

UNA VIVACE POLEMICA SULLA RELATIVITÀ RISTRETTA FRA DUE MATEMATICI ITALIANI DELL'INIZIO DEL NOVECENTO

di **Giovanni Acocella** (*Gruppo di Storia della Fisica dell'Università di Napoli*)

Riassunto

Dopo la pubblicazione dei Rendiconti del 1912 della Reale Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli i professori Alfonso Del Re e Roberto Marcolongo, entrambi soci della medesima e docenti nell'Ateneo napoletano, furono protagonisti di un vivace dibattito sulla Relatività Ristretta.

A scatenarlo contribuirono alcune dichiarazioni del segretario della Società, il prof. Gabriele Torelli, su alcuni lavori pubblicati dal prof. Marcolongo e collegati ad una memoria che quest'ultimo aveva scritto nel 1906 per i Rendiconti dell'Accademia di Lincei. Questa, secondo il segretario dell'Accademia napoletana, conteneva un teorema originale e, in certo senso, anticipatore delle conclusioni di Minkowski.

Il prof. Del Re contestò l'originalità, di alcune parti del lavoro di Marcolongo, richiamando la celebre Memoria di Poincaré, comparsa qualche mese prima, (*Circ. mat. Palermo 1905*) e ponendo in evidenza la non correttezza e l'imprecisione di alcuni passaggi, sia fisici che matematici.

La profondità e il rigore dell'analisi di Del Re e la attenta produzione dei due matematici confermano quanto viva ed attuale fosse, tra gli studiosi italiani, nel nostro caso dell'Università di Napoli, la problematica della Relatività Ristretta, ed evidenziano, altresì, lo stadio avanzato della ricerca in campo matematico e l'apertura non comune alle questioni fondamentali della Fisica.

1. Premessa

In una Nota di Alfonso Del Re¹ pubblicata nel 1913 si contesta la validità di talune affermazioni di Roberto Marcolongo², riportate in alcuni lavori di questi.

Un articolo di quest'ultimo sugli *integrali delle equazioni dell'elettrodinamica* era apparso sui *Rendiconti* dell'Accademia dei Lincei del 1906³ (dopo che il Circolo Matematico di Palermo aveva già pubblicato l'importante Memoria di H. Poincaré sulla “*Dinamica dell'elettrone*”⁴).

1 E' il lavoro *Sulle trasformazioni di Voigt – Lorentz in elettrodinamica, Nota di critica scientifica* del prof. Alfonso Del Re pubblicato in Napoli il 14 giugno 1913 (d'ora in poi ADR 13). Notizie su Del Re si possono ricavare in Tricomi, *Matematici italiani del primo secolo dello Stato unitario*, Accademia delle Scienze, Torino, 1962, pag.44. Altri riferimenti in: *Dizionario biografico degli Autori*, vol.30, Roma, 1990, Istituto Enciclopedia Italiana alle pagg. 259-260 a cura di F.S. Rossi e, ancora, in Poggendorf: *Handwortenbuch Zur Geschichte der exakten Vissenschaften*, pagg.313-314-D. Montesano, *Alfonso Del Re* su Rend. R. Accad. Sc. Fis. e Mat. Napoli a. LXI sett.dic.1922

2 Per notizie sull'autore: Tricomi F. *op. cit.* (pag. 70) e ancora Poggendorf: *op. cit.* (pagg. 957-958)

3 Marcolongo R. *Sugli integrali delle equazioni dell'elettro dinamica* Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, Roma s.V –v. XV, I° sem. 1906 (344-349), d'ora in poi MAR 1.

4 Poincaré H. –*La dynamique de l'électron*, Palermo, presentata nell'adunanza del Circolo matematico di Palermo del 23 luglio del 1905 e pubblicata il 14 dicembre dello stesso anno nel Tomo XXI (1906) del *Rendiconto* alle pagg.129-175 (d'ora in poi POIN 1). Esiste anche un testo commentato del medesimo negli *Scritti di fisica-matematica* di Poincaré, UTET, Torino 1993 (543-617).

Alcune tesi del lavoro di Marcolongo del 1906 furono riaffermate in un successivo articolo del 1912¹ e in una serie di pubblicazioni sui *Rendiconti* dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli.

Nell'intervallo fra il primitivo lavoro di Marcolongo e il successivo gruppo di pubblicazioni, Minkowski aveva definito nel 1908² la sua *Teoria* dello Spazio-Tempo.

1.1 L'oggetto della disputa

Lo spunto per la vivace discussione venne dall'affermazione del prof. Gabriele Torelli, segretario dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, il quale, nell'illustrare i lavori dell'anno precedente, scriveva testualmente: "*Quattro note ci ha offerto per Rendiconto il socio corrispondente Roberto Marcolongo. Il gruppo delle prime tre prende le mosse da un teorema che egli diede nel 1906 e nel quale stabilì che tutte le trasformazioni ortogonali a quattro variabili non alterano il sistema di equazioni dell'elettrodinamica dei corpi a riposo. Questo medesimo teorema, ritrovato due anni dopo dal Minkowskj è stato il punto di partenza delle dotte ricerche del compianto professore di Gottinga sulle trasformazioni di Lorentz e sull'elettrodinamica dei corpi in movimento*".³

Tale dichiarazione provocò la reazione dell'altro socio dell'Accademia, il professore Alfonso Del Re⁴, della stessa Università di Napoli, il quale, ritenne eccessivi i giudizi formulati e manifestò l'idea *che convenisse introdurre qualche temperamento, magari con l'intervento dell'Autore dell'enunciato, tanto più che alla responsabilità dell'Autore sul contenuto, gli pareva che si venisse ad aggregare quella dell'Accademia.*

Il punto contestato da Del Re fu chiarito in una seduta successiva, in presenza dello stesso Marcolongo. Il primo esprimeva dubbi sulla certezza, espressa dal collega, di essere riuscito a trovare un gruppo di trasformazioni più generale di quelle di Lorentz, rispetto al quale le equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo risultavano invarianti.

