Una storia difficile da ricostruire: le equazioni del prim'ordine della relatività generale

Mario Di Giovanni

Introduzione

Le equazioni fondamentali della Teoria einsteiniana della gravitazione, espresse da equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine sul tensore metrico, possono essere formulate anche attraverso equazioni del prim'ordine sul tensore di Weyl.

Ciò consente di costruire, sia riguardo allo sviluppo dell'apparato matematico che dell'interpretazione fisica, una corrispondenza naturale con l'elettrodinamica classica.

L'analogia con uno schema fisico così ben conosciuto conduce direttamente alla predizione delle onde gravitazionali e ad una interpretazione fisica del tensore di Weyl finora rimasta in ombra.

Più che sugli aspetti formali, che pure saranno introdotti, ci si concentrerà qui sull'analisi delle fonti reperibili in letteratura, per mostrare che l'argomento in questione è un esempio istruttivo di come la tradizione dei testi sia sovente avversaria della verità storica.

Siamo infatti di fronte ad uno di quei casi in cui la storia trasmessa di testo in testo sia alquanto approssimativa e quasi deliberatamente sviante per chi si accinga a ricostruirla.

Perciò, nel seguito, mi propongo di illustrare un capitolo poco noto della fisica teorica e nel contempo di sottolineare quanto poca sia l'attenzione posta dai fisici nei confronti della storiografia.

A questo scopo il seguito sarà diviso in due sezioni principali: nella prima parte si svilupperà per sommi capi l'argomento dal punto di vista fisico; nella seconda si renderà conto dei lavori principali presenti in letteratura.

Ringraziamenti

Rinnovo la mia gratitudine e stima al professor Silvio Bergia, che alcuni anni fa promosse gli studi sulle equazioni del prim'ordine della Relatività Generale.

L'argomento ebbe, dapprima, un'organica sistemazione teorica per merito della tesi di laurea di Savini (citata in nota 1). Successivamente, uno sviluppo ed un inquadramento storico-critico nelle mie due tesi: di laurea in Fisica e di diploma alla Scuola in Fondamenti e Filosofia della Fisica. La summa e la conclusione dell'intero percorso sono esposte nell'articolo che il professor Silvio Bergia ed il sottoscritto hanno pubblicato nel volume 26 numero 1/2001 (dedicato a Georges Lochak per il suo settantesimo compleanno) degli *Annales de la Fondation Louis De Broglie*[1].

Notazioni

Si indicherà con $(\cdot)_{,\mu}$ la derivazione covariante e con $\partial_\mu(\cdot)$ la derivazione ordinaria. Si utilizzerà g per indicare il determinante del tensore metrico di segnatura (+ - - -). I simboli k_g e k_e indicheranno rispettivamente $\frac{8\pi G}{c^4}$ e $\frac{4\pi}{c}$, dove c è la velocità della luce nel vuoto mentre G è la costante gravitazionale. Si assumerà di lavorare nelle unità di misura naturali in cui c=1. Le parentesi tonde indicheranno simmetrizzazione, mentre quelle quadre antisimmetrizzazione. Per esempio, dato il tensore $A_{\mu\nu}$ si avrà:

[1] http://www.ensmp.fr/aflb/AFLB-26j/aflb26jp081.htm

$$A_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}\left(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}\right),$$
$$A_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}\left(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}\right).$$

I simboli $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ e $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ indicheranno rispettivamente il tensore di Levi-Civita contravariante e covariante di ordine 4, definiti nel seguente modo:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1, & \text{se } \alpha\beta\gamma\delta \text{ è una permutazione pari di } 0123; \\ -1, & \textit{se } \alpha\beta\gamma\delta \text{ è una permutazione dispari di } 0123; \\ 0, & \textit{altrimenti}. \end{cases}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1, & \text{se } \alpha\beta\gamma\delta \text{ è una permutazione dispari di } 0123; \\ -1, & \text{se } \alpha\beta\gamma\delta \text{ è una permutazione pari di } 0123; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Infine, si adotterà la convenzione di Einstein sugli indici ripetuti.

