La relazione tra la *meccanica* e la *geometria* in John Wallis

Luigi Maierù[1]

La relazione tra meccanica e geometria attraversa, in modo diretto ed in modo trasversale, sia la storia della matematica sia la storia della fisica sia, in alcuni periodi, la storia della filosofia.

La *Meccanica*[2] di John Wallis (1616-1703), Savilian professor of Geometry nell'Università di Oxford dal 1649 alla sua morte, si inserisce in questa problematica. Il trattato è stata redatto in tre parti, che si presentano con i seguenti titoli:

Mechanica sive de motu tractatus geometricus pars prima (1669);
Mechanicorum sive tractatus de motus pars secunda (1670) ;
Mechanicorum sive tractatus de motu pars tertia (1671),

e che presentano, rispettivamente, la cinematica, il moto dei gravi e la bilancia (la prima parte), le proprietà ed il calcolo del centro di gravità (la seconda parte), la presentazione delle macchine semplici, dei moti composti, dell'idrostatica e di altre questioni di meccanica (la terza parte).

Nella dedica fatta a William Brouncker, Barone di Newcaste, Cancelliere della Regina e Presidente della Royal Society, lo stesso autore presenta la propria opera, mettendo l'accento sulla prima parte, in cui presenta i *fondamenti* della meccanica e sulla seconda, in cui tratta del *centro di gravità e del suo calcolo*, che è molto complicato, in parecchie figure curvilinee e in quelle che si possono ottenere dai solidi e dalle superfici curve (p. 573); non fa cenno alla terza parte, che è quella che può essere più facilmente collocata nell'alveo della tradizione, pur considerando che in essa vengono presentati argomenti molto diversi tra loro.

Leggendo tutto il trattato e considerando la relazione tra le tre parti si ricava l'impressione che Wallis intenda dare una visione generale di tutte le problematiche che in quel momento storico toccano la meccanica e voglia, in un certo senso, rifondarla, non lasciando cadere nulla di ciò che la tradizione ha trasmesso e, nello stesso tempo, sviluppando quella parte che nel corso nel Seicento ha ricevuto supporti teorici e pratici circa la determinazione del centro di gravità in figure geometriche. Ciò da lui viene presentato soprattutto attraverso l'elaborazione del metodo degli indivisibili di Cavalieri, da una parte, e la scoperta di nuove curve (in particolare della cicloide), dall'altra, con le quali ottenere nuovi solidi di rotazione. Questo scritto di Wallis può essere, perciò, collocato all'interno della problematica che si occupa dei rapporti tra *Veteres* e *Recentiores*, con forti accentuazioni circa gli apporti che questi ultimi danno alla soluzione di diverse problematiche.

---

[1] Dipartimento di Matematica, Università della Calabria, Arcavacata di Rende (Cosenza, Italia)

[2] Le citazioni sono tratte dal primo volume delle opere matematiche di Wallis, in cui tra le pp. 570-1063 si trovano le tre parti della Meccanica: cfr. J. Wallis, *Opera matematica. Volumen Primum*, Oxford 1995 (ristampa anastatica dal titolo: *Opera matematica I,* Hildesheim 1972). Le tre parti sono così ripartite: *Meccanica: sive, de motu, tractatus geometricus. Pars prima. In qua, De motu generalia. De gravium descensu, & motuum declivitate. De libra. Anno 1669. typis edita* (pp. 570-642); *Mechanicorum, sive tractatus de motu: pars seconda: quæ est de centro gravitatis, eiusque calculo. Anno 1670 edita* (pp. 643-938); *Mechanicorum, sive traciatus de motu; pars tertia. In qua, de vecte; aut unico, aut binis plurisque fulcris sustento. De axe in Peritrochio, cum potentiis cognatis. De trochlea, seu polyspasto. De cochlea. De motibus compositis, acceleratis, retardatis, & projectorum. De percussione. De cuneo. De elatere, & resilitione seu reflectione. De Hydrostaticis, & aeris æquipondio. Variisque quæstionibus mechanicis. Anno 1971 edita (pp. 939-1063).*

Nel leggere lo scritto non si può prescindere dalle scelte di tipo culturale ed ideologico che lo stesso autore fa all'interno del mondo matematico, ribaltando il primato della geometria ed affermando quello dell'aritmetica e dell'algebra (questa è la peculiare scelta di Wallis, occupandosi di matematica e di tutto ciò che ha qualche connessione con essa).

Come premessa a tutta la trattazione Wallis precisa il significato che dà al termine *meccanica*, affermando che esso non è inteso quale applicazione di uno strumento puramente materiale né nel significato che ne dà Archimede, quando cerca con metodo geometrico e con dimostrazioni adeguate le proprietà del cerchio ne *La misura del cerchio*. Per lui *la meccanica è quella parte della geometria che si occupa del moto, le cui proprietà vengono dimostrate in modo geometrico* (p. 575). E dello stesso moto dice che è da intendersi quale *moto locale*. Perché non si creino confusioni, in questo caso come in altri, richiama il corrispondente termine greco *forà* e quello latino *latio* quale *trasporto* (p. 575). Quindi precisa il significato da dare a tutti i termini che sono legati al moto, quali forza, tempo, resistenza, lunghezza, momento, impedimento, velocità, gravità, peso, …(pp. 575-79). È ovvio, quindi, che il suo punto di riferimento non è la meccanica degli *antichi* (non quella di Aristotele e dei suoi commentatori latini, novellamente letti e commentati preso l'Università di Padova lungo il Cinquecento), ma è la meccanica che prende avvio in modo determinante dalle riflessioni ed elaborazioni di Galilei e della sua scuola, per i quali la *meccanica è la scienza del moto*, visto nelle sue diverse espressioni, e di tutte quelle grandezze che sono legate al moto e alle sue variazioni (velocità, accelerazione, forza, momento, …), per andare oltre.

