Analisi e riflessioni su due lavori giovanili di Levi-Civita riguardanti questioni fisico-matematiche di fine ottocento

***Fabio Toscano*[1]**

1 - Introduzione

Nel 1900 apparve sulla prestigiosa rivista *Mathematische Annalen* la fondamentale memoria riassuntiva sul calcolo differenziale assoluto (oggi calcolo tensoriale) *Méthodes de Calcul Différentiel Absolu et Leurs Applications* di Gregorio Ricci Curbastro in collaborazione con Tullio Levi-Civita.[2] Nelle parole di Robert Hermann: "This memoire is one of the most influential and important in the history of *both* differential geometry and mathematical physics. For example, it seems to have been the basic document from which Einstein learned the tensor analysis that he used in the creation of General Relativity".[3] D'altra parte, come è noto, prima di Einstein, che venne a conoscenza dei *Méthodes* nel 1912, i metodi di Ricci non furono adeguatamente apprezzati dai contemporanei, sia in Italia che all'estero, e "the memoir in the Annalen did not evoke a particularly enthusiastic response".[4]

Lo scopo dei *Méthodes*, nelle intenzioni degli autori, era stato quello di consentire alla comunità dei matematici la conoscenza e la familiarità coi nuovi algoritmi, in particolar modo di stimolare la consapevolezza dei loro possibili ambiti di applicazione: "Lorsqu'on se pose *ex-novo* un certain problème, il suffit de supposer ses éléments déterminatifs exprimés en variables tout à fait générales, et de substituer la dérivation covariante (…) à la dérivation ordinaire, pour que les équations du problème se présentent sans aucun effort sous forme invariantive. Comme nous le verrons dans plusieurs applications, c'est là le grand chemin, qu'il faut suivre, lorsqu'il s'agit de théories générales, et lorsqu'on a pour but une exposition systèmatique de ces théories."[5] Aggiungono poi Ricci e Levi-Civita che: "Certainement cette méthode ne peut pas réussir dans tous les cas mais elle conduit bien souvent au but d'une manière rapide et facile. C'est ce qui arrive particulièrement, comme nous le verrons, pour les équations de la Physique mathématique."[6]

Ma, come detto, l'articolo non ebbe, fino al 1912, il successo sperato. Sull'argomento è tornato di recente Umberto Bottazzini in un interessante scritto nel quale l'autore esamina l'emergere del calcolo tensoriale dal punto di vista della comunità matematica dell'epoca.[7] In particolare, riferendosi proprio ai *Méthodes*, Bottazzini scrive: "After presenting the algorithm of the ADC,[8] Ricci and Levi-Civita applied the ADC to a number of geometric and physico-mathematical problems in order to show the fruitfulness of their 'good notation'. However, in absence of new results which depended on the new algorithm *in an essential way*, for most mathematicians of the time the ADC appeared to be little more than a formal trick. There was no need to learn these complicated calculations to obtain results which were available with classical, well-known methods. In the end, this (not unfounded) opinion was also Bianchi's opinion. (…) It is an easy task to find fault with this attitude from a modern viewpoint. It is an *a posteriori* evaluation, which prevents us from understanding the actual dynamics of the historical development."[9]

I commenti di Bottazzini sono senz'altro largamente condivisibili: troppo facile giudicare con la sapienza dei posteri, ossia, nel caso in questione, dopo l'affermarsi del paradigma relativistico. Sulla stessa lunghezza d'onda si trova Rossana Tazzioli:

---

[1] Centro Interuniversitario di ricerca in Filosofia e Fondamenti della Fisica
Università di Urbino - Università di Bologna
[2] Ricci Curbastro & Levi-Civita (1900).
[3] Hermann (1975), p. 3
[4] Speziali (1981), 409.
[5] Ricci Curbastro & Levi-Civita (1900), 207.
[6] Ibid., 208.
[7] Bottazzini (1999).
[8] "Absolute Differential Calculus".
[9] Bottazzini (1999), 253.