1 - Le equazioni del prim'ordine della Relatività Generale.

Le equazioni del campo gravitazionale di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = k_g T_{\mu\nu} \ , \qquad (1.1)$$

hanno una forma simile a quella dell'evoluzione delle componenti del potenziale elettromagnetico (nel gauge di Lorentz):

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \ . \qquad (1.2)$$

Le (1.1) sono infatti equazioni alle derivate parziali del secondo ordine per le componenti $g_{\mu\nu}$ del potenziale gravitazionale.

In elettromagnetismo, alle equazioni del secondo ordine (1.2) si accompagnano quelle del primo ordine di Maxwell:

$$F^{\nu\mu}{}_{,\nu} = k_e j^\mu \qquad (1.3a)$$

$$*F^{\nu\mu}{}_{,\nu} = 0 \ . \qquad (1.3b)$$

(Abbiamo qui introdotto $*\mathbf{F}$, il duale del tensore del campo elettromagnetico. Per componenti, è definito come segue: $*F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$).

Nel caso gravitazionale, tuttavia, i testi si limitano generalmente a presentare la teoria in termini delle (1.1), ignorando d'individuare le corrispondenti equazioni di campo del prim'ordine (d'ora in poi, ECPO) che abbiano un ruolo equivalente a quello delle equazioni di Maxwell.

Allo scopo, iniziamo la parte formale dapprima introducendo il *tensore di Ricci*, che ha 10 componenti indipendenti:

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta} \;; \tag{1.4}$$

ed infine quelle che vengono chiamate le *parti irriducibili* del tensore di Riemann (o tensore di curvatura):

- *lo scalare di curvatura* (che ha 1 sola componente):

$$R \equiv R^{\alpha}_{\alpha} \equiv g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \tag{1.5}$$

- *il tensore di Ricci a traccia nulla* (9 componenti indipendenti):

$$S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} R \;; \tag{1.6}$$

- *il tensore di Weyl* (10 componenti indipendenti):

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv R_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2}(g_{\alpha\gamma} R_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} R_{\beta\gamma} - g_{\beta\gamma} R_{\alpha\delta} + g_{\beta\delta} R_{\alpha\gamma}) - \\ - \frac{1}{6}(g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta}) R \;. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Si chiama *irriducibile* un tensore per il quale è nulla qualsiasi contrazione dei suoi indici; di conseguenza, nessuna nuova quantità potrà essere costruita da una delle tre componenti irriducibili del tensore di Riemann attraverso un'operazione di contrazione.

Ciò detto, indicheremo simbolicamente la scomposizione siffatta del tensore di Riemann nel modo seguente:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = S_{\alpha\beta} \oplus R \oplus W_{\alpha\beta\gamma\delta} \;. \tag{1.8}$$

La somma delle componenti indipendenti delle parti irriducibili corrisponde al numero di quelle del tensore di curvatura, perciò si può dire che tutte le informazioni contenute nel tensore di Riemann si suddividono tra lo scalare di curvatura, il tensore di Ricci a traccia nulla ed il tensore di Weyl.

Dalla contrazione delle (1.1) si ottiene:

$$R = -k_g T \;; \tag{1.9}$$

e sostituendo quest'ultima nelle stesse equazioni di Einstein, si ottiene la seguente espressione che lega il tensore di Ricci a quello energia-impulso:

$$R_{\alpha\beta} = k_g (T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T) \;. \tag{1.10}$$

Il tensore di Riemann gode di un'importante proprietà differenziale, visto che soddisfa alle seguenti *identità di Bianchi*:

$$R^{\alpha}_{\beta[\gamma\delta,\lambda]} = 0 \quad . \tag{1.11}$$

Nelle (1.11), contraendo una prima volta gli indici α e λ, otteniamo:

