciso approccio metodologico a tale problema e, più in generale, a una questione di carattere meccanico o fisico-matematico, in cui è l'aderenza all'ambito formale della dinamica classica a svolgere il ruolo essenziale rispetto a requisiti di carattere più strettamente analitico, come quello della sviluppabilità in serie.

Bibliografia

AMALDI U., 1946, "Commemorazione del socio Tullio Levi-Civita", *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei*, **1**(8), pp. 1130-1155.

ARMELLINI G. 1915, "Estensione della soluzione del Sundman dal caso di corpi ideali al caso di sferette elastiche omogenee", *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei*, **24**, pp. 185-190.

BENDIXSON I. 1901, "Sur les courbes définies par des équations différentielles", *Acta Mathematica*, 24, pp. 1-88.

BIRKHOFF G. D. 1927, *Dynamical Systems*, A.M.S. Coll. Pub. vol. 9.

BIRKHOFF G. D. 1935, "Sur le problème restreint des trois corps", *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa*, **4**(2), pp. 267-306.

DELL'AGLIO L. 1987, "Sui concetti originari della teoria qualitativa delle equazioni differenziali ordinarie", *Rivista di Storia della Scienza*, **4**(3), pp. 377-390.

DELL'AGLIO L. 1993, "Tradizioni di ricerca nella meccanica celeste classica: il problema dei tre corpi in Levi-Civita e Sundman", *Physis*, **30**, pp. 105-144.

DELL'AGLIO L., ISRAEL G. 1987, "I temi della stabilità e dell'analisi qualitativa nell'opera di Levi-Civita e di Volterra", in *Atti del Convegno 'La Matematica italiana tra le due guerre mondiali', (Milano, Gargnano del Garda, 8-11 ottobre 1986)*, Bologna, Pitagora Editrice, pp. 125-141.

DELL'AGLIO L., ISRAEL G. 1989, "La théorie de la stabilité et l'analyse qualitative des équations différentielles ordinaires dans les mathématiques italiennes: Le point de vue de Tullio Levi-Civita", *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathematiques,* **10**, pp. 283-321.

GALLETTO D. 1973, "Tullio Levi-Civita", *Bollettino U.M.I.,* **8**(4), pp. 373-390.

HAGIHARA Y. 1973, "Tullio Levi-Civita's Works in Celestial Mechanics", in *Tullio Levi-Civita, Atti del Convegno Internazionale Celebrativo nel Centenario della Nascita (Roma, 17-19 dicembre 1973)*, Roma, Accademia Nazionale dei Lincei, pp. 205-240.

HODGE W.V.D. 1942, "Tullio Levi-Civita", *Obituary of Fellows of the Royal Society*, **4**, pp. 151-165.

LAGRANGE J.-L., "Essai sur le problème des trois corps", in *Oeuvres complètes*, Paris, Gauthier-Villars, vol. VI, 1873, pp. 229-324.

LEVI-CIVITA 1900a, "Sur l'instabilité de certaines substitutions", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **130**, pp. 103-106.

LEVI-CIVITA 1900b, "Sur l'instabilité de certaines solutions périodiques", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **130**, pp. 170-173.

LEVI-CIVITA 1900c, "Sur le problème restreint des trois corps", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **130**, pp. 236-239.

[20] Levi-Civita 1918, p. 100.

LEVI-CIVITA T. 1901, "Sopra alcuni criteri di instabilità", *Annali di Matematiche,* **5**(3), pp. 221-308.

LEVI-CIVITA T. 1903a, "Sur les trajectoires singulières du problème restreint des trois corps", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **136**, pp. 82-84

LEVI-CIVITA T. 1903b, "Condition du choc dans le problème restreint des trois corps", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **136**, pp. 221-223.

LEVI-CIVITA T. 1904a, "Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi", *Annali di Matematiche*, **9**(3), pp. 1-32.

LEVI-CIVITA T. 1904b, "Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps", in *Verhandl. des III Intern. Math.-Kongresses (Heidelberg 1904)*, pp. 402-408.

LEVI-CIVITA T. 1906, "Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps", *Acta Mathematica*, **30**, pp. 305-327.

