Storia del rapporto tra logica ed esperimenti in una teoria fisica

Antonio Venezia

Gruppo di Storia della Fisica - Dipartimento di Scienze Fisiche - Università "Federico II"
via Cinzia, Monte S. Angelo, Napoli.

e-mail: antkon.venezia@libero.it

Riassunto

All'inizio della discussione sulla natura della logica alla fine del 1800, la richiesta che la logica "giusta" dovesse dipendere anche da considerazioni sperimentali apparve come una posizione estremista, in contrasto con la tradizione filosofica passata. Fin dai tempi di Aristotele infatti la logica, intesa come il corretto ragionare, si era distinta da ogni altra disciplina per la sua universalità e per la sua assoluta indipendenza da ogni contesto. L'idea che anche la logica fosse empirica però ha incominciato a farsi sempre più strada dopo che Birkhoff e von Neumann [1] nel 1936 scoprirono una logica non classica che in una teoria fisica come la Meccanica Quantistica era in grado di rendere conto degli esperimenti nel campo dell'infinitamente piccolo. Era la prima volta che una teoria empirica metteva in discussione la logica classica, che dagli Elementi di Euclide fino alla Meccanica di Newton era stata la logica del reale.
Da quel momento la questione se la logica fosse empirica oppure no è stata ampiamente dibattuta, non solo dai fisici (Mittelstaedt [12]), ma anche dai filosofi (Putnam [13], Dalla Chiara [4]). In questo articolo voglio riprendere la questione affrontandola da una angolazione diversa. Invece di esaminare direttamente la relazione tra gli esperimenti e la logica, voglio spezzare il problema in due passi: voglio chiarire dapprima il rapporto tra gli esperimenti e i principi di una teoria, e poi il rapporto tra i principi e la logica. In questo modo risponderò indirettamente alla domanda se la logica sia empirica oppure no, proponendo di considerare la logica complementare all'esperimento nella costruzione di una teoria. Lo studio che presenterò sarà originale sia per la soluzione a cui giungerò, la quale media tra le soluzioni estreme finora proposte per questo problema (apriorismo o empirismo della logica), sia per il metodo di indagine che adotterò, il quale sarà essenzialmente di tipo storico; partirò dallo studio delle teorie scientifiche nel corso dei secoli e confronterò le caratteristiche formali di queste teorie con l'evoluzione del concetto di logica. Infine verificherò la correttezza della soluzione proposta su una teoria in particolare: la Meccanica Quantistica. Mostrerò che in realtà non è un esperimento che suggerisce una nuova logica nella teoria, ma il principio di indeterminazione e che la logica di Birkhoff e von Neumann è la logica di una particolare formalizzazione della teoria dovuta a Dirac [5]. Questa versione della teoria è una rielaborazione di due precedenti formulazioni della Meccanica Quantistica - la meccanica della matrici di Heisenberg e la meccanica ondulatoria di Schroedinger – che mostrerò essere distinte dal punto di vista della logica usata per esprimere i rispettivi principi.

1. L'evoluzione storica del concetto di logica rispetto alle teorie scientifiche

Nella prima metà dell'ottocento mentre l'algebra faceva passi da gigante con Evariste Galois (1811-1832), il quale giungeva ad una teoria delle equazioni algebriche, George Boole (1805-1864) con il suo libro *Analisi matematica della logica* (1847) mostrava che era possibile un trattamento puramente calcolistico, cioè algebrico, non solo delle grandezze matematiche, ma anche di enti come proposizioni. In questo modo Boole riesce a tradurre in una teoria di equazioni la logica tradizionale dei termini, in particolar modo la sillogistica, e abbozza anche una teoria algebrica della logica delle proposizioni.

Nello schema tradizionale aristotelico [14], la logica non rappresentava una vera e propria scienza, ma solo la forma che doveva avere qualsiasi tipo di discorso che pretendesse di dimostrare qualcosa. La logica, secondo Aristotele (384-322 circa a. C.), doveva mostrare quale fosse la struttura del ragionamento corretto, ed è per questo motivo che il complesso dei suoi scritti vennero indicati con il termine *organon*, cioè "strumento". Aristotele chiamava la logica con il termine "analitica" e *Analitici* sono intitolati gli scritti fondamentali dell'*Organon*. L'analitica (dal greco *analysis*, che vuol dire "risoluzione") spiega il metodo con cui noi, partendo da una data conclusione, espressa da una proposizione, la scomponiamo nei suoi termini costitutivi e la risolviamo negli elementi da cui deriva, cioè nelle premesse da cui scaturisce e quindi la fondiamo e giustifichiamo. Per secoli l'*Organon* è stato considerato un indiscutibile punto di riferimento; in esso Aristotele ha definito il ragionamento perfetto nella forma del sillogismo, un processo sostanzialmente deduttivo in cui la conclusione cui si perviene è la conseguenza che scaturisce, di "necessità", dall'antecedente. Tra le premesse Aristotele aveva individuato alcune proposizioni la cui verità era autoevidente e che egli aveva chiamato "assiomi". Tra gli assiomi ve ne sono alcuni che sono comuni a tutte le scienze, come il principio di non contraddizione (non si può affermare e negare dello stesso soggetto e nello stesso tempo due predicati contraddittori), e quello del terzo escluso (non è possibile che ci sia un termine medio tra due contraddittori). Se si esclude il progetto della *characteristica universalis* di Leibniz, anticipatore dell'opera di Boole, la logica resta in pratica quella aristotelica fino alla metà dell'ottocento. Nel frattempo l'indiscussa supremazia del concetto aristotelico di logica era stato avvalorato da due grandi teorie scientifiche: la geometria di Euclide e la Meccanica di Newton.