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{,\alpha} = R^{\beta\delta,\gamma} - R^{\beta\gamma,\delta} \quad . \tag{1.12}$$

Le (1.12) possono considerarsi *equazioni di campo per il tensore di Riemann*, in cui i termini al secondo membro svolgono il ruolo di *sorgenti*. L'identificazione apparirà meno formale usando la (1.10) per scrivere la (1.12) nella forma:

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{,\delta} = 2k_g J_2^{\alpha\beta\gamma} \tag{1.13}$$

dove

$$J_n{}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(T^{\gamma\alpha,\beta} - \frac{1}{n} g^{\gamma\alpha} T^{,\beta} - T^{\gamma\beta,\alpha} + \frac{1}{n} g^{\gamma\beta} T^{,\alpha}) \quad . \tag{1.14}$$

Inoltre si dimostra che le identità di Bianchi (1.11) si possono scrivere nella forma:

$$^{*}R^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{,\delta} = 0 \quad , \tag{1.15}$$

dove con $^{*}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ si è inteso indicare il *doppio duale* del tensore di Riemann definito come segue: $^{*}R^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \frac{1}{4g} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon^{\gamma\delta\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}$.

Si è dunque riusciti a scrivere le equazioni per il campo gravitazionale in una forma analoga a quella delle equazioni di Maxwell (1.3).

Ma c'è di più: si può infatti dimostrare che la (1.13) si può scrivere, come segue, nei soli termini del tensore di Weyl[2]:

$$W^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{,\delta} = k_g J_3{}^{\alpha\beta\gamma} \quad . \tag{1.16}$$

Siamo arrivati ad un punto nodale, poiché ci sono ora le condizioni per due osservazioni importanti.

La prima. Si osserva che le equazioni einsteiniane di campo (1.1) portano ad una certa eclissi del tensore di curvatura[3], perché esse fanno uso solamente di due delle tre componenti irriducibili del tensore di Riemann, affatto trascurando tutte le informazioni del tensore di curvatura contenute nel tensore di Weyl. Ciò risponde chiaramente al dubbio se le equazioni (1.1) siano comprese nelle "nuove" (1.16). La soluzione è che non solo non si sovrappongono, bensì si congiungono dando vita ad una formulazione completa della teoria.

---

[2] Savini D., "La relatività generale dai campi ai potenziali", Tesi di Laurea in Fisica, Università di Bologna, a.a. 1996/1997, non pubblicata.
[3] Lanczos C., (1962), *Rev. Mod. Phys.*, **34**, 379.

La seconda. Dato che l'analisi che stiamo conducendo avviene in stretta analogia con l'elettromagnetismo, non possiamo trascurare che quest'ultimo ammette l'esistenza di un potenziale, mentre il tensore di curvatura, inteso come rappresentante del campo gravitazionale, non lo ammette in generale[4]. Fortunatamente, per il tensore di Weyl esiste sempre *il tensore di Lanczos*[5] come suo potenziale; questo è dunque un ottimo ulteriore motivo per conferire al tensore di Weyl il ruolo di rappresentante del campo gravitazionale.

Veniamo ora ad indagare il *significato fisico del tensore di Weyl*.

Per farlo ci sarà utile esplicitare l'espressione differenziale (1.16), che lega il tensore di Weyl alle sorgenti, in termini del tensore energia-impulso. Sostituendo la (1.14) nella (1.16) otteniamo:

$$W^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{,\delta} = k_g \left(T^{\gamma[\alpha,\beta]} - \frac{1}{3} g^{\gamma[\alpha} T^{,\beta]}\right) \quad . \qquad (1.17)$$