"Ai contemporanei di Ricci le difficoltà intrinseche al suo metodo non sembravano essere giustificate dai risultati che, seppure interessanti, potevano essere dedotti con procedure più semplici anche se meno organiche. […] Appare un fatto incontestabile che la matematica di fine Ottocento potesse fare a meno di un metodo così complicato come era l'algoritmo di Ricci."[10]

Come visto, nel brano citato in precedenza Bottazzini chiama in causa Luigi Bianchi, matematico fra i massimi esponenti della geometria differenziale ottocentesca di stampo gaussiano. Bianchi, portavoce della Commissione che negò a Ricci il Premio Reale per la matematica bandito dall'Accademia dei Lincei per il 1901, ebbe a scrivere nella sua relazione (del 1904): "(…) Gli algoritmi da [Ricci] sviluppati (…) si dimostrano certamente utili, sebbene non indispensabili, nel trattare varie questioni matematiche; e di ciò troviamo le prove nei lavori stessi del Ricci e in quelli di alcuni pochi seguaci."[11]

Il tono di Bianchi in questo passo appare francamente un po' troppo caustico e il suo giudizio forse non del tutto fondato, anche prima del 1912. Il più noto e brillante fra i "pochi seguaci" di Ricci era proprio Levi-Civita, oggi riconosciuto come uno dei più grandi matematici della sua epoca. Ebbene, due lavori giovanili di Levi-Civita (nato nel 1873) sembrano contraddire in qualche misura la tesi storiografica secondo la quale non erano stati individuati, prima della relatività, problemi nei quali i "complicati calcoli" di Ricci fossero oggettivamente e autenticamente indispensabili.

Nel 1896 Levi-Civita, con la sua fondamentale ricerca *Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche*,[12] fornì una dimostrazione estremamente significativa della fecondità del calcolo di Ricci nella trattazione di un problema lasciato irrisolto da matematici della levatura di Paul Emile Appell e Paul Painlevé. Tre anni dopo lo stesso Levi-Civita provò ancora la potenza del calcolo differenziale assoluto, con la memoria *Tipi di potenziali che si possono far dipendere da due sole coordinate*,[13] pervenendo alla completa soluzione di un problema che nemmeno Vito Volterra, e prima di lui Bernhard Riemann, erano riusciti ad esaurire. Se è vero, come scrisse Angelo Tonolo, che "Ricci saggiò [principalmente] il suo algoritmo in un campo non adatto per farne apprezzare l'utilità",[14] ossia la classica teoria delle superfici gaussiane, fu dunque la fisica matematica, grazie ai citati lavori di Levi-Civita, a costituire il terreno più fertile per mostrare l'efficacia applicativa del calcolo tensoriale, là dove, peraltro, i metodi classici di indagine matematica si erano rivelati pressoché impraticabili.

Oggetto della presente relazione è dunque una sintetica analisi di questi due importanti - e forse un po' troppo trascurati[15] - lavori di Levi-Civita,[16] e qualche riflessione finale circa il loro ruolo nell'ambito della ricostruzione storica delle vicende che hanno portato i matematici (e anche i fisici) di un secolo fa ad assumere un atteggiamento diffidente, e sovente di indifferenza, nei confronti del calcolo di Ricci prima della svolta einsteiniana.

[10] Tazzioli (2000), 207.
[11] Bianchi (1904), 150.
[12] Levi-Civita (1896).
[13] Levi-Civita (1899).
[14] Tonolo (1954), 10.
[15] Non da Dionigi Galletto, che vorrei in questa sede ringraziare di cuore per le utili e stimolanti discussioni avute con lui sul tema affrontato nella presente relazione. Si vedano Galletto (1973) e (1980).
[16] I quali, peraltro, sono segnalati anche in Ricci & Levi-Civita (1900), 255-263.

