Vittorio Banfi[1]

RICERCHE DI J. BERNOULLI SUI "PRINCIPIA" DI NEWTON

1. Introduzione

J. Bernoulli (1667-1748) mise in evidenza, all'inizio del '700, alcune imprecisioni e qualche incompletezza nei "Principia" di I. Newton. In questo studio si considerano due di queste ricerche: la prima riguarda il problema dei due corpi (nella sua formulazione adattata al sistema Sole-pianeta), la seconda concerne lo stesso problema, ma in presenza di un mezzo resistente con legge di resistenza assegnata.

2. Soluzione classica del problema dei due corpi

Partendo dalle tre leggi di Keplero e dalle tre della dinamica, Newton dedusse la legge di attrazione universale (bibl. 1): questo è il cosiddetto teorema diretto.

Il teorema inverso ossia, partendo dalla legge di attrazione, dimostrare che la traiettoria è una conica, è pressochè considerato ovvio da Newton, almeno interpretando le sue stesse parole (bibl. 1) "... si corpus quodvis Planetae vi centripeta quae sit reciproce proporzionalis quadrato distantiae a centro, simul agitetur; movebitur hoc corpus in aliqua sectionum conicarum...". Ad una memoria del 1710 (bibl. 2) Bernoulli affida la dimostrazione del teorema inverso.

Essa, in altro modo, è ripresa dallo stesso Newton nella seconda edizione dei Principia (1713).

Esaminiamo ora questa dimostrazione di J. Bernoulli.

Chiamando con $\varphi(r)$ la funzione caratteristica della forza centrale e con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distanza tra l'unità di massa (planetaria) e l'origine (in cui è posta la massa gravitante M) scriviamo le equazioni differenziali di moto (Figura 1)

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} = -\varphi(r)\,\dfrac{x}{r} \\[2ex] \dfrac{d^2 y}{dt^2} = -\varphi(r)\,\dfrac{y}{r} \end{cases} \qquad (1)$$

[1] Centro di Astrodinamica G. Colombo

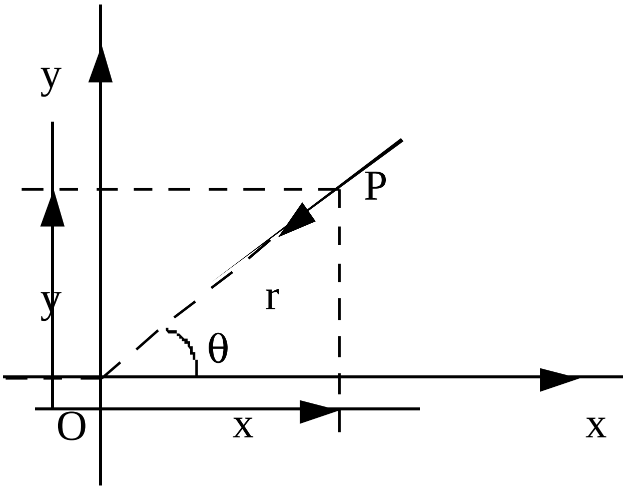

Figura 1 - Il problema dei due corpi

per semplicità nel piano. E' stato assunto GM = 1 e successivamente si porrà $j\,(r) = \dfrac{1}{r^2}$; ma prima Bernoulli sviluppa alcune assai importanti considerazioni analitiche.

Moltiplicando la prima delle (1) per y la seconda per x e sottraendo si ha

$$x\,\frac{d^2y}{dt^2} - y\,\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt}\right) = 0\ ,$$

ossia

$$x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt} = c = \mathit{costante} \qquad (2)$$

La (2) è la legge delle aree, ovvero la seconda di Keplero.

In coordinate polari

$$r^2 dq = x\,dy - y\,dx = cdt\ . \qquad (3)$$

Ancora dalle (1), moltiplicando la prima per $2\,\dfrac{dx}{dt}$ e la seconda per $2\,\dfrac{dy}{dt}$ e sommando, abbiamo

$$2\,\frac{d^2x}{dt^2}\,\frac{dx}{dt} + 2\,\frac{d^2y}{dt^2}\,\frac{dy}{dt} = -\,2\,\frac{j\,(r)}{r}\left\{x\,\frac{dx}{dt} + y\,\frac{dy}{dt}\right\} \qquad (4)$$

La (4) è subito integrata; infatti

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = -2 \int j\,(r)dr + 2h\,, \qquad (5)$$

essendo 2 r dr = d ($x^2 + y^2$) = 2 x dx + 2 y dy e 2h la costante di integrazione. La (2) e la (5) sono noti oggi come gli integrali primi del problema dei due corpi: a) conservazione del momento angolare (per unità di massa), b) conservazione dell'energia totale.