In ragione di questa sua collocazione Wallis in prima istanza presenta gli strumenti matematici indispensabili per una trattazione geometricamente significativa del moto: il richiamo alla teoria delle proporzioni quale strumento per un discorso organico all'interno della geometria gli consente sia di esprimere il suo metodo (che consiste nel tradurre le proporzioni in espressioni aritmetiche) sia di leggere le stesse proporzioni così intese quale strumento idoneo per esprimere relazioni fra le grandezze o le quantità che intervengono occupandosi del moto.

In Wallis la geometria conserva il suo significato più classico. Essa, però, non ha il primato sull'aritmetica e sull'algebra. Da lui la situazione precedente viene ribaltata: viene affermato il primato dell'aritmetica e dell'algebra, che costituendo un unico insieme devono garantire per se stesse, prima di tutto, lo stesso grado di certezza e di verità, riconosciuto finora alla geometria. Ciò che Wallis fa nella *Arithmetica Infinitorum* è il tentativo di costituire tale insieme con queste proprietà. Solo allora, ai suoi occhi, ha senso parlare delle equazioni (ciò viene fatto soprattutto nella *Algebra*), le cui soluzioni hanno significato per se stesse. Risolte le equazioni, si può vedere quali soluzioni hanno senso geometrico (per questo motivo egli parla di *accomodatio* dell'algebra alla geometria). Quindi, la geometria nell'accezione classica con l'uso degli strumenti della *Arithmetica Infinitorum* e dell'*Algebra* è la *geometria secondo Wallis*. In questa *geometria* egli colloca la *meccanica*, della quale accentua sia il fatto che si occupa del moto e delle sue proprietà sia il fatto, con accentuazione maggiore, che le proprietà del moto vengono dimostrate in modo geometrico secondo la sua visione della geometria.

Riprendendo il discorso di Wallis, a conclusione della sua *explicatio terminorum* egli prospetta al lettore quale sia la linea che intende seguire con queste parole:

"Priusquam … ad Machinas illas separatim considerandas accedamus, quas Mechanicorum scriptores tractare solent: *Præmittenda erunt communia quædam, quæ omnes ex æquo spectant. Quæ sit Principiorum loco, & a quibus reliqua dependent,* quæ de singulis postea tradendo erunt. *Idque eo magis faciendum incombere videatur: Quia qui antehac tractandum hoc suscepere negotium, videntur citra Principia constitisse: nec ab imis eruta fundamentis, etiam ea quæ sana sunt,* tradidisse: Sed postulasse potius, quæ, utut vera sint, Demonstratione tamen aliqua videntur indigere: Unde, tum, in iis quæ consequuntur, minus acquiescat animus *apodeíxeos* avidus, tum & ea minus valeat, in nova materia, ampliare" (p. 579).

Non è da sottovalutare questo dire di Wallis, in quanto esplicita la visione che gli ha della meccanica quale trattato che deve essere scientificamente significativo ed ineccepibile. L'accento posto sui principi, qui costituiti da tutti gli elementi comuni che vengono chiamati i *fondamenti della meccanica*, distinguendo chiaramente fra ciò che può essere postulato e ciò che non lo può essere perché necessita di dimostrazione; Wallis annota che anche in relazione alla meccanica spesso si è postulato ciò che doveva essere dimostrato.

Osservando l'articolazione della prima parte, si ha l'impressione che Wallis si sforzi di leggere nelle linee essenziali la teoria delle proporzioni del quinto libro degli Elementi euclidei nel contesto delle grandezze legate al moto, quali il momento, la forza, il peso, la velocità, il moto dei gravi, il pendolo. Viene spontaneo paragonare il modo di lettura del quinto libro fatta qui con il sesto libro degli Elementi, in cui Euclide applica ciò che è detto nel quinto alle grandezze geometriche. Ciò si evidenzia meglio nella presentazione (viene detto più di una volta: *secundum mathematicum rigorem*, per esplicitare il suo modo di procedere) della bilancia che viene definita in tal modo:

"Def. IX. *Libram … Mathematicam* consideramus, ad instar unius inflexibilis Lineæ Rectæ, utrinque quantum opus est porrectæ, librandis ponderibus adhibitæ" (p. 617).

Ad essa aggiunge il seguente commento:

"Dummodo enim, positis in Æquilibrio Libræ Brachiis, eorum Pondera nullius instar habeantur; poterit similiter tum Libræ Magnitudo, tum Figura ipsa tuto negligi, ut solius Longitudinis habeatur ratio, ob ea quæ inde dependentia post tradentur" (p. 617).

L'autore non esplicita le sue motivazioni di natura ideologica ed epistemologica. Queste ultime, in particolare, vengono messe in luce dal suo concreto operare; solo occasionalmente si lascia andare a qualche osservazione di carattere generale e fondazionale.

E', perciò, evidente che ai suoi occhi lo schema geometrico è lo strumento più efficace per esprimere le proposizioni nella forma più generale; ciò, nello stesso tempo, consente di esprimerle in termini proporzionali, i quali vengono tradotti dall'autore in relazioni aritmetico-algebriche. Risolvendo queste relazioni (se esse sono equazioni, si trovano le soluzioni), i risultati vengono interpretati in senso geometrico ed, infine, trovato questo, si dà ad ogni elemento il significato meccanico.