2 - Sulle Trasformazioni delle Equazioni Dinamiche

"Accanto al problema classico della trasformabilità di due forme differenziali quadratiche è stato posto in questi ultimi anni dal sig. Appell[17] il problema analogo più generale della trasformabilità di due sistemi di equazioni dinamiche fra uno stesso numero di variabili. Varii autori hanno dopo di allora istituito ricerche su questo soggetto, segnatamente i sigg. Painlevé[18] e R. Liouville,[19] cui spetta il merito di aver scoperto alcune interessanti proprietà generali."[20]

Il problema posto da Appell nel 1892 può essere enunciato nel modo seguente: sia dato un sistema dinamico (A), le cui forze non dipendano dalla velocità. Si definisca poi sistema dinamico corrispondente (A_1) ogni sistema le cui forze non dipendano dalla velocità e che abbia le stesse traiettorie del sistema originale. Si tratta allora di riconoscere e determinare tutti i sistemi corrispondenti ammessi da un dato sistema dinamico iniziale.

Dal punto di vista analitico ciò si traduce assegnando i due sistemi dinamici:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^{\mu}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^{\mu}}=X_{\mu} \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{x}'^{m}}\right)-\frac{\partial T'}{\partial x'^{m}}=X'_{m} \tag{2.2}$$

dove T indica l'energia cinetica e le X_{μ} sono le componenti covarianti delle forze agenti, e cercando una trasformazione del tipo:

$$\begin{cases} x'_{\mu} = x'_{\mu}(x_{\nu}) \\ dt' = \dfrac{dt}{f(x_{\nu})} \end{cases} \tag{2.3}$$

tale che le traiettorie dei due sistemi coincidano.

Esiste un caso particolare di notevole interesse, quello affrontato da Levi-Civita, nel quale le forze agenti su un sistema dinamico sono nulle:

$$X_{\mu}=0 \tag{2.4}$$

in tal caso, ciò vale anche per tutti i suoi sistemi corrispondenti:

$$X'_{\mu}=0 \tag{2.5}$$

[17] Appell (1892).
[18] Painlevé (1894).
[19] Liouville (1895).
[20] Levi-Civita (1896), 207.

Levi-Civita riconduce il problema all'aspetto geometrico. L'espressione dell'energia cinetica identifica infatti una varietà con metrica assegnata, formalmente equivalente all'energia cinetica stessa:

$$2T = g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} \tag{2.6}$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \tag{2.7}$$

Il problema dinamico equivale a determinare tutte le varietà ψ rappresentabili su una varietà assegnata φ (il cui elemento lineare sia $ds = dt\sqrt{2T}$), in modo che ad ogni geodetica di ψ corrisponda una geodetica di φ.

Liouville aveva affrontato questo caso particolare, senza però riuscire a darne una risposta definitiva; nelle parole di Levi-Civita: "Il problema generale della determinazione di tutti i [sistemi dinamici] corrispondenti ad un dato [sistema] (A) non venne ancora trattato. Il sig. Liouville ne ha stabilite le equazioni differenziali (…) senza tuttavia proporsene la effettiva integrazione, ciò, che per verità, prendendo direttamente le sue formule, non sarebbe punto agevole."[21]

Il caso in questione viene interamente risolto da Levi-Civita nel lavoro in esame tramite i mezzi del calcolo di Ricci.

Sia:

$$\varphi = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \tag{2.8}$$

l'elemento di superficie di una varietà assegnata (sistema dinamico di partenza), e sia:

$$\psi = g'_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta} \tag{2.9}$$

l'analoga espressione per una qualsiasi delle varietà rappresentabili sulla varietà di partenza, con conservazione delle geodetiche (sistema dinamico corrispondente).

"Fissate (…) le equazioni, che legano le [$g'_{\alpha\beta}$] alle [$g_{\mu\nu}$], mi occupo (…) di trasformarle, introducendo le derivate covarianti del prof. Ricci, che sono prezioso quanto elegante stromento in tutte le ricerche , che hanno carattere invariantivo."[22]

Prima di utilizzare i metodi di Ricci, Levi-Civita ne richiama i concetti salienti, concludendo l'esposizione con la seguente, significativa affermazione: "Questo breve richiamo ci pone in grado di adoperare con maggior disinvoltura talune denominazioni e taluni procedimenti, che non sono forse finora, come sarebbe desiderabile, divenuti abbastanza d'uso comune."[23]