Euclide (330-277 circa a. C.) con i suoi *Elementi* dette una forma sistematica al sapere scientifico dei Greci. Verosimilmente, poco del contenuto degli *Elementi* è originale, ma Euclide ebbe il merito di riunire proposizioni e dimostrazioni prese dalle fonti più disparate e di presentarle in un assetto deduttivo seguendo la lezione aristotelica. Nel primo libro degli *Elementi* Euclide fissa ventitré definizioni, cinque postulati e alcune nozioni comuni o assiomi; successivamente passa, in base a quanto stabilito, alla dimostrazione (deduzione) delle proposizioni (teoremi) della geometria. Le definizioni intendono esplicitare i concetti della geometria. I postulati rappresentano verità indubitabili tipiche del sapere geometrico. Infine gli assiomi sono, per Euclide, verità che valgono non solo in geometria ma universalmente. La geometria euclidea è stata per secoli un modello insuperabile di sapere deduttivo: i termini della teoria vengono introdotti dopo essere stati definiti, le proposizioni sono asserite solo se vengono dimostrate. Al vertice di questo schema deduttivo piramidale Euclide pose i suoi famosi cinque postulati, scegliendoli in modo tale che riguardo alla loro verità non vi fossero dubbi. In sostanza Euclide espresse l'ideale aristotelico di una organizzazione assiomatica di una disciplina, ideale riducibile grosso modo, nella scelta di un piccolo numero di proposizioni "evidenti" e alla successiva deduzione logica da queste di tutte le altre proposizioni vere della teoria.

Allo stesso modo Isaac Newton (1642-1727) ha sistemato ed organizzato in maniera assiomatica e deduttiva la dinamica classica nei suoi *Principia*. Alla maniera di Euclide, tutta la teoria viene fatta discendere da pochi principi generali: le tre leggi del moto. In questo modo tutte le novità prodotte dalla rivoluzione scientifica del 1500-1600 contro la visione aristotelica del cosmo confluirono paradossalmente proprio nello schema logico e fondazionale aristotelico della sintesi newtoniana. Grazie al contributo decisivo del metodo delle flussioni, cioè del calcolo infinitesimale, la dinamica acquisì l'assetto teorico di scienza esatta, così come era stata intesa da Aristotele quasi due millenni prima.

Ma, come L. Carnot [2] per primo e poi Mach [11] in seguito hanno notato, il modello cosmologico sottostante la fisica matematica di Newton si fondava su assiomi e definizioni solo in parte verificabili. La supposta autoevidenza dei tre principi assiomatici sostenuta da Newton era una ingenua pretesa. Non erano verificabili, ad esempio, le asserzioni fondamentali concernenti il principio di inerzia e i suoi parametri: tempo assoluto e spazio assoluto. Lo stesso concetto di forza affondava le radici in concezioni metafisiche e animistiche della natura che andavano al di là della verifica sperimentale. Nonostante però la problematicità dei suoi fondamenti, il modello newtoniano ha dominato per tutto il 1700 non solo in fisica, ma ha costretto anche i filosofi a riformulare nell'ottica del determinismo i vecchi problemi concernenti la natura e la sua conoscenza. Anche in questo caso il

risultato della rivoluzione scientifica, nata per combattere con l'evidenza sperimentale l'autorità aristotelica, si tramuta in un nuovo paradigma culturale altrettanto chiuso e potente.
A. Drago [4] ha fatto notare però che già alla fine del settecento sull'onda di una nuova rivoluzione, quella francese, il modello newtoniano viene attaccato. L. Carnot, che in questa rivoluzione ha avuto un ruolo fondamentale anche dal punto di vista politico, criticò la meccanica di Newton, proponendone una valida alternativa in due opere rispettivamente del 1782 (*Essai sur les machines en général*, [2]) e del 1803 (*Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement*). Il primo libro sottolinea il suo pensiero fondamentale: la meccanica è la scienza delle macchine, dove per macchina Carnot intende tutto ciò che trasmette movimento. Il secondo libro illustra sette ipotesi fondamentali, che costituiscono una precisazione magistrale dei principi di Newton. In questo caso alla pretesa di voler ricavare tutta la teoria da pochi assiomi, si sostituisce un tipo di organizzazione della teoria totalmente diverso: si definisce il problema principale e si indica un metodo per risolverlo anche in altri casi simili. Un principio così come lo intende Carnot non è un principio assiomatico autoevidente alla maniera di Newton, ma è un principio di tipo metodologico, che limita la teoria ad un preciso problema e permette di evitare assunzioni troppo astratte e metafisiche.