L'accento sul modello geometrico, da una parte, e la traduzione aritmetico-algebrica, dall'altra, che costituiscono agli occhi di Wallis gli elementi fondanti ogni discorso sul moto e su tutte le realtà meccaniche, non svia l'autore dal fare qua e là cenno a questioni che in quel momento storico sono molto vive e che non possono essere tralasciate. Quale esemplificazione richiamo ciò che egli annota, dopo aver definito la gravità come *"forza motrice diretta all'ingiù verso il centro della terra"* (p. 576):

"Quodnam sit, in consideratione Physica, Gravitatis principium; *non hic inquirimus*: Neque etiam, An Qualitas dici debeat, aut, Corporis affectio, aut, quo alio nomine censeri par sit. Sive enim ab innata qualitate in ipso gravi corpore; sive a communi circumstantium vergentia ad centrum; sive ab electrica vel magnetica Terræ facultate, quæ gravia ad se alliciat; & effluviis suis, tanquam catenulis, attrahat; sive alias undecunque proveniat; (de quo non est ut hic caveamus litem): *sufficit, ut Gravitatis nomine, eam intelligamus, quam sensu deprehendimus, Vim deorsum moventi, tum ipsum Corpus grave, tum quæ obstant minus efficacia impedimenta*.

Et quidam, quanquam de Naturali Gravitate (prout concipi solet) seu corporis affectione, qua, sua sponte (ut solet dici) deorsum tendit, directe intelligatur. Tamen, … etiamsi de externa vi continua deorsum premente recta ad Centrum Terræ velit quis eas interpretari; non eram solicitus vel hanc ex Gravitatis definitione excludere. *Quæ* enim *de Gravitate affirmantur, de quacunque Vi continua, recta ad Terræ Centrum movente, perioda vera sunt, sive sit ea vis innata, sive adventitia*.

Quæ autem *de Gravitate dicta sunt, respectu Centri Terræ; perinde de quavis alia motrice Vi continua poterunt intelligi, respectu sui quo tendit termini*. Adeoque, *si vox ea, particolari significati hactenus accomodata, quatenus Terræ Centrum respicit, latori sensu intelligatur, de quavis vi motrice continua, recta ad suum terminun movente: non minus vera erunt quæ traduntur; sed & forsan magis accurate dicta; dum generalia generaliter efferuntur*. Sed quondam de Gravitate solent ea speciatim tradi, quæ continuæ Vi Motrici universaliter conveniant: Ego etiam communi errori eatenus me accomodavi, ut interim moneam, generaliter esse vera, quæ speciatim efferuntur" (pp. 576-7).

Wallis ha davanti ai suoi occhi i diversi significati dati ai termini *gravità* e *centro di gravità*, l'uno o l'altro dei quali trova riscontro sia in coloro che si occupano di filosofia naturale quale parte integrante di un corso di filosofia sia in coloro che, seguendo la tradizione medioevale del trattato *De ponderibus* ed influenzati dai trattati archimedei, novellamente riscoperti, si occupano di meccanica propriamente detta. Egli è molto chiaro nella sua scelta: *la gravità rispetto al centro della terra è da considerare come un caso particolare della trattazione delle forze motrici continue che tendono ad un loro termine.*. Con questa affermazione Wallis, pur considerando casi particolari (come afferma alla fine del brano citato), non viene meno alla istanza di cercare situazioni generali, che possono essere lette con il linguaggio universale della geometria.

Il cuore di tutto il trattato di *Meccanica* è costituito dalla seconda parte, che si occupa del centro di gravità e del suo calcolo: il Cap. IV (pp. 645-65) presenta il centro di gravità nel contesto geometrico (costituito dal metodo degli indivisibili di Cavalieri, letto con gli occhi di Torricelli) che Wallis sceglie quale presupposto al Cap. V (pp. 665-938), in cui nel calcolare lo stesso centro per figure diverse applica il suo metodo già esplicitato nella forma generale nella *Aritmetica Infinitorum* (1656). Si coglie subito lo sbilanciamento tra le due parti: 20 pagine per la prima, oltre 270 pagine per la seconda. È ovvio il luogo in cui si concentra l'attenzione dell'autore: il primato dell'aritmetica e dell'algebra, già affermato sia nell'*Arithmetica Infinitorum* sia nel *Tractatus de sectionibus conicis* (1655). Il suo metodo, che afferma tale primato, è dallo stesso autore già applicato nella trattazione della cicloide, della cissoide e dei corpi generati da esse e nella presentazione della rettificazione e della quadratura delle curve (1659).

Il contesto strettamente geometrico viene esplicitato, fermando l'attenzione sul *continuo* inteso secondo il metodo degli indivisibili di Cavalieri:

"Continuum quodvis (secundum Cavallerii Geometriam Indivisibilium) intelligitur, ex Indivisibilibus numero infinitis constare" (p. 645).

Questa definizione molto generale viene esemplificata nei due seguenti modi: 1) il *continuo* (linea, superficie, solido, momento, tempo, …) è costituito da particelle omogenee, infinitamente esigue, numericamente infinite, in modo che siano uguali almeno secondo una dimensione; 2) (*secundum Mathematicum* *rigorem*) in ogni *ente* possono essere inscritte o circoscritte o altrimenti *adattate* infinite *particulæ*, in modo che la differenza tra l'ente e ciò che si è ottenuto sia una quantità infinitamente piccola o più piccola di una quantità fissata.