È lo stesso Levi-Civita poi a sintetizzare efficacemente il procedimento seguito: "Estesi (…) al caso di *n* variabili taluni procedimenti di calcolo, immaginati dal [Ricci] nelle sue ricerche sulla teoria delle superficie, me ne valgo (…) per attribuire alle mie equazioni un aspetto molto più semplice e sotto cui l'interpretazione geometrica si presenta spontanea. [Essa] rivela infatti l'esistenza nelle coppie di

[21] Ibid., 211.
[22] Ibid., 212.
[23] Ibid., 227.

varietà corrispondenti (…) di speciali famiglie di superfici, che, assunte a sistema coordinato, attribuiscono forme particolari ai quadrati degli elementi lineari."[24]

Il risultato al quale l'autore perviene è allora il seguente: Sia f_i una funzione arbitraria della sola variabile x_i $(i = 1,\ldots,n)$ e siano C e c due costanti arbitrarie. Allora, ogni elemento di superficie ($\Rightarrow$ ogni sistema) la cui forma sia del tipo generale:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j\neq i}\left|f_j - f_i\right|\right)dx_i^2 \tag{2.10}$$

ammette i corrispondenti elementi ($\Rightarrow$ sistemi):

$$ds'^2 = \frac{C}{(f_1 + c)..(f_n + c)}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f_i + c}\left(\prod_{j\neq i}\left|f_j - f_i\right|\right)dx_i^2 \tag{2.11}$$

($ds'^2 = K \cdot ds^2$ caso banale) e solo quelli.

"Così, ad opera del Levi-Civita, il Calcolo differenziale assoluto, che sino allora il Ricci, fors'anche contrastato dall'incomprensione dei matematici di quel tempo, aveva cimentato quasi esclusivamente entro i confini tradizionali della Geometria differenziale metrica , era per la prima volta portato a mostrare la sua potenza nella trattazione di un problema nuovo ed elevato, di fronte al quale sarebbero riusciti vani mezzi d'indagine meno penetranti."[25]

3 - Tipi di potenziali che si possono far dipendere da due sole coordinate

"La teoria del potenziale logaritmico, edificata da C. Neumann[26] e le ricerche del Prof. Beltrami sui potenziali simmetrici[27] indussero il prof. Volterra a discutere in generale le proprietà dei potenziali che si possono far dipendere da due sole coordinate.[28] Egli ne ha stabilito i più salienti caratteri, indicandone le possibili applicazioni a problemi svariati di fisica matematica. Rimane tuttavia – osserva al principio della sua memoria lo stesso prof. Volterra – una questione preliminare da risolvere, assegnare cioè i varî tipi dei potenziali in discorso. Tale è il compito , che io qui mi prefiggo."[29]

La questione a cui allude Levi-Civita nell'introduzione della sua memoria può essere sinteticamente chiarita nei termini seguenti.

[24] Ibid., 212.
[25] Amaldi (1946), 13. Padre del fisico Edoardo, Ugo Amaldi dedicò la sua opera di matematico alla teoria dei gruppi continui di trasformazioni e a vari temi di analisi infintesimale e di meccanica razionale; fu di Levi-Civita amico e collaboratore.
[26] Neumann (1877).
[27] Beltrami (1881).
[28] Volterra (1883).
[29] Levi-Civita (1899), 381.

Sia data l'equazione di Laplace in coordinate curvilinee qualsiasi x_1, x_2, x_3:

$$\nabla^2 u = 0 \tag{3.1}$$

In generale, quando si ponga:

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0 \tag{3.2}$$

l'equazione ridotta non potrà essere indipendente da x_3 , cioè le due equazioni $\nabla^2 u = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_3} = 0$ non formeranno un sistema completo.

Vi sono casi particolari, fra i quali quelli citati da Levi-Civita, in cui questa circostanza invece si presenta.