Il problema della evidenza dei principi-assiomi si presenterà ancora più drammatico con l'altra grande teoria deduttiva aristotelica, la geometria euclidea. L'apparizione nel 1826 della "geometria immaginaria" di Lobacevskij [10] assestò un colpo decisivo alla fiducia di poter fondare assiomi e postulati sulla sola intuizione. Proprio in risposta alle nuove geometrie, alla fine dell'ottocento Hilbert propone che il problema della verità delle proposizioni geometriche si sdoppi in un problema di verità matematica, che si riduce al loro essere conseguenza logica dagli assiomi, ed in un problema di verità empirica, che confluisce nell'epistemologia delle scienze empiriche, allorché queste trattano il rapporto tra teoria ed esperimenti. Quindi la scoperta delle geometrie non euclidee implicava grosse questioni. Finché gli assiomi venivano visti come principi veri, bastava la corretta deduzione da premesse vere per avere conseguenze vere e quindi non vi era il problema della coerenza del sistema. Ma se gli assiomi sono solo il punto di partenza del sistema formale, allora nasce il problema di quali categorie utilizzare per sceglierli e, una volta scelti, capire se c'è la possibilità di contraddizioni interne al sistema, nonostante una corretta deduzione. Inoltre gli assiomi scelti sono in grado di dimostrare o refutare tutte le proposizioni del calcolo (problema della completezza sintattica)? Chi ci assicura che non esistono proposizioni vere della teoria che non sono dimostrabili dagli assiomi scelti (problema della completezza semantica)? Come provare che gli assiomi sono indipendenti uno dall'altro?

2. Il rapporto tra gli esperimenti e i principi di una teoria

Verso la fine dell'ottocento una prima articolata risposta ai problemi posti alla fine del precedente paragrafo l'ha formulata Poincaré [7], il quale partendo proprio dalla riflessione sulle geometrie non euclidee ha sostenuto l'impossibilità di decidere univocamente i principi di una teoria con il solo esperimento. Alla stessa maniera dell'ottica classica in cui convivono due distinte ipotesi sulla natura della luce (ondulatoria e corpuscolare), in geometria il problema dell'unicità o meno della retta parallela ad una retta data non si può risolvere con un *experimentum crucis* alla maniera di Bacone, cioè con un esperimento che da solo basta a decidere la teoria. La formalizzazione della geometria iperbolica ed ellittica è una prova di questa impossibilità. Il motivo, secondo Poincaré, di questo fatto è che in un esperimento oltre alla legge fisica da verificare sono coinvolte ulteriori assunzioni o ipotesi aggiuntive; se il test sperimentale è negativo, lo scienziato può scegliere tra due possibilità: rifiutare la legge fisica, oppure accettare la legge fisica e rifiutare le ipotesi aggiuntive. Per questo motivo egli parla di *relativismo dell'ontologia* (intesa come "le assunzioni sulla natura dei fenomeni fisici"), e sostiene che una teoria fisica in realtà è una *famiglia di teorie*, tutte equivalenti dal punto di vista sperimentale e per la parte matematica, ma con distinte, e sperimentalmente indistinguibili, ontologie.

A. Drago [6] ha ulteriormente precisato l'idea di famiglia di teorie con il concetto di *Modello di Teoria Scientifica* (MTS), mediante il quale è possibile distinguere le teorie di una stessa famiglia usando due opzioni fondamentali riguardanti la matematica (basata sul solo infinito potenziale - IP - o sull'infinito in atto - IA) e quella sulla logica (classica - OA - oppure intuizionista - OP). Combinando le scelte su queste due opzioni, una stessa teoria può avere quattro formulazioni diverse. Drago chiama appunto *modello* ognuno di questi quattro tipi di formulazioni, che condividono la stessa scelta in matematica e logica. Ad esempio, il modello newtoniano si basa sulla scelta IA e OA; mentre la meccanica di L. Carnot è IP e OP, così come la geometria di Lobacevskij [3]. Ma la meccanica e la geometria non sono l'unico esempio di famiglia di teorie; nel 1783 in una celebre *Memoire* [9] Lavoisier e Laplace discutono delle due ipotesi sulla natura del calore (calore-fluido e calore-forza viva), ammettendo l'impossibilità di decidere con gli esperimenti quale delle due ipotesi sia quella giusta per loro. La teoria del calore è in realtà un insieme di teorie equivalenti sperimentalmente, ma divergenti sulle assunzioni di partenza sulla natura dei fenomeni. La stessa cosa si può dire per un'altra teoria classica come l'ottica; non esiste infatti un esperimento che ci permetta di stabilire se la natura della luce sia solo ondulatoria (come sosteneva Huygens) o solo corpuscolare (come invece ha sostenuto Newton).

Quindi lo studio del rapporto tra esperimenti e principi di una teoria rivela che da solo l'esperimento non è in grado di decidere quale tra i principi antagonisti di una stessa teoria sia quello giusto. In base a che cosa allora uno scienziato fa la sua scelta?