Wallis preferisce introdurre ed affermare il metodo degli indivisibili per mezzo di una definizione e non per mezzo di una proposizione da dimostrare. Egli, come è attestato negli altri scritti, in particolare nel trattato sulle coniche ed in quello sulla cicloide e la cissoide, si muove con molta libertà sulle problematiche fondazionali riguardanti il ruolo della definizione e della dimostrazione nella costruzione di *discorsi matematici* articolati e significativi. È pienamente consapevole che sta battendo strade nuove: perché il suo non sia un lavoro invano, è necessario che l'articolazione avvenga secondo i più accreditati canoni.

Le 27 proposizioni del Cap. IV, in modo progressivo dalle situazioni più semplici alle più complesse, costituiscono un buon esercizio riguardante le condizioni indispensabili (necessarie e sufficienti!) per considerare solidi di rotazioni. Esse costituiscono una prima base per quel capitolo della meccanica che oggi viene presentato sotto il nome di *moto di un corpo rigido* (per arrivare alle trattazioni odierne sono da considerare altri passi storicamente significativi). A tal proposito, dopo la presentazione della prima proposizione, annota:

"Intelligitur Propositio, de *Gravi* (seu gravium Aggregato) *duro & constante; eousque saltem constante, ut, ea, quæ adhibetur Vi, nec frangatur, nec luxetur* aut incurvetur; quin eandem (saltem æquipollentem) retineat figura, omniumque ipsius partium inter se positionem respectu totius, utcunque situm seu positionem respectu loci mutent: Non de Gravi fluido seu molli, quod promiscue incurvetur, vel figuram suam mutet partiumque inter se positionem. Quod & in aliis subinde propositionibus intelligendum erit" (p. 647).

Chiarito ciò, l'attenzione si concentra sulle proprietà del centro di gravità, le cui principali vengono raccolte nelle due seguenti proposizioni:

"Prop. XIII. Si Centro Gravitatis sustineatur Grave: quocunque situ ponatur, sibi sic permissum, non movebitur.

Punctumque illud, quo si sustineatur, Grave non movebitur quocunque situ positum; est Centrum Gravitatis" (p. 655).

"Prop. XV. Cujusvis Gravis, Centrum Gravitatis unicum est: Idque tum in omnium Axium Æquilibrii, tum in Planorum Æquilibrii omnium concursu.

Estque omne per illud transiens Planum, Planum Æquilibrii; omnisque recta transiens, Æquilibrii Axis" (p. 658),

le cui dimostrazioni sono secondo il modello geometrico, che è ritenuto, come si sa, il modello più perfetto di dimostrazione. In merito alla prop. XV. Wallis annota che egli è il primo a dimostrare che in qualunque grave è dato un unico centro di gravità; questo – egli stesso afferma - da altri è postulato (p. 658).

A ciò fa immediatamente seguire la proposizione che lega il moto di un grave al moto del suo centro di gravità:

"Prop. XVI. Manente in Terræ Centro altitudine, Centro Gravitatis: neque Descendere censendum est Grave, neque Ascendere.

Tantundem vero vel Ascendere vel Descendere censendum est Grave, quantum Ascendit, vel Descendit Centrum Gravitatis.

Adeoque (quoniam hoc in aliis Gravis motibus perinde obtinet) perinde Ponderando valet Grave utcunque situm, atque si in illo puncto totum esse intelligeretur, ubi est ipsius Centrum Gravitatis" (p. 658).

Nello *Scholium* che segue Wallis vuole specificare la relazione fra un grave ed il suo centro di gravità, affermando che tutto ciò che è stato detto dei punti di applicazione e delle loro distanze dal centro, del luogo occupato dai gravi e dei loro moti di discesa si possono riferire ai loro centri di gravità, cioè ogni grave può essere pensato come se fosse concentrato in un unico punto, che è il centro di gravità. Per cui, da questo punto della trattazione tutte le proprietà di un corpo vengono specificate in relazione al centro di gravità.

Al *Caput V. De Calculo Centri Gravitatis* Wallis premette il seguente *Monitum:*

"Hoc Caput Integrum, tanquam a Præcedentibus dependeat, & (*per Methodi leges*) hunc sibi locum vendicare videatur: Non tamen ita in Sequentibus connexum est, quin ut possit ab illis separari. *Cum* itaque *ubi ad interiora Geometriæ penetrandum erit, Calculus necessario sit perplexior*, quan forte Tirones, vel minus exercitati, commode ferre possint: illud jam statim sub initium monendum duxi; ut sicubi perplexi Calculi molestiam subire nolint, possint inoffenso pede ad Capita sequentia transire; quæ ex præcedentibus, hoc omisso, tum satis intelligi, tum & legitime demostrari possint" (p. 665),

nel quale egli manifesta la propria consapevolezza dell'operazione *nuova* che intende introdurre nel calcolo del centro di gravità e che nelle righe seguenti sarà messo in chiaro: pur affermando che il presente capitolo è strettamente legato alla trattazione precedente, deve nello stesso tempo essere considerato a parte, e ciò in forza delle leggi del metodo (*(per Methodi leges) hunc sibi locum vendicare videatur*). Nel momento in cui prende atto delle difficoltà dell'eventuale lettore che ha una stretta formazione geometrica (= tradizionale, cosa che egli ben conosce in ragione della propria formazione), consiglia di mettere eventualmente da parte questo capitolo e proseguire nel discorso. Afferma, inoltre, che, inoltrandosi sempre di più nello studio della geometria (*ad interiora Geometriæ*), il *calcolo* sarà necessariamente *difficile* o *al di là della propria portata* (*Calculus necessario sit perplexior*). Preferisco tradurre il *perplexior* con *difficile* o *al di là della propria portata,* e non con *intricato, tortuoso, confuso, ambiguo, equivoco*, perché nessuno di questi termini può essere ritenuto un giudizio di merito che l'autore dà del suo stesso operato, come ogni paziente lettore può constatare di persona.