I concetti di funzione potenziale, campo conservativo e relativi teoremi ovviamente non sono ancora noti a Bernoulli.

Tutto ciò sarà sviluppato, nella seconda metà del '700, da Lagrange e Laplace (bibl. 3). Cionondimeno Bernoulli, partendo dalla (5), introduce la funzione U così:

$$\frac{v^2}{2} = U + h \qquad con \qquad U = -\int j\,(r)dr\,. \qquad (6)$$

Prima di porre $j\,(r) = \frac{1}{r^2}$, Bernoulli sviluppa alcune dimostrazioni geometriche in perfetto stile newtoniano.

Esaminiamo la Figura 2, che si può considerare identica alla Figura 1, solo un po' più dettagliata.

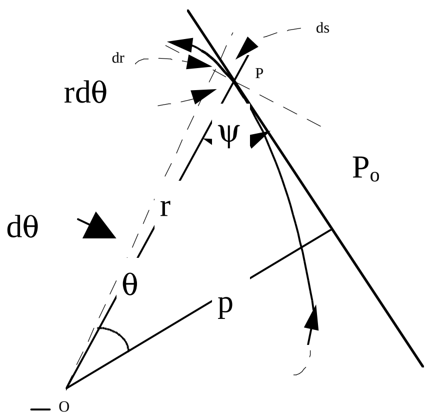

Figura 2 - Ancora il problema dei due corpi: la figura è più dettagliata

Sia p la lunghezza del segmento O P_o, perpendicolare alla tangente alla traiettoria in P. Inoltre il raggio vettore r è dato da $r = OP = \frac{p}{siny}$; è poi facile vedere che $ds = \frac{rdq}{siny}$.

Eliminando sinψ dalle due precedenti formule otteniamo

$$ds = \frac{r^2\ dq}{p} \quad . \tag{7}$$

Poichè $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 dq^2}$, avremo dalla (7)

$$\frac{1}{p} = \frac{\sqrt{dr^2 + r^2 dq^2}}{r^2 dq} \quad . \tag{8}$$

Per la (7) e la (3)

$$p\ ds = r^2 dq = c\ dt\ ,$$

ovvero

$$p\ \frac{ds}{dt} = p\ v = r^2\ \frac{dq}{dt} = c\ .$$

Quest'ultima, posta nella (6), porge

$$\frac{c^2}{p^2} = 2\left(U + h\right). \tag{9}$$

La (9) è la formula chiave per la dimostrazione.
Infatti dalla (8) abbiamo

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{dq}\right)^2 \quad . \tag{10}$$

Con la variabile ausiliaria $u = \frac{1}{r}$ ricaviamo

$$\frac{dr}{dq} = \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\ \frac{du}{dq}$$

e quindi dalla (10)

$$\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{dq}\right)^2\ ;$$

quest'ultima, sostituita nella (9), porge:

$$c^2 \left\{ u^2 + \left(\frac{du}{dq} \right)^2 \right\} = 2\left(U + h\right) \quad .$$

Risolvendo la precedente rispetto a $\frac{du}{dq}$ otteniamo

$$\frac{dq}{du} = \frac{c}{\sqrt{2(U+h) - c^2\ u^2}} \quad . \tag{11}$$

Il problema è portato infine alle quadrature.
Dalla (11) abbiamo infatti

$$q = \int \frac{c\ du}{\sqrt{2(U+h) - c^2\ u^2}} \quad ; \tag{12}$$

a questo punto Bernoulli pone $U = \frac{1}{r}$ e dimostra che le orbite sono sezioni coniche, il tipo specifico di conica essendo fissato dalla costante h.

A conclusione di questo primo argomento si può affermare che, oltre ad aver presentato la dimostrazione inversa, lo studio di Bernoulli è importante per le seguenti ragioni. Certamente il teorema di conservazione dell'energia totale e la distinzione tra i due generi di energia (cinetica e di posizione) sono impliciti nei contenuti dei Principia (bibl. 4), però Bernoulli illustra questa distinzione più chiaramente, e in modo più utile per essere sviluppata successivamente dalla meccanica analitica di Lagrange.