Sia data l'equazione di Laplace tridimensionale in coordinate cartesiane:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{3.3}$$

Se si suppone che la funzione u non dipenda da z , l'equazione si riduce alla:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{3.4}$$

la quale definisce la classe dei potenziali logaritmici (o di Neumann), che hanno la proprietà di conservare lo stesso valore lungo le rette parallele all'asse z :

$$\begin{cases} x = \cos t. \\ y = \cos t. \end{cases} \tag{3.5}$$

Analogamente, considerando l'equazione di Laplace in coordinate polari (ρ,θ,φ), si può supporre che u non dipenda da φ, senza limitare in partenza la generalità delle soluzioni. Ponendo infatti $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$ nell'equazione:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \operatorname{sen}\theta \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right] = 0 \tag{3.6}$$

non resta più traccia di φ nei coefficienti. Si definisce in tal modo la classe dei potenziali simmetrici (o di Beltrami), che sono costanti sulle circonferenze:

$$\begin{cases} \rho = \cos t. \\ \theta = \cos t. \end{cases} \qquad (3.7)$$

Il problema posto da Volterra nel 1883 era dunque quello di chiarire se, oltre ai tipi di potenziali binari già noti, ne esistessero altri e di determinare eventualmente tutti i casi possibili.

Il problema in questione, ricorda Levi-Civita,[30] si era peraltro implicitamente presentato nella *Commentatio mathematica* di Riemann riguardo all'equazione di propagazione del calore:[31]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k\nabla^2 u = 0 \qquad (3.8)$$

Levi-Civita aggiunge poi che : "Uno studio diretto [del problema] sarebbe per altro pressoché impraticabile, causa il rapido complicarsi delle formule. Ho fatto perciò appello ai metodi del prof. Ricci, che con mirabile agilità si adattano a questioni svariatissime, mettendone ognora a nudo l'intima natura e sfrondandole da ogni difficoltà inessenziale."[32]

Ancora una volta il problema viene ricondotto dall'autore all'aspetto geometrico. Date le coordinate generali x_1, x_2, x_3, una classe di potenziali binari, indipendenti da x_3, è caratterizzata dalla sua congruenza equipotenziale:

$$\begin{cases} x_1 = \cos t. \\ x_2 = \cos t. \end{cases} \qquad (3.9)$$

formata dalle curve lungo le quali tutti i potenziali u hanno valore costante.

Una volta che sia nota questa congruenza, è sufficiente associare alle famiglie $x_1 = \cos t.$ e $x_2 = \cos t.$ una terza famiglia indipendente e arbitraria $x_3 = \cos t.$.

L'equazione che definisce i potenziali corrispondenti è ottenuta trasformando $\nabla^2 u = 0$ in coordinate x_1, x_2, x_3 e ponendo $\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$.

Il problema geometrico è allora quello di determinare tutte le congruenze di curve equipotenziali dello spazio, ossia di stabilire le condizioni affinché la congruenza:

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \frac{dx_3}{\xi_3} \qquad (3.10)$$

dove $\left(\xi_i = \frac{dx_i}{ds}\right)$, sia formata da curve equipotenziali.

[30] Ibid., 382.
[31] Riemann (1861), 370.
[32] Levi-Civita (1899), 383.

Levi-Civita studia la geometria intrinseca delle congruenze di curve equipotenziali con i metodi del calcolo differenziale assoluto, giungendo alla seguente classificazione:

1) Congruenze rettilinee isotrope
2) Congruenze di cerchi con lo stesso asse
3) Congruenze di elicoidi
4) Congruenze di spirali

L'autore ne trae una classificazione corrispondente per i potenziali binari. Essi sono così *isotropi* (o *logaritmici*), *simmetrici*, *elicoidali* e *spirali*. La teoria ammetterebbe anche il caso dei potenziali *conici*, che Levi-Civita dimostra però essere riducibili al caso isotropo.

Questa la tabella riassuntiva:[33]

1) Potenziali logaritmici:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_2^2} = 0 \qquad \underbrace{\rho_1, \rho_2}_{\substack{\textit{coordinate} \\ \textit{cartesiane}}}$$

2) Potenziali circolari o simmetrici:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_2^2} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial u}{\partial \rho_1} = 0 \qquad \begin{cases} x = \rho_1 \cos \rho_3 \\ y = \rho_1 \operatorname{sen} \rho_3 \\ z = \rho_2 \end{cases}$$