Il presente capitolo, perciò, non ha immediati riscontri e confronti con la letteratura di cui ogni cultore di meccanica e/o di geometria dispone in quel periodo. Wallis mette sull'avviso che ci si sta avventurando per un percorso, di cui pochi altri finora possono individuare il tracciato: esso si conoscerà solo nella misura il cui si decide di seguire lui, che è l'artefice di quel tracciato. Scorrendo le prime pagine, che sono una *traduzione* in termini meccanici di tutto ciò che ha elaborato nella *Arithmetica Infinitorum,* si ricava l'impressione che egli è certo di essere seguito: la pacatezza del discorso e la completezza della trattazione evidenziano che la presente trattazione non è il suo *testamento spirituale,* quasi la dettatura delle sue ultime volontà rispetto ad un pubblico sordo ed insensibile, quanto, piuttosto, è la trasmissione di una bella notizia, di una realtà che vale la pena conoscere.

Attraverso due definizioni (cfr. pp. 665-67) opera una ottima sintesi di tutta la trattazione dell'*Arithmetica Infinitorum*, traducendo, nello stesso tempo, il linguaggio aritmetico-algebrico di quest'opera, che presenta notevoli peculiarità, in un linguaggio più vicino a quello che viene usato occupandosi di problemi di meccanica, pur conservando quelle stesse peculiarità. Un esempio di questa traduzione è la constatazione che nell'*Aritmetica Infinitorum* gli elementi delle serie sotto tutti numeri, qui viene usato un termine più generale: si parla semplicemente di *quanta*, cioè enti i più diversi che hanno in comune solo il fatto di essere *misurabili.* Lo strumento matematico è relativo alle serie considerate come somme di termini ad esponente intero o fratti o negativi. Come si sa, in questo periodo non esiste ancora una *teoria delle serie*; Wallis si costruisce di fatto le serie, considerando prima di tutto il rapporto tra la somma parziale dei termini (numeratore del rapporto) e la somma del termine maggiore del numeratore, considerato tante volte quanti sono i termini del numeratore stesso.

Egli stesso nell'*Arithmetica* più volte afferma che procede *per modum inductionis*, indicando con questa espressione il modo concreto della sua costruzione. Perviene al valore del limite di tale rapporto e al valore delle somme parziali. Il calcolo aritmetico-algebrico che Wallis costruisce consente di individuare un insieme che deve garantire tutto ciò che nella tradizione ha garantito la geometria in relazione alla verità, alla certezza, alla chiarezza e al senso della dimostrazione. Le serie, nel progetto dell'autore, devono realizzare un insieme tale, in cui il *continuo* diventi un *dato di fatto* come lo è nella geometria. Ciò spiega perché la trattazione del centro di gravità, fatta in modo nuovo, comincia con una affermazione-definizione del continuo secondo il metodo degli indivisibili di Cavalieri.

Nella *Meccanica* Wallis raccoglie in una sola proposizione i risultati dell'*Arithmetica*. Tale proposizione recita così:

"Prop. I. Si intelligatur infinita series Quantorum, ab ipso capite seriei (puta 0 vel 1/0) inchoatorum, & continue procedentium secundum seriem Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, &c. Subsecundanorum, Subterianorum, &c. aliorumve modo definitorum; eorumve Reciprocam: quorum ultimum datum sit: erit totius ratio, ad seriem totidem ultimo æqualium, ea quæ est Unius, ad Indicem seriei Uno auctum.

Idem continget, si, omisso termino primo, seu 0, Series a secundo termino incipiat; seu a quovis termino qui sit primo & secundo intermedius; Puta si in serie Primanorum (cui reliquæ accomodando intelliguntur) terminus primus sit saltem non major quam communis Excessus seriei" (pp. 667-68),

e viene accompagnata da esempi tratti dall'*Arithmetica*.

In tal modo si è in grado di conoscere il valore a cui tende il rapporto fra le serie che vengono considerate, qualunque sia l'indice della serie stessa.

Ora si è nelle condizioni di coniugare la geometria con l'aritmetica e l'algebra, cioè di tradurre il fatto geometrico, che consiste nel determinare il centro di gravità di alcune figure geometriche, in condizioni aritmetico-algebriche, a cui lo stesso centro di gravità deve soddisfare.

Wallis considera prima le figure regolari piane e solide ed i relativi centri di gravità (prop. II., pp. 669-71) , per passare nelle proposizioni successive alle curve e alle superficie, nei confronti delle quali possono essere considerati rispettivamente poligoni o poliedri inscritti e circoscritti, e quindi a problematiche sempre più complesse, facendo comunque vedere che qui sono molto utili i risultati conseguiti nel considerare rapporti tra serie.

A tal proposito qualche esemplificazione fa rendere conto del lavoro operato da Wallis.