E' superfluo sottolineare che le condizioni per l'invarianza delle equazioni di Maxwell costituivano un tema tra i più importanti sulla strada della fondazione della Relatività.

1 Di Roberto Marcolongo saranno prese in considerazione anche le note sul *Rendiconto* dell'Accademia di Napoli del 1912 con lo stesso titolo, *Sulle equazioni dell'elettrodinamica* (la n.1 nell'adunanza del 6/4/1912, la n.2 del 13/4, la n.3 del 2/11 dello stesso anno) (d'ora in poi MAR 2, MAR 3, MAR 4).

2 Minkowski: *Spazio e Tempo*, pubblicato, dopo la sua scomparsa, sul *Nuovo Cimento*, 1909, Serie V vol.XVIII (pagg. 333-352) con una prefazione di G. Gianfranceschi. E' il testo del suo discorso al Congresso di Colonia del 1908.

3 La frase è riportata nel *Rendiconto* dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, gennaio-febbraio 1913.

4 Nella Nota ADR 13 citata in precedenza.

Proprio il gruppo di trasformazioni di Lorentz, al quale ci richiameremo più volte nel presente articolo, è fondamentale per l'impostazione della Relatività Ristretta. Rispetto a questo risultano invarianti le equazioni del campo elettromagnetico, di cui sopra, che qui trascriveremo:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= a \frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi\rho V \\ -\operatorname{rot} E &= a \frac{\partial H}{\partial t} \\ \operatorname{div} E &= 4\pi\rho \\ \operatorname{div} H &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(V\rho) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

dove $a = 1/c$ e c è la velocità della luce ossia $\sqrt{\epsilon\mu}$.

Nella *Nota di critica scientifica* di Del Re viene discusso quanto affermato da Marcolongo nel lavoro del 1906¹, ossia l'aver identificato delle trasformazioni più generali di quelle di Lorentz, rispetto alle quali sono invarianti le equazioni di Maxwell. Esse, secondo Marcolongo, sono quelle ortogonali a quattro variabili.

“Per quanto è noto sulle trasformazioni ortogonali, risulterà trasformata in se stessa l'equazione di continuità, cioè la quinta del sistema (1)”, afferma testualmente Marcolongo nella pagina citata e lo ripete nel confronto diretto con Del Re nella sede dell'Accademia. In un certo senso la scoperta superava i confini della Relatività Ristretta, essendo questa fondata sull'invarianza delle equazioni di Maxwell rispetto alle trasformazioni di Lorentz, mentre il gruppo introdotto da Marcolongo è più ampio.

Queste affermazioni sono ribadite ancora, con assoluta evidenza, nella prima nota di Marcolongo del 1912², che recita testualmente: *“Tutte le trasformazioni ortogonali a quattro variabili trasformano in se stesse le equazioni dell'elettrodinamica di Lorentz; il potenziale scalare e le componenti del vettore potenziale nel sistema trasformato sono funzioni lineari ed omogenee delle stesse grandezze relative al sistema primitivo; le componenti delle forze elettriche e magnetiche del nuovo sistema sono del pari funzioni lineari ed omogenee delle primitive”*.

Ciò, naturalmente, fu confermato dall'Autore nell'adunanza del 12 aprile 1913³.

La dimostrazione di questo teorema, afferma Marcolongo nell'adunanza citata, *“è assai semplice e risulta subito dalle proprietà degli integrali delle equazioni stesse”*. Marcolongo aggiunge ancora che *Minkowskj, in una memoria della fine del 1907 notò la medesima proprietà*⁴.

1 MAR 1 (pag.348)

2 pag. 118 di MAR 2

3 Così sono riportate le parole di Marcolongo: *“Lorentz considera le seguenti trasformazioni, $x' = kl(x + \epsilon t)$; $t' = kl(t + \epsilon x)$; $y' = ly$; $z' = lz$; io ho identificato le seguenti trasformazioni ortogonali più generali $x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 u$ $y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 u$ $z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3 u$ $u' = \alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 z + \delta_4 u$ che garantiscono l'invarianza del campo elettromagnetico”*.

4 Minkowski: *Die grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern* (Nachrichten von der Gesellschaften zu Göttingen, Jahrgang, 1908), pp. 53-111

“Quindi, egli conclude, si otterrà:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial \rho' \xi'}{\partial x'} + \frac{\partial \rho' \eta'}{\partial y'} + \frac{\partial \rho' \zeta'}{\partial z'} = 0. \quad “$$

se “*riguardiamo ρ' come nuova carica elettrica (Del Re giustamente corregge: densità di carica)*

nel sistema trasformato e le ξ' , η' , ζ' come nuove componenti del vettore V' (la velocità nel sistema trasformato) e se consideriamo ancora il potenziale scalare ϕ' ritardato e il vettore potenziale J' e definiamo un nuovo campo elettromagnetico

$$E' = - \frac{\partial J'}{\partial t} - \text{grad } \phi$$

$$H' = \text{rot } J'$$

si ottiene, allora, un sistema di equazioni differenziali identiche alle (1)

In presenza della riaffermazione dello stesso punto di vista, le riserve di Del Re, già avanzate nel corso delle precedenti adunanze dell'Accademia, non solo non furono superate, anzi crebbero, dopo il confronto diretto con Marcolongo, e motivarono la richiesta di pubblicare, a cura dell'Accademia, una nota di chiarimento dello stesso Del Re.