3. Il rapporto tra i principi di una teoria e la logica

Poincaré al termine della sua riflessione non ha individuato categorie alternative all'esperimento per decidere tra i principi antagonisti di una teoria, considerando la scelta finale dello scienziato una semplice *convenzione*. Per questo motivo quella di Poincaré è, a mio giudizio, più la constatazione di una difficoltà operativa che una soluzione al problema. Ad un esame più attento però le geometrie non euclidee suggeriscono un'ulteriore categoria interpretativa con la quale è possibile andare oltre il convenzionalismo di Poincarè. Questa categoria riguarda la formulazione linguistica del principio in discussione e in ultima analisi il tipo di logica con cui esso viene formulato. Infatti dallo studio della geometria iperbolica [10] emerge che Lobacevskij quando incomincia ad uscire fuori dell'ambito della geometria euclidea non ha ancora gli strumenti formali per farlo (il suo scopo è proprio costruirsi questi nuovi strumenti matematici). Allora ricorre al linguaggio per tentare una prima formalizzazione del problema. L'esame linguistico dei principi esposti mostra come egli faccia uso frequente di frasi doppiamente negate che non affermano. Le corrispondenti frasi affermative sono troppo astratte e per questo "incerte". L'assioma sulle parallele di Euclide viene sostituito da una frase doppiamente negata ("<u>Non</u> è assurda l'ipotesi che la parallela <u>non</u> sia unica"), che traduce il problema dell'unicità o meno della retta parallela che sta alla base della nuova geometria. In questo modo è la formulazione linguistica, e quindi la logica, a decidere il principio della teoria al posto dell'esperimento.

La logica dunque affianca l'esperimento per decidere la teoria; essa è indispensabile per esprimere linguisticamente quei principi la cui verità non può essere stabilita dal solo l'esperimento. La logica dell'esperimento è la logica classica; infatti per la teoria un esperimento può essere riuscito oppure no; e quindi è soggetto alla legge del terzo escluso. La logica di un principio può invece essere anche non classica, come in L. Carnot o Lobacevskij, senza la legge del terzo escluso. E' con questa ulteriore opzione sul tipo di logica che si riesce a decidere la teoria; cioè si riesce, usando la terminologia di Poincarè, a distinguere una teoria dall'altra in una famiglia di teorie. Sembra dunque chiaro che la necessità nella formulazione di un principio dell'uso di una logica non classica sia suggerita non tanto dall'esperienza quanto dalla mancanza di esperienza, cioè dall'impossibilità di una verifica sperimentale.

Come esempio della capacità della logica di distinguere le teorie equivalenti sperimentalmente all'interno di una stessa famiglia consideriamo la Meccanica Quantistica. Questa teoria nacque nel 1925; la sua prima formulazione (*meccanica delle matrici*) è dovuta a Heisenberg [8] ed è basata su tecniche algebriche solo discrete. Nel 1926 Schroedinger propose (in una serie di sei articoli [16] scritti in un breve periodo di intenso lavoro creativo) la sua *meccanica ondulatoria*, basata invece sulla tradizionale fisica matematica delle equazioni differenziali nel continuo. Il principio di indeterminazione di Heisenberg fu formulato matematicamente nel 1927.

Poiché Schroedinger [15] ne dimostrò l'equivalenza (quantunque su un numero ristretto di casi) e poi Dirac le raccolse in un unico sistema più comprensivo e generale (spazio di Hilbert), ritengo che le due formulazioni siano un esempio significativo di quello che Poincarè ha chiamato famiglia di teorie; le due formulazioni infatti sono equivalenti sperimentalmente e matematicamente (nei casi in cui questa equivalenza è stata dimostrata), ma, come adesso mostrerò, sono distinguibili dal punto di vista della logica.

La prima formulazione, quella di Heisenberg, pone il problema della misurabilità come problema principale, e cerca il metodo per risolvere questo problema. L'idea di base di Heisenberg fu quella di spiegare gli spettri di emissione degli atomi non in termini di orbite atomiche (così come aveva tentato di fare la vecchia teoria dei quanti), ma mediante lo studio solo dei dati sperimentali: le frequenze e l'intensità della luce emessa e assorbita dalla materia. Per dar conto degli spettri atomici osservati sperimentalmente, Heisenberg si rese conto che la proprietà commutativa della moltiplicazione di due ampiezze di oscillazione non sempre era verificata. Schematicamente il problema può essere così riassunto. Se due variabili possono essere espresse come due serie di Fourier, aventi ampiezze A(n, k) e B(k, m) (dove n, m, k sono numeri interi), allora moltiplicando due di queste ampiezze si ottiene una intensità finale C(n, m), che risulta essere una somma infinita (infinito numerabile) su tutti i valori di k pari a

$$\mathrm{C}(n, m) = \sum_{k} \mathrm{A}(n, k)\, \mathrm{B}(k, m)$$

Per spiegare dunque le frequenze osservate sperimentalmente si deve ammettere che il prodotto A per B non è necessariamente uguale a B per A. In particolare, sviluppando in serie di Fourier il momento p e la posizione q di una particella, si arriva alla nota relazione di commutazione:

$$\sum_{k} [p(n, k)\, q(k, n) - q(n, k)\, p(k, n)] = i\mathrm{h}/2\pi$$

La non validità della proprietà commutativa della moltiplicazione era già nota ai matematici di quel tempo ed era stata già usata nello studio delle matrici: infatti in generale il prodotto righe per colonne di due matrici non è commutativo. Allora fu naturale sfruttare questa proprietà delle matrici per sviluppare la nuova teoria atomica. Concettualmente, la meccanica Quantistica di Heisenberg si sviluppa intorno ad un problema principale, quello delle transizioni atomiche; una volta indicato un metodo per risolvere questo problema nel caso dell'atomo di idrogeno, lo estende ad altri problemi come l'oscillatore armonico e il momento angolare. Il principio metodologico con cui essa risolve il problema degli spettri atomici si può esprimere linguisticamente nel modo seguente:

"Non è vero che x e p siano misurabili sullo stesso sistema con precisione assoluta", (1)

essendo x e p due variabili coniugate (ad esempio posizione e velocità dell'elettrone in un atomo).

Il principio di Heisenberg è un principio metodologico nel senso che esprime una impossibilità e lo fa mediante una negazione; ovvero negando la possibilità operativa di misure con assoluta precisione di variabili coniugate di uno stesso sistema. Una analisi dettagliata del principio però rivela che vi è un'altra negazione nella proposizione (1). Parlare infatti di "precisione assoluta" significa parlare di "precisione non relativa"; qui c'è un'altra negazione, perché ciò che è sperimentalmente verificabile è proprio la precisione relativa, non quella assoluta. Quindi il principio di Heisenberg usa una doppia negazione.

Voglio mostrare [14] che questa frase doppiamente negata non coincide con la corrispondente frase affermativa, e che quindi la logica che essa utilizza è una logica non classica.
Indico con A la proposizione "x e p sono misurabili sullo stesso sistema con precisione relativa". Con questa posizione la (1) diventa:

$$\text{non è vera } \neg A \qquad (2)$$

La frase positiva corrispondente alla (2) è:

$$\text{è vera } A \qquad (3)$$

La (3) asserisce che "è vero che si può misurare con precisione relativa x e p"; il che, senza ulteriori precisazioni, non è né vero, né falso: non è vero perché quando $\Delta x\ \Delta p< \hbar/2$, x e p non si possono misurare, neanche con precisione relativa; non è falso perché se $\Delta x\ \Delta p> \hbar/2$, la misura si può fare.
La stessa cosa si può dire per la negazione di (3); infatti la proposizione

$$\text{non è vera } A \quad (4)$$

significa che non è vero che si possono misurare x e p con precisione relativa; questa proposizione come la (3), senza ulteriori precisazioni, non è né vera né falsa.
Riassumendo: sono indeterminate le proposizioni (3) e (4), mentre è vera la (2). Segue che per esprimere il principio di indeterminazione occorre una logica in cui la doppia negazione (2) non coincide con la corrispondente frase positiva (3): la logica intuizionista, ad esempio, è la logica non classica più importante che soddisfa questo requisito.

Quindi la logica non classica è indispensabile per esprimere attraverso una doppia negazione il principio di indeterminazione; se applicata invece alla parte delle proposizioni B interamente sperimentali (gli esperimenti sì-no) per le quali vale la legge $\neg\neg B\rightarrow B$, la logica intuizionista si riduce alla logica classica (così come la matematica costruttiva si riduce alla matematica classica se applicata agli insiemi finiti)[1].

Nella seconda formulazione, la Meccanica Ondulatoria, viene posta l'equazione di Schroedinger come principio-assioma, a partire dal quale si fa discendere deduttivamente l'intera teoria (salvo poi confrontare i risultati con le misure). In questo modo la teoria viene riorganizzata secondo l'ideale aristotelico alla maniera della meccanica newtoniana: pochi assiomi autoevidenti (l'equazione di Schroedinger nessuno la dimostra!) da cui derivare l'intera teoria. Inoltre l'equazione di Schroedinger è una equazione differenziale come quelle della meccanica classica; con esse si ripropone l'ideale di un realismo deterministico (il concetto di variabili nascoste) secondo cui basta conoscere le condizioni iniziali per poter predire l'evoluzione del sistema, sempre e senza limitazioni operative (tutto il contrario del principio di indeterminazione). E per fare questo al posto delle osservabili fisiche della meccanica di Heisenberg, si introduce una funzione d'onda ψ definita nel campo dei numeri complessi, sulla cui interpretazione operativa si aprirà un lungo dibattito. Nel 1926 Born avanza la sua interpretazione probabilistica della ψ, nota come interpretazione di Copenhagen. Mentre solo nel 1932 nel tentativo di risolvere il problema del divario, noto come *collasso della funzione d'onda*, tra la previsione teorica probabilistica (più stati possibili) e il risultato della misura (che è unico), von Neumann formula un nuovo postulato (*projection postulate*) aggiuntivo all'equazione di Schroedinger. Solo così si riesce a spiegare in che modo le funzioni d'onda (che sono soluzioni di questa equazione e sono sviluppabili in serie) si riducono, per effetto della misura, ad un unico termine della serie.

Quindi l'organizzazione della formulazione di Schroedinger è quella deduttiva aristotelica classica.

