

Danilo Capecchi<sup>1</sup>

## Il Principio Delle Azioni di Vincenzo Angiulli

### 1. INTRODUZIONE

Di Vincenzo Angiulli, matematico napoletano del settecento, si hanno scarse informazioni. Da (Minieri-Riccio, 1875; Riccardi, 1952) si ricava solo che Angiulli è l'autore del libro *Discorsi intorno agli equilibri*, edito a Napoli nel 1770, presso la stamperia Simoniana, in 8°. Dalla copertina del libro risulta poi che egli era accademico dell'Istituto delle Scienze di Bologna e professore di matematica nella Reale Accademia della Nunziatella in Napoli. Per il fatto di avere frequentato l'università di Bologna e per il rispetto che mostra nei confronti di Vincenzo Riccati (1707-1775), che fu professore in quell'università, si può dedurre che Angiulli sia stato suo allievo. È da citare un recente articolo di Corradi per un convegno sulla scienza nel meridione (Corradi, 1985), che commenta sinteticamente il *Discorso intorno agli equilibri*.

Il libro di Angiulli esce nel 1770, quasi un secolo dopo la pubblicazione dei *Principia* di Newton (1687), le cui teorie e il cui concetto di forza non sono ancora dominanti nel continente anche se vanno prepotentemente affermandosi; da poco sono stati pubblicati i lavori di Leonard Euler (1707-1783) che sviluppano la rudimentale meccanica newtoniana per renderla uno strumento effettivamente operativo, mediante l'uso delle equazioni differenziali. In Italia le teorie di Newton cominciano a venire accettate a partire dalla metà del settecento (Casini, 1983). Una delle voci in controtendenza era stata quella di Jean Bernoulli che con il suo principio delle velocità virtuali (del 1717), riferito da Pierre Varignon nella sua *Nouvelle Mécanique ou Statique* del 1725, aveva proposto un approccio alternativo della Meccanica, vicino a quello voluto da Leibniz.

Il *principio delle azioni* che Angiulli, nel suo libro, assume a fondamento della Statica è sostanzialmente equivalente al principio delle velocità virtuali di Bernoulli e quindi in controtendenza anch'esso rispetto all'ondata newtoniana. Per questo motivo il lavoro di Angiulli va visto come un interessante tentativo di difendere una impostazione non newtoniana della Meccanica, come quella italiana basata sul principio dei lavori virtuali, che aveva le sue radici nelle opere di Galileo, Torricelli e Borelli, alla quale si innestano le idee di Leibniz.

Il termine *azione* e il relativo concetto erano già stati sviluppati, in forma sostanzialmente equivalente a quella di Angiulli, da Vincenzo Riccati, qualche anno prima, nel 1749, nel suo libro *Dialogo di Vincenzo Riccati della Compagnia di Gesù dove ne' congressi di più giornate delle forze vive e dell'azioni delle forze morte si tien discorso*, però con una prospettiva e un linguaggio un po' diversi, più vicini allo spirito newtoniano. Lo stesso Riccati, due anni dopo il libro di Angiulli, nel 1772, pubblica il *De' Principi della Meccanica* ove riprende la teoria sviluppata in precedenza e presenta delle applicazioni. Nel suo secondo libro Riccati dà un maggior risalto al principio delle azioni, ponendolo anch'egli a fondamento della Meccanica; si vedrà che Angiulli precede il maestro in questa evoluzione di pensiero ed è più esplicito di lui.

Lo spazio dedicato all'esposizione del principio delle azioni e alla sua "dimostrazione" occupa i primi quattro capitoli del *Discorso intorno agli equilibri*, che consta di 168 pagine, 32 figure e 8 capitoli. Gli ultimi quattro capitoli riguardano applicazioni, alcune anche interessanti, alla statica dei corpi rigidi, alla idrostatica e all'equilibrio delle funi.<sup>2</sup>

### 2. L'AZIONE DELLA POTENZA

Nonostante l'intenzione di fornire un criterio per l'equilibrio, e quindi di Statica, Angiulli inizia la sua analisi con dei concetti dinamici esponendo la legge di inerzia, con parole sue, in modo chiaro: *ogni corpo persevera nello stato suo, o di quiete, o di moto, uniformemente, e per la medesima direzione, fin tanto che dalle forze impressegli costretto non venga deviato*, facendo così capire subito che il suo approccio alla Statica non è quello classico, di tipo geometrico deduttivo.

Per introdurre il concetto di *azione*, che sta alla base della formulazione del suo criterio di equilibrio, Angiulli comincia a far notare che, sebbene la presenza di una forza sia condizione necessaria per il cambiamento di stato, essa non è anche sufficiente. Per esempio, dice, in un corpo sospeso a un filo, quantunque sia soggetto alla gravità, non si nota nessun variazione di stato. Pertanto, conclude, si deve distinguere tra la forza e la sua azione; solo questa può produrre il cambiamento di stato.

Dopo avere affermato che Galileo è stato il primo a distinguere tra la forza e l'azione, quando ha introdotto l'idea di forza della percossa<sup>3</sup>, Angiulli passa a presentare, tramite esempi, il suo concetto di forza, che con linguaggio settecentesco chiama *potenza*:

“Per nome di potenza dunque non altro intendiamo, che la pura, e semplice pressione, o sia quello sforzo, che fa la gravità, o altra forza contro qualche ostacolo invincibile, come è per l'appunto quello, che fa una palla di piombo contro una tavola immobile, oppure contro la mano che la sostiene” [Angiulli; 1770, pag. 5, par. V].