Consideriamo il segmento AB, fissiamo una distanza d e consideriamo N pesi p in punti del segmento, distanti d l'uno dall'altro, a cominciare dal punto A considerato come centro o asse del moto. I pesi si trovano alle seguenti distanze da A: 0, d, 2d, 3d, … D (la distanza massima). Consideriamo i momenti dei pesi: 0P, dP, 2dP, … DP. Se consideriamo il rapporto tra la somma di tutti momenti e l'ultimo momento ripetuto N volte, sappiamo, tenendo presente la serie degli interi 0, 1, 2, 3, …, che il rapporto è uguale a 1/2. Allora:

$$0P + dP + 2dP + \dots = 1/2\ NDP = NP\ (1/2\ D).$$

Quindi la somma di N pesi a distanza d è uguale alla somma totale dei pesi applicata ad 1/2 D (distanza massima). Questa è la distanza del centro di gravità dal piano perpendicolare per A.

Wallis annota che con questo modo di procedere possono essere considerati gli altri casi relativi a figure piane e solide (parallelogrammi, parallelepipedi, cilindri,…).

Prima di procedere oltre, l'autore richiama l'attenzione del *benevolo lettore* sul metodo adottato, perché esso può essere generalizzato:

"Placuit hanc demonstrandi methodum, in re facili, cæteris subjungere, ut eo melius intelligatur, ubi illa post in difficilioribus adhibeatur. Intelligimus (quod semel momendum erit) ubi de figurarum centris gravitatis agitur, æquabiliter gravia esse, sive puncta, sive plana, sive solida ; hoc est, æquali magnitudini æquale pondus inesse; & proportionalibus, proportionalia. Item; Puncta, Lineas, aut Plana, ex quibus idem Grave, ut Linea, Planum, aut Solidum, constari intelligitur; æque crassa esse: ut nempe, pro interjectorum numero, distantiarum ratio censeatur" (p. 671).

Il discorso prosegue individuando le condizioni per determinare, con il suo metodo, il centro di gravità nelle coniche, per quindi procedere verso le altre curve. Data la lunga trattazione, che è sempre lineare e ben documentata, di questo capitolo, fermo l'attenzione su qualche proposizione, quale semplice esempio del suo modo di procedere. Molto più, mi interessa mettere in risalto o aspetti che portano verso generalizzazioni oppure annotazioni circa questioni di metodo, che sono insite alla trattazione.

Wallis, prima di determinare il centro di gravità nei solidi generati dalle coniche, fa notare:

"Notandum tamen; de Curvis Parabolicis, Hyperbolicis, Ellipticis, (quod & de harum similibus intelligendum), diserte dictum esse, *Axe* producto bisecandas ; (non, *quavis* diametro) : Nam, nisi Punctum bisectionis, sit in Axis vertice ; bisecta linea non erit utrinque similiter curva : An in Parabolæ, Hyperbolæ, aut Ellipseos, Portionibus Planis, (recta abscissis; quippe de his intelligendum): quævis Diameter basin totamque aream bisecans, rem præstat. Dum autem has Linearum aut Figurarum species enumeravimus: *alias autem innumeras reperiri certum est: De quibus Demonstratio non minus procedit; suntque sub propositioni generali comprehens*æ. Nobis interim famosiores aliquot enumerare sufficit" (p. 672).

Il problema è di darsi da fare per enumerare più casi possibili. Ne esemplifico qualcuno che è presentato nella prop. VI. (pp. 674-78), per enunciare alla fine il *principio generale* che deve essere usato come *regola* per calcolare il centro di gravità.

In un triangolo o nel cono retto e nella piramide o nel conoide parabolico si presenta la seguente situazione:

1) In un triangolo sulla perpendicolare alla base a partire dal vertice applichiamo i seguenti pesi: 0p, 1p, 2p, 3p,… fino a P. Ad essi possiamo associare la *serie dei primani* (che è di indice 1). Il rapporto tra la somma di tutti i pesi e l'ultimo ripetuto N volte è uguale a 1/2, cioè la somma di tutti i pesi è uguale a 1/2 NP. Se, poi, consideriamo le seguenti distanze dal vertice, a cui i pesi sono applicati, dette distanze sono: 0d, 1d, 2d, … D, che è la massima distanza. I relativi momenti saranno: 0dp, 1dp, 4dp, 9dp, … DP, che ci individua la *serie dei secondani*, il cui indice è 2. Allora il rapporto dei secondani è 1/3. Perciò: 1/3 NDP = 1/2 NP (2/3 D). Quindi il centro di gravità dista dal vertice di 2/3 della massima distanza.

2) In una piramide o in un cono, costruiti attorno al triangolo, dove perpendicolari all'altezza vengono considerati rispettivamente piani e cerchi, ognuno dei quali ha una certa distanza dal vertice in ragione della *serie dei secondani* (qui si stanno considerando aree e non semplicemente punti). Sulla perpendicolare alla base, in corrispondenza di piani e cerchi rispettivamente, siano applicati i pesi p, che in forza della serie dei secondani, sono nell'ordine: 0p, 1p, 4p, 9p, … fino a P, serie di indice 2. La somma di tutti i pesi è uguale a 1/3 NP. Ciò richiama che la piramide o il cono stanno rispettivamente al prisma o al cilindro circoscritti come 1 sta a 3. Consideriamo ora le distanze: 0d, 1d, 2d, 3d, … fino a D. I loro momenti saranno: 0dp, 1dp, 8dp, 27dp, … DP, che ci individua la *serie dei terziani*, il cui indice è 3. Per cui la loro somma è uguale a 1/4 NDP = 1/3 NP (3/4 D). Perciò, la distanza del centro di gravità dal vertice è uguale a 3/4 dell'altezza.