La proposta, messa in votazione, non riportò la maggioranza, perché, pur nella parità dei voti espressi, a favore e contro, tra i contrari v'era quello del Presidente dell'Accademia il prof. Pasquale Del Pezzo.

1. 2 La nota di chiarimento di Alfonso Del Re

1. 2. 1 – La premessa e le motivazioni

Dopo queste anticipazioni entreremo nei dettagli della *Nota di critica scientifica* di Alfonso Del Re.

Nelle prime pagine del lavoro ¹ vengono descritte le circostanze, in parte già riportate, che spinsero l'Autore alla sua pubblicazione, partendo dai rilievi, già mossi in seno all'Accademia, all'affermazione di Marcolongo (così come viene riportata da Del Re stesso), che “*tutte le trasformazioni ortogonali a quattro variabili non alterano il sistema delle equazioni dell'elettrodinamica dei corpi a riposo*”.

Nell'esposizione del proprio punto di vista, Del Re si riferisce ad alcuni passaggi della Memoria di Poincaré, già citata in questo intervento, non trascurando di far notare che tale accostamento (fatto nella seduta del 12 aprile 1913), era stato addirittura interpretato da Marcolongo come accusa di plagio. Pur in presenza del chiarimento che ciò era dettato soltanto dalla preoccupazione di evidenziare le debolezze di un punto di vista.

1 Pagg. 1 – 4 di ADR 13

La citazione della memoria di Poincaré voleva rappresentare, secondo Del Re, soltanto un “*motivo di paragone e di chiarimento*”.

La *difesa dalle accuse* fornita da Marcolongo nella successiva adunanza ¹ non solo non fu ritenuta accettabile da Del Re, ma, addirittura, moltiplicando le sue perplessità, accelerò la pubblicazione della *Nota di critica scientifica*.

1. 2. 2 – *Gli elementi sostanziali*

La *Nota* vera e propria consta di tre parti.

Nella prima viene data una lettura corretta di alcuni passaggi del lavoro di Poincaré ², nelle altre due vengono vagliate criticamente le pubblicazioni di Marcolongo del 1906 e del 1912 ³

Il motivo sostanziale di questa sta nel far notare che le cinque equazioni dell'elettromagnetismo non sono invarianti rispetto alle pure e semplici trasformazioni, dette di Lorentz, se queste non sono precedute e seguite da opportune rotazioni. Soltanto con questa aggiunta le trasformazioni diventano *ortogonali* ⁴. Del Re precisa ancora che da queste trasformazioni vanno ancora *estrapolate quelle che danno campi trasformati reali*, concordando con Poincaré sul fatto che “*ai fini del principio di relatività non tutte le trasformazioni ortogonali a quattro variabili sono adatte ad essere impegnate per la trasformazione di un campo elettromagnetico; ma soltanto quelle immaginarie che forniscono campi trasformati reali*” ⁵.

Del Re sottolinea che Poincaré ⁶ **individua** “*un gruppo continuo, che chiamerà di Lorentz... Una trasformazione qualunque di questo gruppo potrà sempre scomporsi in una trasformazione della forma*

$$x' = lx; y' = ly; z' = lz; t' = lt.$$

e in una trasformazione lineare che non altera la forma quadratica

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$

Ponendo in questa $t' = iu$, la seconda espressione si muta nella: $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$.

Quindi non tutte le trasformazioni ortogonali a quattro variabili ma soltanto quelle “*precedute e seguite*” (sic!) dalla trasformazione lineare immaginaria

$$x' = x; y' = y; z' = z; t' = it;$$

1 Quella del 3 maggio 1913 La proposta di far pubblicare dall'Accademia le osservazioni di Del Re, presentata il 7 maggio e letta nella seduta del 14 maggio non fu approvata, per la contrarietà del Presidente, pur nella parità dei voti ottenuti.

2 MAR 1, MAR 2, MAR 3 e MAR 4

3 POIN 1.

4 Perché una trasformazione possa essere definita ortogonale non basta che il determinante sia uguale ad 1, ma è necessario che sia 1 la somma dei quadrati dei termini di una riga (o colonna) e sia 0 la somma dei prodotti possibili di due elementi appartenenti a righe o colonne diverse. Oltre le Note di ADR 13, vedi anche: Smirnov, *Corso di Matematiche Superiori, vol. III, p. I*, Editori Riuniti, Roma, 1980 pag. 85, oppure Persico, *Introduzione alla Fisica Matematica*, Zanichelli, Bologna, 1952, pag. 5

5 ADR 13. Ogni trasformazione reale o immaginaria modifica i valori delle componenti. Dal punto di vista fisico non interessa considerare valori ottenuti che siano immaginari.

6 Alla pag. 146 di POIN 1

forniscono campi trasformati a variabili reali, come è richiesto dalla realtà fisica ¹. Poincaré aggiunge esplicitamente che il gruppo, che egli chiama di Lorentz può essere generato in altro modo, facendo *precedere e seguire* (sic!) da una rotazione appropriata *una trasformazione della forma*

$$x' = kl(x + \varepsilon t), \quad y' = ly, \quad z' = lz, \quad t' = kl(t + \varepsilon x).$$

Con una considerazione ulteriore Poincaré estrapola dal complesso delle trasformazioni del gruppo quelle strettamente necessarie. Mostra che, facendo ruotare il sistema attorno all'asse delle y di 180° e imponendo la condizione dell'appartenenza allo stesso gruppo, il valore di l, che dipende da ε, *in realtà è una costante ed è uguale a 1*.