---

[1] Questo fatto può anche essere visto come la possibilità di una coesistenza all'interno dell'intera teoria fisica di due distinte logiche (classica e non classica); ma questa interpretazione non è comunque una novità tra gli approcci alla LQ. Una siffatta posizione è già stata sostenuta da Dalla Chiara (che ha parlato di *pluralità delle logiche* in MQ); nel nostro caso la pluralità è ridotta ad un dualismo (logica classica per la parte sperimentale della teoria e logica non classica per i principi).

Le due formulazioni si sono dimostrate equivalenti dal punto di vista sperimentale e matematico (Dirac [5]); scegliere una formulazione piuttosto che un'altra non è però arbitrario (o per dirla con Poincaré una *convenzione*), ma una questione di logica dei principi.

4. Il rapporto tra l'esperimento e la Logica Quantistica di Birkhoff e von Neumann

Nel 1936 Birkhoff e von Neumann [1] hanno proposto per la Meccanica Quantistica un tipo di logica non classica. Questo risultato sembra contraddire quanto finora ho sostenuto per due motivi:

1. Birkhoff e von Neumann pretendono di giustificare la nuova logica con un esperimento: secondo loro, dunque, la logica è empirica ed esistono esperimenti che non seguono la logica classica, contrariamente a quanto ho sostenuto.
2. La logica della Meccanica Quantistica è non classica perché non distributiva; io invece ho distinto tra due possibili formulazioni della teoria, sostenendo che la logica della meccanica di Heisenberg è non classica perché senza la legge del terzo escluso.

Voglio adesso mostrare che la richiesta di Birkhoff e von Neumann di giustificare la loro logica con un esperimento non è fondata e che il disaccordo del punto 2 si spiega alla luce delle diverse formulazioni della Meccanica Quantistica.

Vediamo in dettaglio quale è l'esperimento che Birkhoff e von Neumann hanno proposto col proposito di mostrare che la Logica Quantistica è non classica, essenzialmente perché non vale la legge distributiva della congiunzione *e* ($\cap$) rispetto alla disgiunzione *o* ($\cup$). Scrivono Birkhoff e von Neumann (p. 831, [1]): "se x è una proposizione sperimentale corrispondente all'osservazione del pacchetto d'onda ψ su un lato di un piano π dello spazio fisico, se x' descrive l'osservazione di ψ sull'altro lato di π e se y corrisponde all'osservazione di ψ in uno stato simmetrico rispetto a π", allora si ha:

$$y\cap (x\cup x') \neq (y\cap x) \cup (y\cap x')$$

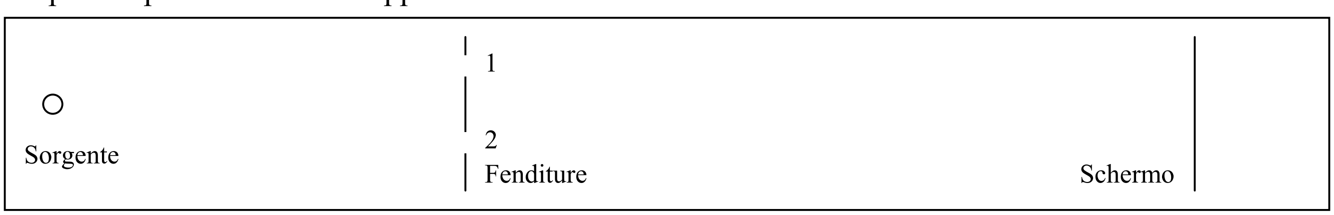
Per capire perché vale la disuguaglianza occorre interpretare x' (la posizione speculare rispetto a π) come il complemento di x; infatti si è posto $(x\cup x')=\mathbf{1}$, cioè vale il terzo escluso, essendo x' logicamente equivalente alla negazione di x. Occorre inoltre interpretare y come una proprietà incommensurabile con quelle espresse da x e x'. Infatti valgono le relazioni $(y\cap x)=\mathbf{O}$ e $(y\cap x')=\mathbf{O}$. Quindi il primo membro dà:

$$y\cap\mathbf{1}=y$$

mentre il secondo membro è:

$$\mathbf{O}\cap\mathbf{O}= \mathbf{O}$$

Per discutere in termini concreti su questo esperimento è preferibile rifarsi ad un caso particolare, ad esempio l'esperimento delle doppia fenditura.



Si possono interpretare le proposizioni y e x di Birkhoff e von Neumann nel seguente modo:
y= la particella arriva sullo schermo producendo una figura di interferenza;
x= la particella passa per la fenditura 1;
x'=la particella passa per la fenditura 2.
Allora la disuguaglianza di Birkhoff e von Neumann ci dice che:

"la particella arriva sullo schermo producendo una figura di interferenza e passa per il foro 1 oppure per il foro 2" e questa proposizione è vera. Mentre non è vera quella ottenuta applicando la proprietà distributiva:

"la particella arriva sullo schermo producendo una figura di interferenza e passa per 1, oppure arriva sullo schermo producendo una figura di interferenza e passa per 2"

Riguardo alla seconda proposizione non siamo in grado di stabilire se la particella passa per 1 oppure 2, perché quando mettiamo un rivelatore ai fori la figura di interferenza scompare.