3) Si procede nello stesso modo, occupandosi del complemento della parabola, che è la regione di piano che completa la parabola all'interno del parallelogramma circoscritto, tangente alla parabola nel vertice.. Tale caso viene trattato come quello della piramide. I pesi individuano la serie dei secondani, mentre i relativi momenti individuano quella dei terziani; per cui la somma di tutti i momenti è uguale a 1/4 NDP = 1/3 NP (3/4 D). Quindi il centro di gravità è a 3/4 dell'altezza o della distanza massima dal vertice.

4) Il complemento del paraboloide cubico individua la *serie dei terziani*, per cui i pesi sono così disposti: 0p, 1p, 8p, 27p, … fino a P, la cui somma è uguale a 1/4 NP. Considerando le distanze: 0d, 1d, 2d, 3d, … D, calcoliamo i momenti: 0dp, 1dp, 16dp, 81dp, … DP. La loro somma è uguale a 1/5 NDP = 1/4 NP (4/5 D). Per cui la distanza del centro di gravità dal vertice è uguale a 4/5 D.

5) La parabola ci individua la *serie dei subsecondani*, il cui indice è 1/2. Per cui i pesi sono così disposti: $0^{1/2}$p, $1^{1/2}$p, $2^{1/2}$p, $3^{1/2}$p, … P, le distanze sono: 0d, 1d, 2d, 3d, …D; per cui i momenti sono: d$0^{1/2}$p, 1d$1^{1/2}$p, 2d$2^{1/2}$p, 3d$3^{1/3}$p, … DP, che è la stessa della successione: d$0^{1/2}$p, d$1^{1/2}$p, d$8^{1/2}$p, d$27^{1/2}$p, … DP, che è la *serie dei cubi dei subsecondani*, il cui indice è 1 + 1/2 = 3/2. Perciò la somma dei momenti è uguale a 2/5 NDP = 2/3 NP (3/5 D). Allora la distanza del centro di gravità dal vertice è 3/5 D.

6) Il paraboloide cubico individua la *serie dei subterziani,* il cui indice è 1/3. Per cui, procedendo come negli esempi precedenti, si ha:

per i pesi: $0^{1/3}$p, $1^{1/3}$p, $2^{1/3}$p, $3^{1/3}$p, … P, la cui somma è uguale a 3/4 NP;

per le distanze: 0d, 1d, 2d, 3d, … D.

I rispettivi momenti sono: 0d$0^{1/3}$p, 1d$1^{1/3}$p, 2d$2^{1/3}$p, 3d$3^{1/3}$p, … DP, che è la successione: d$0^{1/3}$p, d$1^{1/3}$p, d$16^{1/3}$p, d$81^{1/3}$p, … DP, che individua la *serie dei biquadratici subterziani,* il cui indice è 1 + 1/3 = 4/3.

La somma dei momenti è uguale a 3/7 NDP = 3/4 NP (4/7 D). Per cui la distanza del centro di gravità dal vertice è 4/7 D.

Come è suo stile nei suoi diversi scritti matematici, Wallis raccoglie i risultati raggiunti, generalizzandoli (p. 677), nel seguente modo:

se l'indice dei pesi è S, allora:
la somma dei pesi è uguale a 1/(S + 1) NP;
l'indice dei momenti sarà S + 1;,
la loro somma sarà uguale a 1/(S + 2) NDP.

Questa, divisa per la somma dei pesi, darà (S + 1) / (S + 2) D, che è la distanza del centro di gravità dal vertice, cioè la distanza del centro di gravità sta alla distanza massima come (S + 1) sta a (S + 2).

Di conseguenza, la distanza del centro di gravità dalla base è uguale a 1/(S+ 2)D.

Per cui la distanza del centro di gravità dal vertice sta alla distanza dello stesso centro dalla base, come (S + 1) sta a 1.

A questo punto Wallis osserva che i risultati ottenuti circa il centro di gravità riguardano figure piane e solide, *terminate* da piani, e figure piane e solide curvilinee, terminate da superficie curve, tutte figure che vengono dai *Veteres*. La novità finora è consistita esclusivamente nell'applicare a tutte queste figure prima il metodo degli indivisibili di Cavalieri, lavoro in gran parte già fatto sia dallo stesso Cavalieri nei suoi scritti che da Torricelli, e poi – è questa la *sua* novità – il metodo espresso nell'*Arithmetica Infinitorum*. Wallis anche qui rivela la sua metodologia nel far vedere la bontà del metodo la lui creato. Come ha già fatto per le coniche, qui sperimenta la *bontà del suo metodo* studiando i problemi degli *Antichi*, ottenendo per questa via (il suo metodo) gli stessi risultati. Agli occhi dell'autore il risultato finora conseguito è fondamentale, perché lo fa arrivare alla conclusione che la strada da lui battuta non è errata. Questa certezza gli consente di volare verso lidi nuovi, alla scoperta di realtà finora sconosciute.

Come si è detto il capitolo è lungo e si presenta fitto di annotazioni, nelle quali il confronto fra *Antichi* e *Moderni* è costante. Nell'avviarsi verso nuovi lidi Wallis annota:

"hactenus … Centrum Gravitatis invenimus, in figuris omnibus Planis Rectilineis; & Solidis, quæ planis terminantur : Sed & in Planis Curvilineis, & Solidis curvis superficiebus terminatis, non paucis ; tum Magnitudinem tum & Centrum Gravitatis determinavimus. *Et quidem longe pluribus quam quo pertigerat doctrina Veterum.. Atque, in sequentibus, ad plura adhuc procedendum, ultra quam (quantum scio) quisquam pertigit Recentiorum; saltem ultra quam a quoquam editum est, ante editam nostram (unde hæc directa methodo deducuntur) Arithmeticam Infinitorum*… Plura vero quæ huc spectant, videat (cui id lubitum erit) in nostra *Aritmetica Infinitorum;* (ubi hæc Methodus fusius traditur): Et in nostro *Commercio Epistolico,* (cum D. Fermatio, aliisque) Epist. 16, ejusque Appendice" (p. 678),

consapevole che qualche altro dei moderni si è avventurato sulla stessa strada.