Questo risultato accoppiato alla definizione di ρ' nel sistema trasformato consente di ottenere l'invarianza dell'equazione di continuità, che è fondamentale ai fini della conservazione della carica.

1 E' estremamente interessante vedere come, a pag. 133 del lavoro citato, Poincaré tratta il problema della densità di carica in un sistema trasformato, soprattutto ai fini dell'invarianza dell'equazione di continuità, differenziandosi da Lorentz stesso. Materialmente Poincaré libera, nel calcolo, le formule di Lorentz da 4π e pone uguale ad l la velocità della luce.

Sottolinea che □' rispetto alle variabili trasformate è uguale a □ l⁻² (il che equivale a rendere □' = □ nel caso in cui l = 1) e aggiunge che le trasformazioni di Lorentz

$$\begin{aligned} x' &= kl(x + \varepsilon t) \\ t' &= kl(t + \varepsilon x) \\ y' &= ly \\ z' &= lz \end{aligned} \quad \text{con } k = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

trasformano la sfera (ad esempio dell'elettrone) di volume $\frac{4}{3} \pi r^3$ in un ellissoide di

$$\text{volume } \frac{4}{3} \frac{\pi r^3 l^3}{k(1 + \varepsilon \xi)} \quad (\text{Ricordando che il simbolo } \square \text{ sta ad indicare l'operatore } \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2})$$

Per mantenere inalterata la carica dell'elettrone, secondo Poincaré, dovrà cambiare la densità elettrica dal valore ρ a $\rho' = \frac{h}{l^3} (\rho + \varepsilon \rho \xi)$

Ma dovremo considerare anche le nuove componenti della velocità v' lungo gli assi

$$\begin{aligned} \xi' &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{d(x + \varepsilon t)}{d(x + \varepsilon x)} = \frac{\xi + \varepsilon}{1 + \varepsilon \xi} \\ \eta' &= \frac{\eta}{k(1 + \varepsilon \xi)} \\ \zeta' &= \frac{\zeta}{k(1 + \varepsilon \xi)} \end{aligned}$$

per cui

$$\rho' \xi' = \frac{k}{l^3} (\rho \xi + \varepsilon \rho)$$

$$\rho' \eta' = \frac{1}{l^3} \rho \eta$$

$$\rho' \zeta' = \frac{1}{l^3} \rho \zeta.$$

Mentre Lorentz partendo da

$$\rho' = \frac{1}{kl^3} \rho; \quad \xi' = k(\xi + \varepsilon); \quad \eta' = k\eta; \quad \zeta' = k\zeta$$

aveva trovato le stesse formule ma con un valore diverso di ρ'. I valori apparentemente non differiscono molto da quelli di Lorentz ma quello di ρ' è diverso. La differenza più importante, come abbiamo visto, è che il procedimento di Poincaré, al contrario di quello di Lorentz, garantisce l'invarianza dell'equazione di continuità. La differenza si estende ai nuovi potenziali vettori e scalari. Il laplaciano ordinario è $\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

E' alla pag. 133 di POIN 1

L'ipotesi della trasformazione di una sfera elettronica in movimento è di Bucherer, che anticipò Langevin. Bucherer, *Mathematische Einfuhrung in die Elektronentheorie*, Teubner, Leipzig, agosto 1904

1. 2. 3 La disinvolta liberazione dal "tempo locale"

Dopo aver chiarito questi punti chiave sulle trasformazioni trattate da Poincaré, Del Re osserva, in primo luogo, che il **gruppo che Marcolongo definisce di Lorentz, in realtà è il gruppo di Poincaré**¹, perché soltanto quest'ultimo rende invariante, assieme alle altre, l'equazione di continuità. Questo è essenziale per la realtà dei fenomeni fisici. Più avanti vedremo come Del Re mostra che questa condizione non è verificata secondo le affermazioni di Marcolongo.

Ma un rilievo ancora più consistente dal punto di vista fisico investe il "modo illusorio" (secondo Del Re) di presentare ρ' , $\rho'\xi'$, $\rho'\eta'$, $\rho'\zeta'$ in una forma trasformata delle ρ , $\rho\xi$, $\rho\eta$, $\rho\zeta$ con le medesime sostituzioni lineari con cui si trasformano le variabili originariamente, ravvisando evidenti artifici e forzature nei passaggi ("acconciandoseli") come la disinvolta "liberazione dal tempo locale". Tali trasformazioni sono soltanto apparenti! Non tengono conto che la relazione tra i tempi non è generica ma riferita a realtà temporali strettamente associate ad elementi spaziali.

Marcolongo riporta esplicitamente a pag. 348 di MAR 1

$$\begin{aligned} \rho'\xi' &= \rho(\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta - i\delta_1) \\ \rho'\eta' &= \rho(\alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta - i\delta_2) \\ \rho'\zeta' &= \rho(\alpha_3\xi + \beta_3\eta + \gamma_3\zeta - i\delta_3) \\ \rho' &= \rho(\alpha_4\xi + \beta_4\eta + \gamma_4\zeta - i\delta_4) \end{aligned} \quad (3)$$

sottintendendo l'ipotesi di due sistemi con valori differenti delle velocità \mathbf{v} e \mathbf{v}' , dalle rispettive componenti ξ , η , ζ e ξ' , η' , ζ' , ed esprime la carica elettrica (in realtà la densità di carica, come osserva Del Re²) nel nuovo sistema con $\rho' = \rho du'/dt = \rho(\alpha_4\xi + \beta_4\eta + \gamma_4\zeta - i\delta_4)$, (essendo $u' = (\alpha_4x + \beta_4y + \gamma_4z + \delta_4u)$ e $du/dt = -i$) Questo si ricava implicitamente, interpretando la quarta delle equazioni (3).