Analizzando le stesse equazioni di Einstein e, più specificatamente, la loro formulazione (1.10), che esprime il legame tra tensore di Ricci e tensore energia-impulso, si nota che il tensore di Ricci è determinato dalla distribuzione locale di massa. Nel vuoto, quando essa non è presente, le equazioni di Einstein diventano dunque:

$$R_{\alpha\beta} = 0. \qquad (1.18)$$

Quest'equazione descrive la geometria dello spazio-tempo lontano da una data distribuzione di massa e, quand'anche essa non esista affatto, dà luogo a soluzioni non banali diversamente da ciò che accade, in una situazione analoga, in uno spazio di Minkowski. Queste soluzioni sono in qualche modo dovute alla non linearità dell'interazione gravitazionale, in seguito a cui la curvatura (la gravità), dotata di per sé stessa di energia, genera ulteriore curvatura; si dice infatti che queste soluzioni descrivano i *campi gravitazionali "self-sustaining"*.

Nel vuoto, in cui si annulla il tensore di Ricci e quindi vale la (1.18), il tensore di Riemann, e dunque la curvatura, sono unicamente determinati dal tensore di Weyl (cfr. la (1.7)); giacché è valida la (1.16), si dice che il tensore di Weyl descrive appunto il *campo gravitazionale libero*[6].

Ma, ancor più importante, la (1.17) ci dice che il tensore di Weyl è diverso da zero solo se lo spazio-tempo è dotato di una distribuzione di massa non omogenea. Nella sostanza, le sorgenti del tensore di Weyl sono i gradienti del tensore energia-impulso (cfr. la (1.14))[7].

Proprio per il fatto che il tensore di Weyl non è implicato nelle equazioni di Einstein, esso rappresenta quella parte della curvatura che non è determinata dalla distribuzione locale di massa e, di conseguenza, le ECPO (1.16) consentono di specificare quella parte di curvatura in un punto che dipende dalla distribuzione di massa in altri punti.

Ora, seguendo passo per passo la procedura utilizzata in elettromagnetismo, il tensore di Weyl può scomporsi facilmente in parti che verranno identificate come "*elettrica*" e "*magnetica*".

---

[4] Bampi F. e Caviglia G. (1983), *Gen. Rel. Grav.*, **15**, 375.
[5] Ivi, nota 2.
[6] Hawking, S. W., Ellis, G. F. R., *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge 1973.
[7] De Felice, F., Clarke, C. J. S., *Relativity on curved manifolds*, Cambridge University Press, Cambridge 1990.

Questa scomposizione è stata ovviamente, da sempre, messa in connessione con l'esistenza di *radiazione gravitazionale*.

D'altronde, gli invarianti che si ricavano dalla scomposizione del tensore di Weyl sono analoghi a quelli elettromagnetici. Inoltre, le parti "elettrica" e "magnetica" sono usate per dotare di significato fisico[8] la cosiddetta *classificazione di Petrov*[9] del tensore di Weyl e, oltretutto, sono state ampiamente utilizzate in letteratura per analizzare il comportamento della radiazione gravitazionale[10].

2 - Le equazioni del prim'ordine in letteratura.

Per quanto ci è dato di sapere, la prima ricostruzione organica e completa dell'argomento è stata fornita da Savini[11]. Ciò nondimeno, la possibilità di utilizzare il tensore di Weyl per esprimere in una maniera alternativa le equazioni del campo gravitazionale era nota da più di trent'anni[12].

Peraltro, in un articolo del 1995[13] sull'interpretazione fisica del tensore di Lanczos, Roberts scrive che questa maniera alternativa è chiamata *formulazione di Jordan* e fa rimando all'Hawking & Ellis[14].. In quest'ultimo libro si fa notare che il tensore di Weyl è la parte di curvatura non determinata localmente dalla distribuzione di massa. Ciò nonostante esso non è arbitrario, perché ha da soddisfare le identità di Bianchi che gli autori riscrivono come le (1.16). A questo punto osservano l'analogia con le equazioni di Maxwell in elettrodinamica e, in questo senso, si possono interpretare le identità di Bianchi come equazioni di campo per il tensore di Weyl; queste ultime definiscono la parte di curvatura in un punto che dipende dalla distribuzione di massa negli altri punti. Dunque, in questo libro c'è tutto l'essenziale sull'argomento dal punto di vista del contenuto fisico; ma è pur vero che Jordan non viene mai citato. Piuttosto, si fa riferimento ad una triade di lavori in cui l'approccio con le ECPO viene utilizzato per analizzare il comportamento della radiazione gravitazionale[15]. Neanche nei primi due di questi, in cui si utilizza il metodo spinoriale, v'è traccia di Jordan o di qualsiasi spunto per una ricostruzione storica.