3) Potenziali elicoidali:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_1^2} + \left(1 + \frac{m^2}{\rho_1^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \rho_2^2} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial u}{\partial \rho_1} = 0 \qquad \begin{cases} x = \rho_1 \cos \rho_3 \\ y = \rho_1 \operatorname{sen} \rho_3 \\ z = \rho_2 - m\rho_3 \\ (m > 0) \end{cases}$$

4) Potenziali conici:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_1^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \rho_1}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho_2^2} + \cot g\rho_1 \frac{\partial u}{\partial \rho_1} = 0 \qquad \begin{cases} x = \rho_3 \operatorname{sen} \rho_1 \cos \rho_2 \\ y = \rho_3 \operatorname{sen} \rho_1 \operatorname{sen} \rho_2 \\ z = \rho_3 \cos \rho_1 \end{cases}$$

[33] Ibid., 393-394.

5) Potenziali spirali:

$$\nabla^2 u = \left(1 + \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2 \rho_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \rho_1^2} + \frac{1}{\rho_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho_2^2} + \frac{1}{\rho_1}\left(2 + \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2 \rho_2}\right)\frac{\partial u}{\partial \rho_1} + \frac{1}{\rho_1^2}\cot g\rho_1 \frac{\partial u}{\partial \rho_2} = 0$$

$$con \begin{cases} x = \rho_1 \operatorname{sen} \rho_2 \cos \rho_3 \exp(m\rho_3) \\ y = \rho_1 \operatorname{sen} \rho_2 \operatorname{sen} \rho_3 \exp(m\rho_3) \\ z = \rho_1 \cos \rho_2 \exp(m\rho_3) \end{cases} \qquad (m > 0)$$

Anche in questo caso, dunque, Levi-Civita mostra la potenza e la completezza del calcolo di Ricci. Di queste classi di potenziali solo quelli spirali sono nuovi; ma la vera efficacia della dimostrazione sta nella sua completezza, perché si dimostra in via definitiva che ogni potenziale binario può appartenere solo e soltanto ai tipi descritti sopra.

Conclusioni

Le due fondamentali ricerche di Levi-Civita analizzate in questa relazione testimoniano dunque la presenza di risultati estremamente importanti e soprattutto originali ottenuti, grazie all'applicazione dei metodi tensoriali di Ricci, in epoca pre-relativistica.

Come si è visto, con Levi-Civita la meccanica analitica e la fisica matematica classica si rivelano campi fecondi di applicazione del calcolo differenziale assoluto, strumento che poteva dunque dare la possibilità di risolvere problemi inattaccabili con i metodi classici.

Eppure, leggendo le parole di Bianchi nella sua relazione per il Premio reale del 1901 citate in precedenza, si è portati a concludere che questi risultati furono assai sottovalutati rispetto alle possibilità accennate.

Una possibile chiave di lettura di questa circostanza può essere offerta a partire dalle seguenti considerazioni di Luca Dell'Aglio: "Espressioni di una figura scientifica a metà tra due epoche, le ricerche di Levi-Civita presentano un complesso rapporto tra metodi astratti e questioni applicative; elemento che costituisce una delle loro principali caratteristiche metodologiche."[34]

Questo rapporto caratterizza con tutta evidenza anche i lavori giovanili di Levi-Civita esaminati nella presente relazione, influendo, peraltro, sulla loro valutazione da parte della comunità scientifica dell'epoca.[35] Questioni di matematica applicata come quelle affrontate da Levi-Civita potevano non essere sufficientemente apprezzate da un matematico puro, quale era per esempio Luigi Bianchi, in quanto totalmente fuori dal suo campo di interessi. E d'altra parte i "nuovi" metodi tensoriali potevano apparire troppo astratti, nonché disagevoli, per un matematico applicativo di fine Ottocento. Le teorie delle forme differenziali quadratiche e degli invarianti, alle quali il calcolo differenziale assoluto faceva capo, avevano poi un dominio di indagine lontano dagli interessi dei fisici,[36] nonostante Ricci e Levi-Civita si fossero prodigati nei *Méthodes* ad illustrare l'applicabilità del loro algoritmo in vari

[34] Dell'Aglio (1993), 124.
[35] Si veda Hodge (1942), 108.
[36] Fra l'altro, come è ben noto, i fisici italiani tra fine '800 e inizio '900 erano per lo più fisici sperimentali.

campi quali l'elasticità, la meccanica analitica, l'elettromagnetismo e la teoria del calore.