Tenendo conto del tempo proprio del sistema

$$du'/dt' = du'/dt dt/dt' = (\alpha_4\xi + \beta_4\eta + \gamma_4\zeta - i\delta_4)dt/dt' = -i \text{ (avendo posto } u' = -it \text{)}.$$

Da quest'ultima e dalla quarta delle precedenti (3) si ricaverebbe

$$dt/dt' = \frac{-i}{\alpha_4\xi + \beta_4\eta + \gamma_4\zeta - i\delta_4} = -i \frac{\rho}{\rho'}$$

e quindi $\rho' = -\rho(i\alpha_1\xi + i\beta_1\eta + i\gamma_1\zeta - \delta_1)$ [formula diversa da quella ottenuta da Marcolongo, che è la quarta delle (3) di cui sopra] ed espressioni diverse per ξ' , η' e ζ' .

Limitandoci alla prima, ad esempio

$$\xi' = dx'/dt' = dx'/dt dt/dt' = (\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta - i\delta_1) dt/dt' = -\rho/\rho' (i\alpha_1\xi + i\beta_1\eta + i\gamma_1\zeta + \delta_1)$$

¹ vedi pag.134 POIN 1

² Incidentalmente viene rilevato l'errore di definizione: ρ non è la carica ma la densità di carica, altrimenti si correrebbe il rischio di uguagliare grandezze finite e differenziali ad esempio $\text{div } E = 4\pi\rho$ sono le testuali affermazioni di Del Re (a pag. 10 di ADR 1).

1. 2. 4 - La non covarianza dell'equazione di continuità

Con altri passaggi Del Re evidenzia che è inesatta la dimostrazione della covarianza dell'equazione di continuità con le trasformazioni di Marcolongo ¹.

Dopo una serie di calcoli basati sulle premesse di Marcolongo egli perviene, attraverso passaggi coerenti, che riportiamo in nota, a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \xi}{\partial x} + \frac{\partial \rho \eta}{\partial y} + \frac{\partial \rho \zeta}{\partial z} = i \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial \rho' \xi}{\partial x'} + \frac{\partial \rho' \eta'}{\partial y'} + \frac{\partial \rho' \zeta'}{\partial z'} \right) \quad (2)$$

Questo sta a provare che l'equazione di continuità non si trasforma in se stessa ² quando si applica il gruppo di sostituzioni ortogonali date da Marcolongo a pag. 348. di MAR 1.

Quindi, secondo Del Re, alcune affermazioni di principio senza verifica come quella di Marcolongo che "la sua trasformazione trasforma in se stessa il gruppo delle equazioni di Lorentz" non sono coerenti con la realtà fisica e non è nemmeno vero che contiene quelle di Lorentz come caso particolare, perché il gruppo delle trasformazioni di Lorentz pure e semplici (non quello di Poincaré) non è ortogonale ³. In realtà i presupposti sono molto somiglianti a quelli di Poincaré e portano ad analoghe conseguenze.

1. 2. 4 La trasformazione di Lorentz non è ortogonale

Del Re chiarisce, a tal proposito, che non basta che una trasformazione abbia per determinante 1 perché sia ortogonale ¹ e fornisce un esempio.

La trasformazione

$$x' = k(x - \varepsilon t) ; \quad y' = y ; \quad z' = z ; \quad t' = k(t - \varepsilon x)$$

ha per determinante 1, infatti

$$\begin{vmatrix} k & 0 & 0 & -k\varepsilon \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k\varepsilon & 0 & 0 & k \end{vmatrix} = k^2 + k\varepsilon \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k\varepsilon & 0 & 0 \end{vmatrix} = k^2 - k^2\varepsilon^2 = k^2(1 - \varepsilon^2) = 1$$

[essendo per definizione: $k^2 = 1 : (1 - \varepsilon^2)$]

Ma dallo stesso determinante si ricava la relazione: $k^2 + (-k\varepsilon)^2 = k^2 + k^2\varepsilon^2 = k^2(1 + \varepsilon^2) = \frac{1 + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}$

notoriamente diverso da 1. Questo comporta la non verifica della condizione di ortogonalità, in base alla quale la somma dei quadrati dei moduli dei termini di una colonna (o riga) dev'essere uguale ad 1

1 Il procedimento è riportato a pag. 12 di ADR 13, premettendo le formule di trasformazione già date da Marcolongo per trasformare x, y, z, t, in x', y', z', t' e $\rho, \rho\xi, \rho\eta, \rho\zeta$, in $\rho', \rho'\xi', \rho'\eta', \rho'\zeta'$. Ponendo provvisoriamente $-i\rho = \rho_1$ le quattro grandezze $\rho\xi, \rho\eta, \rho\zeta, \rho_1$ si trasformeranno in $\xi'\rho', \eta'\rho', \rho'\zeta', \rho'$. Ne segue che

$$\frac{\partial \rho'}{\partial u'} + \frac{\partial \rho' \xi'}{\partial x'} + \frac{\partial \rho' \eta'}{\partial y'} + \frac{\partial \rho' \zeta'}{\partial z'} = \frac{\partial \rho_1}{\partial u} + \frac{\partial \rho \xi}{\partial x} + \frac{\partial \rho \eta}{\partial y} + \frac{\partial \rho \zeta}{\partial z}$$

Poiché $i'u' = t'$, $iu = t$, $-i\rho = \rho_1$ segue che $\frac{\partial \rho'}{\partial u'} = \frac{\partial \rho'}{\partial t'} \frac{dt'}{du'} = i \frac{\partial \rho'}{\partial t}$ e che $\frac{\partial \rho_1}{\partial u} = -i \frac{\partial \rho}{\partial u} = -i \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{dt}{du} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$ donde la (2).