Nel terzo, quello di Hawking, si analizza il comportamento della radiazione gravitazionale in un universo in espansione facendo uso delle ECPO e della decomposizione del tensore di Weyl nelle sue parti "elettrica" e "magnetica".

Al proposito, si rimanda ad un articolo di Jordan e altri[16].. Qui, nel primo capitolo, si introduce la nozione di bivettore o tensore reale antisimmetrico del secondo ordine. In seguito, si considerano le applicazioni lineari di uno spazio di bivettori in sé stesso, che sono generate da tensori $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$.. Fra tali applicazioni figurano quelle generate dallo stesso tensore di Riemann. Gli autori considerano poi

[8] McIntosh, C. B. G., Arianrhod, R., Wade, S. T., Hoenselaers, C. (1994), *Class. Quantum Grav.*, **11**, 1555.
[9] Di Giovanni, M., (a.a. 1999/2000), *Aspetti della formulazione della relatività generale in termini di equazioni del primo ordine*, Tesi di Laurea in Fisica, Università di Bologna.
[10] Hawking, S. W., (1966), *Astrophys. J.*, **145**, 544.
[11] Ivi, nota 1.
[12] Ivi, nota 9.
[13] Roberts, M. D., (1995), *Il Nuovo Cimento*, **Vol. 110 B, N. 10**, 1165.
[14] Ivi, nota 5.
[15] Newman, E. T., Penrose, R. (1962), *J. Math. Phys.*, **3**, 566.
Newman, E. T., Unti, T. W. J. (1962), *J. Math. Phys.*, **3**, 891.
Ivi, nota 9.
[16] Jordan, P., Ehlers, J., Kundt, W., (1960), *Ahb. Akad. Wiss. Mainz*, **7**.

la decomposizione usuale del tensore di Riemann nelle sue parti irriducibili. A questa scomposizione ne corrisponde una analoga per il tensore di Weyl. Quest'ultimo determina un'applicazione lineare dualmente simmetrica dello spazio di bivettori in sé stesso. La matrice rappresentativa di un tensore di Weyl può sempre essere posta in forma normale con un'opportuna scelta di base. Gli autori mostrano che sono possibili solo 4 forme normali di Jordan per la matrice stessa. Ciò permette una classificazione dei tensori di Weyl che ripropone quella formulata già da Petrov. Questo è tutto, nessun accenno e, a fortiori, nessuna giustificazione della locuzione: "formulazione di Jordan".

Partendo dall'articolo di Roberts siamo finiti in un vicolo cieco. Cerchiamo un percorso alternativo.

Questo ci è dato da una serie di lavori pubblicati da Bel tra il 1959 ed il 1962. Nel primo articolo[17], Bel sottolinea che, per affrontare il problema della radiazione gravitazionale, è opportuno cercare analogie con il corrispondente problema ben noto della radiazione elettromagnetica. A questo scopo, egli segue la terminologia di Lichnerowicz che chiama doppia 2-forma tutti i tensori del quart'ordine che posseggono le proprietà di simmetria del tensore di Riemann. Sono tali proprietà che fanno, di tale tensore, l'estensione naturale della 2-forma di Maxwell, la quale descrive il campo elettromagnetico. Bel segue il punto di vista di Lichnerowicz e Pirani, secondo i quali è il tensore di curvatura, piuttosto che il tensore metrico, l'elemento geometrico adeguato a descrivere la fenomenologia della radiazione gravitazionale.