Quindi quello che Birkhoff e von Neumann hanno attribuito all'esperimento in realtà è una impossibilità sperimentale riconducibile al principio di indeterminazione. Come ho mostrato nel precedente paragrafo questo principio segue la logica intuizionista in cui la doppia negazione non afferma.

Resta da risolvere la questione del perché allora nella logica di Birkhoff e von Neumann vale il terzo escluso, mentre esso non vale per il principio di indeterminazione.

Per rispondere a questa domanda occorre ripensare alla storia delle diverse formulazioni della Meccanica Quantistica. Birkhoff e von Neumann hanno sviluppato la loro logica a partire dalla riformulazione della teoria quantistica effettuata da Dirac [5] nel 1930. L'idea chiave della nuova formalizzazione era quella di rappresentare ogni trasformazione dello stato ψ di un sistema quantistico mediante un operatore definito sullo spazio di Hilbert. Le funzioni dello spazio delle fasi del formalismo classico hamiltoniano venivano viste nella teoria quantistica come il risultato dell'azione di operatori dello spazio di Hilbert agenti sulla funzione d'onda ψ. Ad esempio all'energia E e al momento p venivano fatti corrispondere rispettivamente i due operatori differenziali:

$$E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \qquad\qquad p \to \frac{\hbar}{i}\nabla$$

L'equazione di Schroedinger veniva ricavata per corrispondenza dalle equazioni cardinali classiche con le suddette sostituzioni. Mentre il principio di indeterminazione veniva visto come una conseguenza del carattere non commutativo dell'algebra di questi operatori. Il nuovo formalismo si poneva ad un grado di astrazione superiore rispetto a quello di Schroedinger; infatti si passa dallo spazio delle ψ allo spazio delle funzioni di ψ (cioè gli operatori). E si recupera la meccanica delle matrici considerando l'insieme degli operatori di questo spazio dal punto di vista algebrico; infatti algebricamente un operatore altro non è che una matrice. La logica dello spazio delle ψ è la logica classica della formulazione di Schroedinger; la logica dello spazio delle funzioni di ψ è invece la logica non classica scoperta da Birkhoff e von Neumann: l'algebra non commutativa implica la non distributività. Infatti nell'esempio di Birkhoff e von Neumann la proprietà distributiva fallisce quando si applica a variabili x e x' che non commutano. Quindi la logica di Birkhoff e von Neumann è non classica per una proprietà algebrica dell'insieme degli operatori, la quale descrive nel formalismo di Dirac il principio fisico di indeterminazione. E qui arriviamo al nocciolo della questione. Mentre nella formulazione di Heisenberg la negazione è sempre non classica, perché la teoria è sviluppata intorno al problema principale della misura di variabili coniugate (espresso con una doppia negazione che non afferma nel principio di indeterminazione), nella logica di Birkhoff e von Neumann vale la legge del terzo escluso perché alla negazione viene fatta corrispondere l'ortocomplemento, che è un operazione idempotente (cioè applicata due volte ridà l'oggetto di partenza; così come la doppia negazione afferma in logica classica). L'ortocomplemento è logicamente equivalente al complemento insiemistico della logica classica, perché definisce l'azione di un solo operatore rispetto ad un insieme di funzioni ψ, quindi non coinvolge il rapporto tra più operatori. La logica non classica invece emerge proprio a questo livello, cioè nella struttura algebrica tra operatori; è in questa struttura che il principio di indeterminazione viene tradotto in termini di algebre non commutative. Quindi la logica quantistica di Birkhoff e von Neumann se è applicata ai singoli operatori collassa nella logica classica, in cui vale la legge del terzo escluso. Per la formulazione di Heisenberg invece questo non avviene visto che la misura di singole variabili non è il problema principale della teoria. Lo stesso esempio originario fatto da Birkhoff e von

Neumann nel 1936 può essere visto come una verifica di questo fatto. L'esempio, che ho già citato nelle pagine precedenti, era il seguente:

$$y\cap (x\cup x') \neq (y\cap x) \cup (y\cap x')$$

L'uguaglianza non vale essenzialmente perché il primo membro utilizza la logica classica dei singoli operatori, mentre il secondo membro usa la logica non classica dell'algebra degli operatori. Infatti al primo membro vale la legge del terzo escluso ($x\cup x'=\mathbf{1}$), e non c'è interazione tra singoli operatori; y viene intersecato con l'intero spazio. Nel secondo membro si ammette invece che l'intersezione di y è nulla sia con x che con il suo complemento x'; in logica classica ciò non può avvenire perché altrimenti y starebbe fuori dall'insieme universo, mentre nella logica della meccanica quantistica questo può avvenire per variabili coniugate. Birkhoff e von Neumann avevano due possibilità:

1. rifiutare il terzo escluso anche al primo membro (assumendo che $x\cup x'=\mathbf{0}$) e salvare la proprietà distributiva; questa scelta però li avrebbe portati verso una logica di tipo intuizionista, contro cui gli autori si schierano apertamente alla fine del loro articolo per ragioni "tecniche e quasi fisiche" non meglio precisate (p. 837, [1]).
2. Accettare il terzo escluso e falsificare la legge distributiva.