² affermazione di Del Re a pag. 13 di ADR 13

³ vedasi a pag.14 di ADR 13

Secondo Del Re, Marcolongo, “*mentre da un lato lascia credere il contrario, dall'altro dimostra di aver conoscenza della memoria di Poincaré, nella parte in cui viene dato un esempio di trasformazione a determinante 1 non ortogonale*”¹.

1. 2. 5. *Esempi di inapplicabilità delle trasformazioni ortogonali ai fini della covarianza*

La *Nota critica* continua sottolineando che nel 1912 Marcolongo sintetizza il risultato del 1906 con l'affermazione che: “*Tutte le trasformazioni lineari a 4 variabili trasformano in se stesse le equazioni dell'elettrodinamica del Lorentz; il potenziale scalare e le componenti del vettore potenziale nel sistema trasformato sono funzioni lineari ed omogenee delle stesse grandezze relative al sistema primitivo*”. Lo stesso vale per le forze elettriche e magnetiche. Aggiunge poi che “*la medesima proprietà fu notata alla fine del 1907 dal Minkowskj*”.

Alle obiezioni precedenti riassumibili: nella sostanziale coincidenza delle trasformazioni del prof. Marcolongo, non con quelle ortogonali, ma con quelle di Poincaré; nella insussistenza del teorema di Marcolongo in base al concetto corrente di trasformazione ortogonale; nella esigenza di limitare le trasformazioni ortogonali di Marcolongo (da intendere come quelle di Poincaré) a quelle indicate in altra parte, Del Re² aggiunge ulteriori considerazioni. Come quella di lasciarsi guidare da criteri bene determinati e non arbitrari (con la stessa saggezza di Poincaré), anche quando si presentano espressioni analitiche, indipendenti da ogni significato fisico del soggetto.

Altrimenti il “*campo elettrico non esiste nemmeno come entità puramente analitica*”. Del Re porta anche un esempio⁵ nel quale si costruisce un campo elettromagnetico che, contemporaneamente, non differisce e differisce dal primitivo diventando immaginario!

Per dimostrare che il campo ottenuto con la trasformazione di Marcolongo non esiste neppure come entità analitica Del Re considera la trasformazione identica

$$x' = x, y' = y, z' = z, t' = t$$

che, notoriamente, appartiene a tutti i gruppi, è indipendente dalla questione della ortogonalità o meno e che sicuramente lascia inalterati gli enti sui quali opera. La applica alle formule

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho(\alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta - i\delta_1) \\ \rho' \xi' &= \rho(\alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta - i\delta_2) \\ \rho' \eta' &= \rho(\alpha_3 \xi + \beta_3 \eta + \gamma_3 \zeta - i\delta_3) \\ \rho' \zeta' &= \rho(\alpha_4 \xi + \beta_4 \eta + \gamma_4 \zeta - i\delta_4) \end{aligned}$$

¹ A pag. 15 ADR 13 Nella stessa pag. un'espressione alquanto dura: *Decisamente pare che il prof. Marcolongo ci tenga a far sapere che una idea chiara sulle trasformazioni ortogonali non la possedeva e non l'ha voluta possedere*

² A pag. 146 di POIN 1. E' la trasformazione di Lorentz in $l = 1$ per conservare la natura gruppale

³ quella riportata a pag. di MAR 1 e che trascriviamo per comodità al primo rigo

⁴ L'esempio è riportato a pag. 15 di ADR 13

⁵ Pag. di ADR 13

ed ottiene

$$\rho' = -i\rho, \quad \rho'\xi' = \rho\xi, \quad \rho'\eta' = \rho\eta, \quad \rho'\zeta' = \rho\zeta, \quad \text{ed essendo } \rho \neq 0$$

$$\rho' = -i\rho, \quad \xi' = i\xi, \quad \eta' = i\eta, \quad \zeta' = i\zeta$$

Il campo magnetico diventa così immaginario, differisce e non differisce dal primitivo

1. 2. 6 L'interpretazione corretta delle trasformazioni di Lorentz secondo Minkowskj

Altri rilievi muove Alfonso Del Re a quei passaggi che intendono collegare il lavoro di Marcolongo con la Memoria di Minkowskj¹.

Dapprima egli fa notare che il riferimento di Marcolongo a Minkowskj indebolisce ancor più il suo lavoro. *“Mentre il primo, infatti, si riferisce a tutte le trasformazioni ortogonali, Minkowskj maneggia solo quelle vere, a determinante +1 (per le quali l'ultimo elemento della matrice dei coefficienti è positivo e gli elementi del minore complementare di esso sono reali, con valori immaginari e nulli per gli elementi residui della quarta riga e della quarta colonna)”*.

Queste sono le trasformazioni ortogonali destrorse, secondo la denominazione di Minkowskj e di Lorentz, suscettibili di offrire campi elettromagnetici reali, se impegnate assieme a

$$x' = x; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = it \quad (\text{che rappresenta una rotazione})$$

In un passaggio successivo la vis polemica si concentra invece sull'affermazione di Marcolongo che il Minkowskj, ritrovò, *dopo di lui*, il suo enunciato, traducendola nel dilemma: *o Minkowskj ha prodotto un teorema ambiguo, ora vero ora falso, oppure era tanto cieco da non vedere che Poincaré "aveva messo in rilievo nella sua totalità il gruppo delle trasformazioni che posseggono l'invariante assoluto*

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$

*come gruppo d'invarianza pure per le trasformazioni di Lorentz”*².