Tornando alla relazione di Bianchi del Premio Reale del 1901, è stata di recente proposta una rilettura della vicenda legata alla mancata premiazione di Ricci fondata sull'esclusione dal concorso di Federigo Enriques e Guido Castelnuovo.[37] I due matematici, che lavorando in stretta collaborazione avevano ottenuto già notevoli risultati nell'ambito della teoria delle superfici algebriche, avevano infatti richiesto all'Accademia dei Lincei di partecipare congiuntamente al concorso per il Premio, chiedendo tuttavia di essere giudicati su quindici lavori, di cui sei del solo Castelnuovo, sei del solo Enriques e solamente tre firmati da entrambi. Questa circostanza, ritenuta anomala e lesiva nei confronti degli altri concorrenti, portò la maggioranza dei membri dell'Accademia, nonostante l'opposizione, tra gli altri, di Corrado Segre e di Vito Volterra, a votare per la non ammissibilità della richiesta di partecipazione congiunta da parte di Enriques e Castelnuovo.

A seguito di questo fatto, scrive Bottazzini: "There was a widely shared feeling that a factual injustice had been made against Enriques and Castelnuovo for purely formal reasons. And, perhaps for this very reason, it was also generally felt that in the end nobody else should be awarded the Prize. One has to bear in mind that all this was the background of Bianchi's conclusive report about the Prize."[38]

A prescindere da questa vicenda, il giudizio di Luigi Bianchi sull'opera di Ricci veniva motivato dal fatto che la maggior parte delle applicazioni del calcolo differenziale assoluto proposte non sembrava di utilità decisiva.[39] In effetti Ricci applicava i suoi algoritmi principalmente alla geometria differenziale, riscrivendo in forma invariantiva risultati per lo più già noti. Eppure, come visto, il felice connubio fra il talento del giovane Levi-Civita e i metodi di Ricci aveva prodotto, prima del 1904, anno della fatidica relazione di Bianchi, frutti piuttosto succulenti. Il più brillante fra quei "pochi seguaci" di Ricci chiamati in causa da Bianchi aveva mostrato come, nell'affrontare - e risolvere - determinati problemi di carattere fisico-matematico, il calcolo tensoriale potesse diventare indispensabile, e in "maniera essenziale", quanto meno alla luce del fatto che i metodi allora noti portavano a difficoltà inestricabili.

Certamente, in quel momento, le applicazioni di tale calcolo fin lì svolte erano indubbiamente ancora lontane dal costituire un ampio corpus organico di ricerche originali. Sarebbe troppo facile, quindi, biasimare Bianchi e la comunità scientifica di tutta un'epoca con il senno di poi. Tuttavia, alla luce di applicazioni come quelle di Levi-Civita mostrate in questa relazione, non sembra irragionevole né antistorico pensare che quel riferirsi di Bianchi ai metodi di Ricci come "utili, sebbene non indispensabili" non fosse del tutto incontestabile, anche nel 1904.

Ammesso che in quelle parole non vi fosse nulla di pretestuoso.

---

[37] Si veda Bottazzini & Conte & Gario (1998).

[38] Bottazzini (1999), 248-249.

[39] In un passo della sua relazione Bianchi scrive peraltro che: "È giusto però riconoscere che molto maggiori sono i vantaggi dei procedimenti del calcolo assoluto nel campo della geometria differenziale a più dimensioni (…). Qui dove più difficile riesce l'ordinaria intuizione, utili servigi prestano i nuovi algoritmi, perfezionati dal punto di vista invariantivo, ed i calcoli ne risultano così spesso non soltanto semplificati e condensati, ma anche più sicuramente diretti." (Bianchi (1904), 148-149). Non sembra tuttavia inopportuno aggiungere che, quando ne ebbe la possibilità - e quella convenienza da lui stesso sottolineata -, in tutti i suoi lavori sulle varietà riemanniane pluridimensionali e nelle varie edizioni del suo celebre trattato di geometria differenziale Bianchi non si servì mai in alcun modo degli "utili servigi" del calcolo di Ricci.