Nel secondo articolo della serie[18], Bel suppone di essere nel vuoto, dove vale la (1.18). Scrive le identità di Bianchi nella forma (1.13) e introduce il tensore: $T^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1}{2}(R^{\alpha\rho\lambda\sigma} R^{\beta\ \mu}_{\ \rho\ \ \sigma} + {}^{*}R^{\alpha\rho\lambda\sigma\,*} R^{\beta\ \mu}_{\ \rho\ \ \sigma})$, che possiede le seguenti proprietà di simmetria: $T^{\alpha\beta\lambda\mu} = T^{\beta\alpha\lambda\mu} = T^{\alpha\beta\mu\lambda} = T^{\lambda\mu\alpha\beta}$, valide per equazioni nel vuoto con costante cosmologica. Questo tensore diventa totalmente simmetrico non appena la costante cosmologica sia nulla. In seguito, Bel mostra che nel vuoto **T** è conservativo. Sempre nel vuoto, le equazioni del campo gravitazionale si riducono alle identità di Bianchi e all'equazione esprimente la conservazione di **T**. Si sottolinea che **T** ha, per il campo gravitazionale, lo stesso ruolo che il tensore di Maxwell ha per il campo elettromagnetico. Tuttavia, mai si fa menzione del tensore di Weyl.

Bel ritorna sull'argomento nella tesi di dottorato[19] del 1960. Questa volta le equazioni del vuoto sono scritte in termini dell'identità di Bianchi e della (1.16), presentata come segue: $\nabla_\alpha R^{\alpha}_{\beta\lambda\mu} = J_{\lambda\mu\beta}$. Considerazioni dello stesso tipo sono sviluppate in un articolo successivo[20].

Per inciso, vale la pena sottolineare come, proprio in quegli anni, il tensore di Weyl diviene oggetto di studi serrati: da una parte, come peraltro abbiamo visto, si cerca di collegarlo alla radiazione gravitazionale; dall'altra, il lavoro pionieristico di Lanczos[21] presenta l'espressione esplicita per un potenziale del tensore medesimo. È questo un filone di ricerca che, sebbene non direttamente inerente alle ECPO, ha tenuto ben desta l'attenzione sul tensore di Weyl. Infatti, è stato già messo in evidenza come fisicamente sia auspicabile che un campo ammetta potenziale.

---

[17] Bel, L., (1959), *La radiation gravitationnelle*, Seminario di meccanica analitica e meccanica celeste, Facoltà di Scienze di Parigi.
[18] Bel, L., *La radiation gravitationnelle*, Royament conférence CNRS.
[19] Bel, L., *La radiation gravitationnelle*, (1960), Tesi presentata alla Facoltà di Scienze dell'Università di Parigi.
[20] Bel, L., (1962), *Les états de radiation et le problème de l'énergie en relativité général*, Cahier de Physique, **138**, 59.
[21] Ivi, nota 2.

Per completezza diciamo che gli studi sul potenziale gravitazionale sono continuati a lungo. Si individuano chiaramente due tappe fondamentali: il lavoro di Brinis Udeschini[22] che, nel tentativo di generalizzare il punto di vista di Lanczos, trovò l'espressione per un potenziale dell'intero tensore di Riemann; il teorema di Bampi e Caviglia[23]: solo il tensore di Weyl ammette sempre un potenziale. Non così per il tensore di Riemann, il quale lo ammette solo in casi particolari.

A questo punto siamo alla conclusione.

Bel è giunto alla formulazione in esame nel 1960 e, alla luce di ciò, pare ingiustificato chiamare le ECPO come "formulazione di Jordan" della Relatività Generale. Tanto più che le indicazioni presenti in letteratura, e che segnalano il nome di Jordan, si rivelano quanto meno fuorvianti.

[22] Brinis Udeschini, E., (1977), *Istit. Lombardo Acad. Sci. Lett. Rend. A*, **111**, 466.
[23] Ivi, nota 3.