A questo punto la sintesi, che offre una spiegazione di tutto rispetto:

*“Il Minkowskj non aveva l'intento di pretendere che le sue trasformazioni ortogonali dovessero trasformare in se stesse le equazioni di Lorentz (dell'elettromagnetismo, di Maxwell per intenderci) (vedi Marcolongo) ma quello di passare da esse alla trasformazione del gruppo G_c , che concide, per $c = 1$, con il gruppo di Poincaré”. [con un altro punto di vista, ma allo scopo di considerare il principio dell'invarianza delle equazioni fondamentali dell'elettrodinamica, come una proprietà inclusa nel concetto di spazio e di tempo]*³.

Viene infine sottolineato che il gruppo G_c (relativo alle onde luminose nel vuoto) figurava già in una nota di W. Voigt del 1887, con il riconoscimento dello stesso Lorentz.

Questa circostanza ha suggerito di chiamarle *trasformazioni di Voigt-Lorentz*⁴.

¹ paragrafo 1 n.1 di MIN 1, note 7) 8)

² pag.17 ADR 13

³ Op.cit. MIN 1 a pag. 341 di MIN 1. Nella stessa nota a pag. 340 c'è il riconoscimento dell'idea che ebbe Voigt di questo gruppo già nel 1887. Interessante la citazione a pag. 136 di Pais: *Quando Minkowski richiamò ad un Congresso di fisici nel 1908 l'attenzione sull'articolo di Voigt del 1887, quest'ultimo, presente, replicò laconicamente: “Fin d'allora (nel 1887) si erano ottenuti alcuni risultati che in seguito sono stati forniti dalla teoria elettromagnetica”*.

⁴ Lo abbiamo riportato già a pag. 2 del presente lavoro

1.3 Note conclusive

Grande o piccolo che possa essere l'oggetto di un'osservazione, questa è sicuramente valida se aiuta a rischiarare un arco temporale che supera le circostanze descritte.

Nel nostro caso, dalla visuale di due studiosi, che insegnarono a lungo nell'Ateneo napoletano, Roberto Marcolongo e Alfonso Del Re ¹, siamo stimolati a spaziare su un periodo importante della fisica.

L'autorevolezza degli autori è fuori discussione. Marcolongo contribuì con molti lavori originali allo studio del problema. Egli appartiene alla scuola dei *vettorialisti* italiani ², che applicarono le omografie vettoriali per la trattazione delle equazioni di Lorentz. Alfonso Del Re, alcuni anni prima, aveva affrontato i temi dello spazio presagendo alcune caratteristiche delle future teorie ³.

In queste brevi note conclusive cercherò di giustificare l'attenzione prestata alla *Nota Critica* di Del Re. Questa, se considerata nei singoli passaggi e nelle affermazioni, potrebbe rientrare in un normale dibattito tra studiosi, con punte più o meno polemiche, dettate, talvolta, anche da rapporti interpersonali.

Lascio agli Autori la paternità delle opinioni e affido, volentieri, agli specialisti le sottigliezze analitiche.

Per il doveroso ampliamento del panorama ritengo scontati la vitalità, l'interesse e la partecipazione costruttiva ad alto livello della scuola matematica e fisico-matematica italiana ai temi che caratterizzarono il periodo a cavallo dei due secoli, l'Ottocento e il Novecento. Essi sono stati, del resto, già abbondantemente evidenziati da una pubblicistica attenta e ricca di particolari ⁴.

Lo scritto di Del Re è prezioso perché, letto nella struttura complessiva, scandisce, in un'epoca in cui le questioni non erano definite in tutti gli aspetti, i passaggi e le tappe più importanti di un filone ricco e produttivo per la costruzione della Relatività Ristretta dal punto di vista storico.

Nell'ambito di questo sta il contributo di illustri studiosi, come Voigt, Lorentz, FitzGerald, Langevin, Heilmoltz, Poincaré e Minkowskj.

Tratti comuni di questa fase di formazione delle conoscenze, nel campo della fisica, sono i frequenti parallelismi, nelle indagini e nei percorsi, caratteristiche comuni di molti periodi di svolta radicale. Ci troviamo in presenza di numerosi punti di convergenza parziali.

¹ Vedasi Tricomi e Poggendorf già citati. Per Del Re vedasi ancora il Diz. Autori (Ist. Enc. Ital.) già menzionato.

² Con Burali-Forti. Altri lavori sugli argomenti di Marcolongo compariranno successivamente sul Rend. Dei Lincei e negli Annali dell'Università di Tolosa.

³ La prolusione dell'Anno Accademico 1896-97 nell'Università di Modena dello stesso Del Re.

⁴ Valgano per tutti i capitoli dedicati all'argomento negli *Annali 3 della Storia d'Italia* (Einaudi Torino 1980) a cura di Roberto Maiocchi (*Il ruolo delle scienze nello sviluppo industriale italiano*), Luigi Besana (*Il concetto e l'Ufficio delle scienze nella scuola*), Massimo Galuzzi (*Geometria algebrica e logica fra Otto e Novecento*), Giacomo Cavallo, Antonio Messina (*Caratteri, ambiente e sviluppo dell'indagine fisica*) e Ugo Baldini, Luigi Besana (*Organizzazione e funzioni delle Accademie*)

Voigt e Lorentz, sia pure in epoche differenti, pervennero a conclusioni molto simili, con metodi costruttivi analoghi ¹.

Poincaré perfezionò, lungo lo stesso sentiero, i risultati ottenuti da Voigt e da Lorentz, formulando la sua *Teoria* in contemporanea, quasi, con Einstein.