Bibliografia

Amaldi, U. (1946): "Commemorazione del Socio Tullio Levi-Civita". *Atti dell'Accademia dei Lincei*, (8), 1, 1130-1146. In Levi-Civita, *Opere*, I, 9-30.

Appell, P. (1892): "Sur les transformations des mouvements". *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 110, 37-41.

Beltrami, E. (1881): "Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche". *Memorie della Accademia di Bologna*, (4), 2.

Bianchi, L. (1904): "Relazione sul concorso al Premio Reale, del 1901, per la Matematica". *Atti della R. Accademia del Lincei. Rendiconto dell'adunanza solenne del 5 Giugno 1904*, 142-151.

Bottazzini, U. & Conte, A. & Gario, P. (1998): "La relazione di Castelnuovo ed Enriques. Documenti inediti per il Premio Reale di matematica del 1901". *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, (2), 55, 75-156.

Bottazzini, U. (1999): *Ricci and Levi-Civita: from differential invariants to general relativity*. In Gray, J.: *The Symbolic Universe*. Oxford University Press, Oxford, 241-259.

Dell'Aglio, L. (1993): "Tradizioni di ricerca nella meccanica celeste classica: il problema dei tre corpi in Levi-Civita e Sundman". *Physis*, (30),1, 105-142.

Galletto, D. (1973): "Tullio Levi-Civita". *Bollettino della U.M.I.*, (4), 8, 372-390.

Galletto, D. (1980): *I rapporti di Einstein con la Scuola matematica italiana: Ricci Curbastro, Bianchi, Levi-Civita*. In Libertini, F. R. & Conte, A. & Rasetti, M.: *Sette lezioni su Einstein*... Stampatori didattica, Torino, 153-190.

Hermann, R. (1975): *Ricci and Levi-Civita's tensor analysis paper*. Math. Sci. Press, Brookline.

Hodge, W. (1942): "Tullio Levi-Civita". *Obituary Notices of Fellows of the Royal Society*, 4, 106-114.

Levi-Civita, T. *Opere*, 5 vols. 1954-1970. Zanichelli, Bologna.

Levi-Civita, T. (1896): "Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche". *Annali di Matematica pura ed applicata* (2), 24, 255-300. In *Opere*, I, 207-252.

Levi-Civita, T. (1899): "Tipi di potenziali che si possono far dipendere da due sole coordinate". *Memorie dell'Accademia di Torino* (2), 49, 105-152. In *Opere*, I, 381-438.

Liouville, R. (1895): "Sur les équations de la dynamique". *Acta Mathematica*, 19.

Neumann, C. (1877): *Untersuchungen über das logaritmische und Newton'sche Potential*. Leipzig.

Painlevé. P. (1894): "Mémoire sur la transformation des équations de la Dynamique". *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, (4), 10, 5-92.

Ricci Curbastro, G. *Opere*, 2 vols. 1956-1957. Edizioni Cremonese, Roma.

Ricci Curbastro, G & Levi-Civita, T (1900): "Méthodes de Calcul différentiel absolu et leurs applications". *Mathematische Annalen*, 54, 125-201. In Ricci Curbastro, *Opere*, II, 185-271.

Riemann, B. (1861): *Commentatio mathematica*. In *Gesammelte mathematische Werke*, 2ª ed., 1892. Leipzig.

Speziali, P. (1981): "Ricci Curbastro, Gregorio". In *Dictionary of scientific biography*, vol. 11, 406-411. Charles Scribner's Sons, New York.

Tazzioli, R. (2000): *Beltrami e i matematici "relativisti"*. Pitagora Editrice, Bologna.

Tonolo, A. (1954): "Commemorazione di Gregorio Ricci Curbastro nel primo centenario della nascita". *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 23, 1-24.

Volterra, V. (1883): "Sopra alcuni problemi della teoria del potenziale". *Annali della Scuola N. S. di Pisa*, 3, 207-270.