LEVI-CIVITA T. 1911, "Sur les équations linéaires à coefficients périodiques et sur le moyen mouvement du noeud lunaire", *Annales de l'Ecole Normale Superieure*, **28**(3), pp. 325-376.

LEVI-CIVITA T. 1912, "Estensione ed evoluzione della fisica matematica nell'ultimo cinquantennio (con speciale riguardo al contributo italiano)" *Scientia*, **11**, pp. 275-292.

LEVI-CIVITA T. 1915a, "Sulla riduzione del problema dei tre corpi", *Atti dell'Istituto Veneto delle Scienze*, **74**, pp. 907-939.

LEVI-CIVITA T. 1915b, "Sul problema piano dei tre corpi", *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei*, **24**(5), pp. 422-433, 485-501, 533-569.

LEVI-CIVITA T. 1915c, "Sulla regolarizzazione del problema piano dei tre corpi", *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei*, **24**(5), pp. 61-75.

LEVI-CIVITA T. 1916a, "Sopra due trasformazioni canoniche desunte dal moto parabolico", *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei*, **25**(5), pp. 446-458.

LEVI-CIVITA T. 1916b, "Sur la régularisation du problème des trois corps", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **162**, pp. 1-4.

LEVI-CIVITA T. 1918, "Sur la régularisation du problème des trois corps", *Acta Mathematica*, **42**, pp. 99-144

LEVI-CIVITA T. 1924, *Questioni di meccanica classica e relativistica*, Bologna, Zanichelli

LEVI-CIVITA T. 1926, "Sur les chocs dans le problème des trois corps", in *Comptes Rendus du II Congrès international de mécanique appliquée (Zurich 1926),* pp. 96-106.

LIAPOUNOV A. 1907, "Problème générale de la stabilité du mouvement", *Annales de la Faculté de Science de Toulouse*, s. 2, 9, pp. 203-474 (ed. orig. 1892).

MARCOLONGO R. 1919, *Il problema dei tre corpi da Newton (1686) ai nostri giorni*, Milano, Hoepli.

PAINLEVÉ P. 1894, "Sur la transformation des èquations de la dynamique", *Journal de Mathématiques pures et appliquèes*, **10**(5), pp. 56-78.

PAINLEVÉ P. 1896a, "Sur les singularités des équations de la Dynamique", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **123**, pp. 636-639.

PAINLEVÉ P. 1896b, "Sur les singularités des équations de la Dynamique et sur le problème des trois corps", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **123**, pp. 871-873.

PAINLEVÉ P. 1897, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*, professées à Stockholm, Paris, Hermann.

PAINLEVÉ P. 1897b, "Sur le cas du problème des trois corps (et des n corps) où deux des corps se choquent au bout d'un temps fini", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **125**, pp. 1075-1081.

POINCARÉ H. 1881, "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle", *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1881, **7**(3), pp. 375-422.

POINCARÉ H. 1882, "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle", *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, **8**(3), pp. 251-296.

POINCARÉ H. 1885, "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle", *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, **1**(4), pp. 167-244.

POINCARÉ H. 1886, "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle", *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, **2**(4), pp. 151-217.

POINCARÉ H. 1890, "Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique", *Acta Mathematica*, **13**, pp. 1-278.

POINCARÉ H. 1892-99, *Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Paris, Gauthier-Villars.

SUNDMAN K.F. 1907, "Recherches sur le problème des trois corps", *Acta Societatis Scientiarum Fennicae*, **34**, n. 6, pp. 1-43.

SUNDMAN K.F. 1909, "Nouvelles recherches saur le problème des trois corps", *Acta Societatis Scientiarum Fennicae*, **35**, n. 9, pp. 3-27.

SUNDMAN K.F. 1910, "Sur les singularités réelles dans le problème des trois corps", *Actes du Congrès des Mathématiques Scandinaves (Stockholm, 1909)*, pp. 62-75.

SUNDMAN K.F. 1913, "Mémoire sur le problème des trois corps", *Acta Mathematica*, **36**, pp. 105-179.

THIELE T.N. 1896, "Recherches numériques concernant des solutions périodiques d'un cas spécial du problème des trois corps", *Astronomische Nachrichten*, 137, pp. 1-10.