Dalla prop. VII. (p. 679) alla prop. XXXII. (p. 938), con cui si chiude il capitolo, le questioni trattate riguardano tutte problematiche nuove relative a curve e ai solidi ottenuti nella loro rotazione. Le questioni e gli stessi calcoli diventato via via più complicati. Si ha l'impressione che questa seconda parte del capitolo trovi il suo punto centrale nelle questioni riguardanti la cicloide (cfr. in particolare le propp. XX., XXI. E XXII. (pp. 800-62), nelle quali Wallis, con toni per nulla polemici rispetto a quelli usati nel trattato sulla cicloide dà una risposta matematicamente significativa alle questioni a suo tempo poste da Pascal.

Da una parte si coglie l'enorme mole di lavoro a cui Wallis si è sottoposto, dall'altra il tutto appare quasi un lungo e affascinante esercizio di natura geometrica e algebrica insieme, in cui sembra che lo scopo primario dell'autore sia quello di far sperimentare la potenza del suo metodo, se con esso si ottengono tanti risultati, e di far vedere come il mondo della matematica si amplia sempre di più.

Anche se la terza parte della *Meccanica*, che tratta delle macchine semplici, viene presentata da Wallis con meticolosità, la conclusione del trattato si trova alla fine della seconda parte, quando cioè egli termina il suo cammino per calcolare il centro di gravità. Le sue parole necessitano la nostra attenzione. Così recitano:

"Atque hic tandem pedem figo; neque hoc *De Calculo Centri Gravitatis* Caput ulterius produco. *In quo si quispiam causetur me satis aliquando perplexum fuisse; utut id non negem, perplexo (si quod aliud) subjecto imputandum erit*. Non dubito quin, qui intricatissimam rerum traditarum natura intelligunt, me satis dilucide pro subjecta materia tradidisse, existimabunt; nec speraverint forsan clarius hoc olim ab aliis traditum iri. Si cui nimius fuisse videat; utut ego is sim qui de hoc omnium maxime conqueri debeam, qui incredibilem intricatissimi calculi laborem, ne dicam infinitum, sustinui solus): qui tamen multiplicem rerum traditarum copiam perpendit, atque succintam tradendi methodum; facile pro me sponsor erit, me, pro tanta materiæ variegate, etiam brevem fuisse: Dum ea, unico hoc capite, tradi videat, quæ, si, aliorum quorundam exemplum sequutus, in longum protraxisse vellem, ad spissa satis volumina, neque pauca, materiam affatim suppeditarent. Contra vero, si quis istiusmodi alia non pauca adjungi potuisse queratur, quæ tanquam omissa desiderat: neque ego hoc negaverim, (neque id mihi in animo fuit, sic omnia undecunque corrodere, ut nullum superesset seguenti spicilegium): *Addo* tamen*, etiam ea forsan ipsa, quæ tanquam desiderata causantur illi, si rite animum adverterint, ita universaliter tradi perspiciant, ut nihil ultra desit, quam ut, universaliter tradita, ad particulares casus applicentur: Saltem eas hic methodos tradi, quæ si ad quæsita particularia accomodentur, etiam illa innumera, quæ hactenus pro difficilibus fuerint abita, expedire poterunt*" (p. 938).

Come in precedenza ho messo in evidenza, fino a questa conclusione e nella terza parte del trattato il tono è pacato in generale ed elevato lì dove la trattazione lo richiede, soprattutto, quando Wallis esprime la consapevolezza di presentare qualcosa di radicalmente nuovo nel metodo.

In questo tratto il suo tono diventa sferzante, non certamente nei confronti dei *Veteres,* verso i quali l'autore conserva un atteggiamento di gratitudine per ciò che hanno fatto, ma verso qualcuno dei *Recentiores*, il quale, pur presentandosi paladino di novità, da una parte, non vuole sottoporre ciò che è frutto della propria riflessione ed elaborazione al giudizio degli altri, e, dall'altra, intende presentare solo affermazioni generali, senza sottoporsi alla fatica del giustificare ogni elemento della propria *nuova* costruzione, se tale la si vuole presentare. L'autore tiene a mettere in evidenza che è semplicemente illusorio racchiudere in uno spazio più contenuto ciò che egli ha presentato attorno al calcolo del centro di gravità con il suo metodo. Non è possibile - afferma ancora – presentare con caratteri generali (si fa riferimento ad un metodo *universaliter tradita*), ciò che prima di tutto ha bisogno di essere *adattato (accomodentur)* alle situazioni particolari. Sembra che Wallis dica: prima analizziamo le situazioni particolari, usando gli strumenti nuovi da noi creati; solo successivamente saremo in grado di procedere per grandi sintesi.

Nel chiudere questo excursus attraverso il trattato di *Meccanica* di J. Wallis, rilevo che l'elemento più significativo consiste nello sforzo di *manipolare* (mi si lasci correre tale termine) il suo metodo, in modo che diventi uno strumento efficace per leggere ed interpretare i fatti della meccanica in modo diverso rispetto alle elaborazioni precedenti e coeve.