3. Moto perturbato in un netto resistente

Questo argomento è affrontato nei Principia nel Lib. II, Sect. IV, Prop. XV e XVI, come l'effetto della resistenza dell'aria sulla progressiva caduta del corpo secondario verso il corpo centrale (o primario).

In questo paragrafo si considera solo il primo approccio di Bernoulli al problema. Ciò consente di introdurre la ben nota sua equazione differenziale del primo ordine.

Egli assume la forza perturbatrice (Figura 3) agente lungo la tangente alla traiettoria del punto mobile P. Inoltre la resistenza (modulo della precedente forza) è esplicitata mediante la legge R = a v^n, con a > 0 ed n esponente intero.

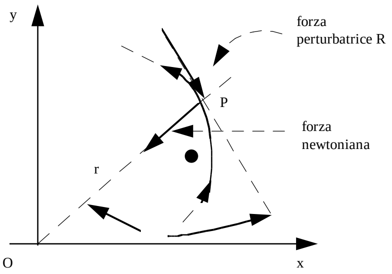

Figura 3 - Elementi geometrici e dinamici relativi al moto kepleriano perturbato

Ancora indicando con ψ l'angolo tra il raggio vettore e la tangente alla traiettoria in P (Figura 3) abbiamo:

componente sulla tangente $\Rightarrow \quad \dfrac{dv}{dt} = -j\,(r)\cos y \;-av^{n}$ (13)

componente sulla normale $\Rightarrow \quad \dfrac{v^{2}}{r} = j\,(r)\;sin y \quad ,$

con ρ = raggio di curvatura dell'orbita in P. D'altra parte (Figura 2)

$$\frac{dr}{rdq} = \cot y \;= \frac{\cos y}{sin y}$$

e quindi $\qquad j\,(r)\cos y \;= y\;(r)\,\dfrac{dr}{r\,dq}\;sin y \;= \dfrac{v^{2}}{r}\,\dfrac{dr}{r\,dq} \qquad .$

Sostituendo la precedente nella (13) ricaviamo

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v^{2}}{r}\,\frac{dr}{r\,dq} - av^{n} \quad , \qquad (14)$$

che è la celebre equazione differenziale di Bernoulli (bibl. 5). Per ottenerne la forma odierna basta modificare la (14) moltiplicandola per $\dfrac{ds}{v^{2}}$; avremo

$$\frac{dv}{v} + \frac{1}{r}\,\frac{dr\,ds}{r\,dq} + a\,v^{n-2}\;ds = 0 \qquad (15)$$

Osserviamo che, supposta la traiettoria fornita dalla relazione $q = q(r)$, sia

$ds = \left[1 + r^2 \left(\frac{dq}{dr} \right)^2 \right]^{1/2} dr$ sia ρ, sono entrambe funzioni della sola r. Allora poniamo

$$ds = \frac{B(r)}{a} dr \qquad \frac{1}{r} \frac{ds}{dq} \frac{1}{r} = A(r)$$

e la (15) diventa

$$\frac{dv}{v} + A(r)dr + B(r)\, v^{n-2}\, dr = 0 \ .$$

Finalmente, moltiplicando la precedente per $\frac{v}{dr}$ deduciamo

$$\frac{dv}{dr} + v\ A(r) = -B(r)\, v^{n-1} \ , \qquad (16)$$

che è la forma attuale dell'equazione differenziale in discorso (bibl. 6).

Nella memoria in precedenza citata (bibl. 5) J. Bernoulli espone il procedimento per ottenere la completa soluzione.

BIBLIOGRAFIA

1. Newton, I. (1686), "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", S. Pepys, Reg, Soc. Praeses.

2. Bernoulli, J. (1710), Mem. Acad. Paris, pp. 521-533.

3. Segrè, E. (1996), "Personaggi e scoperte della Fisica" Vol. I, p. 154, Mondadori, Milano.

4. Chandrasekhar, S. (1995), "Newton's Principia for the common reader", pp. 166-172, Clarendon Press, Oxford.

5. Bernoulli, J. (1697), Acta Eruditorum "De conoidibus et de sphaeroidibus quaedam solutio analytica", pp. 113-118.

6. Ince, E.L. (1969), "Integrazione delle equazioni differenziali ordinarie", p. 27, Cremonese, Roma.