Le conseguenze, che non appaiono sempre molto divergenti sul terreno pratico, partono da presupposti profondamente diversi. Vengono alla luce, quasi negli stessi mesi, le geniali innovazioni di Poincaré, frutto, soprattutto di sottili approfondimenti, in un filone di continuità rispetto ai contributi precedenti, propri ed altrui, e i radicali fondamenti della nuova fisica, fondata su *autentici Principi*, elaborati dalla mente di Albert Einstein ².

L'itinerario di Voigt, Lorentz e Poincaré avrà un suo compimento nella magistrale sintesi di Minkowskj, destinata ad irrobustire anche i fondamenti einsteiniani.

Questo percorso, che definiremo, in modo semplificato, *di Lorentz e Poincaré*, oppure *fisico-matematico*, si caratterizza per il largo uso della teoria dei gruppi e delle recenti acquisizioni matematiche e geometriche. Supera, talvolta, nell'immediato, le stesse implicazioni fisiche, evidenziando importanti momenti critici.

Le pagine di Del Re, che dimostrano una spiccata sensibilità al cogliere il significato fisico dei ragionamenti e delle formule, consentono di superare le strettoie imposte, quasi, al modello dall'uso dello strumento matematico.

Aggiungo che la valutazione di alcuni passaggi dei lavori di Marcolongo del 1906 e del 1912 non può essere confuso con un giudizio complessivo sull'autore di essi.

Altri lavori, successivamente pubblicati, contribuiscono a diradare eventuali nebbie ³.

Il lavoro di Marcolongo si svilupperà all'interno di un percorso, quello *dei vettorialisti italiani*, che trovarono il punto di forza nel suo lavoro e in quello di Burali-Forti. Forse, la spinta iniziale a questo campo d'indagine, che si fondava sull'applicazione delle omografie vettoriali allo Spazio – Tempo, sta proprio nel lavoro di Marcolongo del 1906.

La lettura della via *fisico- matematica* alla Relatività fatta da Del Re, finora poco nota, collima, del resto, con quella fatta in tempi recenti, da eminenti fisici e studiosi contemporanei ⁴.

1 Sul pluralismo delle strade vedasi Drago, *Minkowski, Poincaré, Lobacewski, la via geometrica alla relatività ristretta*, Atti del XVIII congresso di Storia della Fisica e dell'Astronomia.

In fondo il particolare, successivamente corretto da Marcolongo, di confondere la carica con la densità elettrica, può essere segno non di superficialità ma di scarsa consuetudine alla verifica assidua del senso fisico dei termini adoperati.

2 A. Einstein, *Zur Elektrodynamik der bewegter Körper*, Annalen. der Physik, t. XVII, 1905 polemica

Segnatamente una nota del 1914 sul Rendiconto dell'Acc. dei Lincei dal titolo: *Su alcune questioni relative alle equazioni di Lorentz in elettrodinamica e negli Annales de Faculté de Sciences de Toulouse*, 1914

3 Vi sono lavori di Marcolongo sullo stesso argomento pubblicati in periodi successivi rispetto all'epoca della polemica.

Segnatamente una nota del 1914 sul Rendiconto dell'Acc. dei Lincei dal titolo: *Su alcune questioni relative alle equazioni di Lorentz in elettrodinamica e negli Annales de Faculté de Sciences de Toulouse*, 1914.

In fondo il particolare, successivamente corretto da Marcolongo, di confondere la carica con la densità elettrica, può essere segno non di superficialità ma di scarsa consuetudine alla verifica assidua del senso fisico dei termini adoperati

4 Richiamiamo ancora Pais A. *Sottile è il Signore*, Bollati Boringhieri, Torino, giugno 1999- Feur, *Einstein e la sua generazione*, Il Mulino, Bologna, 1990- Tyapkin A. A., *Relatività speciale*, Jaca Book, Milano, 1993

Gli scritti esaminati in questo articolo evidenziano, ancora una volta, il grande influsso di Henri Poincaré¹ non solo sulla cultura scientifica italiana, ma anche sui modelli di pensiero. D'altro canto, erano quasi esclusivamente i matematici a ragionare su queste cose, quando, in Italia, l'apporto dei fisici era molto debole. Presupponeva la presenza di strutture ed istituzioni, quando il problema per la matematica si poteva risolvere, spesso e più semplicemente, con *le cattedre*.

E' singolare che nei lavori esaminati degli anni '12 e '13, non vi siano citazioni di Einstein. Eppure la Relatività Ristretta era nata del 1905!

Segno che il prudente convenzionalismo teneva banco e che il genio di Poincaré affascinava soprattutto chi era avvezzo a ragionare in termini di derivate parziali, di gruppi e di invarianti. Tanti furono coloro che avvicinarono alla soglia della Relatività.

Ma le grandi Teorie, d'altro canto, non vanno valutate, esclusivamente, come punti d'approdo ragionevoli o come sintesi magistrali. In questo modo si guarderebbe, in prevalenza, al passato e molte cose sarebbero già scritte. Si tratterebbe, soltanto, di decifrarle.

E' in riferimento al futuro che esse acquistano la loro vera grandezza, in quanto consentono di risolvere nuovi problemi. La fertilità è la riprova della loro validità.

Gli studiosi che hanno animato il dibattito sono entrambi dell'Università di Napoli. Segno che, all'interno del nuovo Stato unitario i cervelli lavoravano in tutta la penisola, quindi anche nel Meridione. Erano frutto di valide preesistenze nel Regno delle Due Sicilie. Continuarono a svilupparsi nello Stato unitario.

¹ Importante, *La mesure du temps* di H. Poincaré da: *Revue de Métaphysique et de morale* (1898 T. I)