Birkhoff e von Neumann hanno optato per il punto 2. La povertà di argomentazioni da essi addotte per questa scelta (al di fuori di evidenti pregiudizi di natura ideologica) dimostra come la logica quantistica sia stata per anni un mero calcolo matematico svincolato da ogni riflessione sui fondamenti della meccanica quantistica. Lo studio degli esperimenti quantistici e dalle diverse formulazioni della teoria indica invece che anche la strada 1 era validamente percorribile.

Conclusioni

Prendendo in considerazione l'evoluzione storica di due teorie classiche (geometria euclidea e meccanica newtoniana) e della Meccanica Quantistica ho mostrato che la logica ha una funzione complementare all'esperimento ai fini della costruzione di una teoria scientifica. Nella formulazione dei principi di una teoria la necessità dell'uso di una logica non classica è suggerita non tanto dall'esperienza, quanto dalla mancanza di esperienza, cioè dall'impossibilità di una verifica sperimentale. La geometria euclidea, per secoli modello della logica aristotelica, entra in crisi quando Lobacevskij avanza l'ipotesi che la retta parallela ad una retta data non è unica. A guidare Lobacevskij nei primi passi della sua costruzione è solo la logica (frasi doppiamente negate) e non l'esperimento. Quando Birkhoff e von Neumann scoprono la Logica Quantistica riescono a giustificarla solo apparentemente con un esperimento. E' infatti grazie al principio di indeterminazione che fallisce la proprietà distributiva e questo principio si esprime bene con una frase doppiamente negata che non afferma. Ho ripreso la tesi di Poincaré, secondo cui il solo esperimento non basta a formulare i principi di una teoria. Ho evitato il suo convenzionalismo utilizzando proprio la logica come ulteriore categoria per la scelta dei principi di una teoria. Ho mostrato in un caso concreto come la Meccanica Quantistica che le due formulazioni della teoria - meccanica della matrici di Heisenberg e meccanica ondulatoria di Schroedinger – differiscono dal punto di vista logico per la diversa formulazione dei rispettivi principi e che la logica di Birkhoff e von Neumann è la logica della sintesi di queste due formulazioni effettuata da Dirac.

Bibliografia

1. Birkhoff G., von Neumann J. "The logic of Quantum Mechanics", **Annals of Mathematics**, **37** (1936), pp. 823-843.
2. Carnot L. *Essai sur les machines en général*, Defay, Dijon, 1783 (traduzione italiana di A. Drago e S. D. Manno, CUEN, 1994).
3. Cicenia S., A. Drago *Teoria delle parallele secondo Lobacevskij*, Danilo, Napoli, 1996.

4. Dalla Chiara M. L., Toraldo di Francia G. “A logical Analysis of Physical Theories”, **Rivista del Nuovo Cimento**, 3 (1973), pp. 1-20.
5. Dirac P. A. M. *The Principles of Quantum Mechanics*, Clarendon Press, Oxford (1930).
6. Drago A. *Le due opzioni*, La Meridiana, Molfetta (1991).
7. Giedymin J. “Geometrical and physical conventionalism of H. Poincarè in epistemological formulation”, **Studies in History and Philosophy of Science**, vol. 22 (1991), pp. 1-22.
8. Heisenberg W. “Uber quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen” **Z. Physik 30** (1925), pp. 879-893.
9. Lavoisier A. L., Laplace P-S. “Memoire sur la Chaleur” in **Histoire et Mémoires Acad. R. Sc.** (1784), pp. 355-408. Riedizione in *Les Maitres de la pensée scientifique*, Gauthier-Villars Editeur, Paris (1920), pp. 7-78.
10. Lobacevskij N. I. *Geometrische untersuchungen zur theorie der parallellinien*, Fincke, Berlino (1840); traduzione italiana e commento in [3].
11. Mach E. *La meccanica nel suo sviluppo storico critico*, Universale Bollate Boringhieri, Torino, 1992.
12. Mittelstaedt P. “Empiricism and apriorism in the foundations of Quantum Logic”, **Synthese**, 67 (1986), pp. 497-525.
13. Putnam H. “Is Logic empirical?”, in R. S. Cohen and M. W. Wartofsky (eds.), *Boston Studies in the Phylosophy of Science*, vol. V, Reidel, Dordrecht, 1969, pp. 216-241.
14. Reale G., Antiseri D. *La filosofia nel suo sviluppo storico*, vol. 1, Editrice La Scuola, Brescia 1988.
15. Schroedinger E. **Ann. Physik (4)** 79, 1926, p. 734.
16. Schroedinger E. *Abhandlundgen zur Wellenmechanik*, Leipzig, 1926.
17. Venezia A. *La logica della meccanica quantistica: analisi storico-critica*, Tesi di Laurea, Università “Federico II”, A. A. 2000, Napoli; “I diversi approcci alla Logica Quantistica: due classificazioni e loro interpretazione”, in E. Schettino (ed.): **Atti del XX Conv. Naz. Storia Fis. Astron**., in stampa.