In questo brano la potenza non appare come una forza puramente statica, come era prevalentemente per Galileo; essa, in accordo a Leibniz (*Specimen dynamicum*, 1695) e a Torricelli (*Lezioni accademiche*, 1715), esercita sempre uno sforzo anche contro un ostacolo e pertanto svolge un ruolo attivo.

Nel brano seguente si trova la definizione della *forza viva* e della sua relazione con la *forza morta*:

“Sicché se una palla, a cagion d'esempio di piombo, sarà collocata sopra di una tavola immobile, la gravità, che in essa risiede, sarà forza soltanto premente, e perciò *forza morta*. Ma se si rimuoverà l'ostacolo, cioè a tavola sottoposta, nella palla si indurrà tosto cangiamento di stato, ....”[Angiulli; 6, VII]

“.. i meccanici per loro metodo si immaginarono la potenza dar al corpo un impulso, il quale però appena nato, fosse dall'invincibile ostacolo distrutto, e così secondo il metodo dei matematici si rappresentarono la forza morta sotto l'idea di un impulso infinitamente picciolo [Angiulli; 5,VI]. .... Ma poiché i meccanici più chiara idea formar potessero dell'azion della potenza, siccome s'avevano rappresentata la potenza sotto l'idea di un impulso, che nel procinto del suo nascere resta per l'invincibile ostacolo estinto, e distrutto, così, rimosso l'ostacolo invincibile, concepirono tutti gli impulsi ..... conservarsi nel corpo medesimo, e quindi si avvisarono l'azione della potenza non esser, che la somma di tutti gli impulsi accumulati, e conservati nel corpo. Quel tanto poi d'energia che per l'azion della potenza si genera nel corpo ..... viene chiamata *forza viva* [Angiulli; 6-7, VIII].

La potenza è presentata dunque come un impulso infinitesimo che viene continuamente rinnovato, per effetto della gravità o altra causa, e continuamente distrutto per azione dei vincoli. Rimossi i vincoli gli impulsi si possono accumulare e l'azione della potenza consiste appunto nell'effetto cumulativo degli impulsi che non sono distrutti dai vincoli; l'azione della potenza genera poi la forza viva (sostanzialmente l'odierna energia cinetica). Nel seguente brano si vede come Angiulli concepisca la relazione tra potenza, azione, forza viva e cambiamento di stato:

Imperocché dalle cose sopra divisate apparisce, che agendo la potenza nel corpo, a cui è applicata, genera in esso la forza viva, e che questa produce il cambiamento di stato. Sicché la forza viva considerarsi deve come un effetto dell'azion della potenza e come causa del cangiamento di stato che nel corpo si induce; e poiché in questo caso si parla di cause intere, e totali, avrà luogo l'assioma Ontologico, che le cause debbono essere proporzionali agli effetti e gli effetti alle cause. Quindi nascono due modi di misurar la forza viva; cioè, o con misurar il di lei effetto, che è il cangiamento di stato, o con misurar la di lei causa, che è l'azione della potenza [Angiulli; 22, XXV].

Per confrontare la potenza con la sua azione, Angiulli seguiva ancora a far riferimento a Galileo con Torricelli e Borelli, dicendo che essi avevano stabilito, con loro ragionamenti, che tra la potenza e la sua azione passa quella stessa proporzione che passa tra l'infinito e il finito (7, IX). Essi avevano ragione, dice Angiulli, infatti:

“Imperocché s'egli è vero come si è detto, che la potenza considerarsi deve come un impulso minore di ogni altro dato, e che l'azion della potenza è la somma di tutti gli impulsi comunicati al corpo, e nel corpo stesso conservati, quella dovrà certamente esser la proporzione della potenza e l'azion della potenza, che passa tra una quantità infinitesima, ed una quantità finita” [Angiulli, 7,IX].

Nel brano appena riportato Angiulli ha precisato che la potenza è un impulso minore di ogni altro, il che è proprio la definizione di infinitesimo. Suppone che tale impulso si sommi con gli altri [nell'operazione di integrazione] portando a quantità finite:

...tra la potenza e la di lei azione non altra proporzione dovrà passare che quella che passa tra il cangiamento di stato zero e un determinato cangiamento di stato, vale a dire quello che passa tra il finito, e l'infinito [Angiulli, 7-8, IX, X].

Non deve stupire l'insistenza con cui Angiulli cerca di precisare il suo pensiero. Il calcolo infinitesimale è oramai diffuso da lungo tempo, ma i suoi fondamenti sono ancora incerti e per quanto riguarda l'integrazione, accanto alle idee di Leibniz sopravvivono ancora i concetti degli indivisibili di Cavalieri-Torricelli, i quali distinguevano, ai fini del loro calcolo con gli indivisibili, il caso di una figura lineare dal caso di una figura piana; nel caso presente la grandezza  $f$  dal prodotto di due grandezze  $f \times s$ .

Sebbene l'analisi del testo mostri chiaramente come Angiulli si riallacci alla scuola di Leibniz e Bernoulli, il suo richiamo alla scuola italiana non è solamente celebrativo; egli si sforza di collegare i risultati di Galileo a quelli di Leibniz. Ad esempio, nel modo di esporre i concetti sulla potenza e sulla sua azione si sente un po' il linguaggio di Torricelli delle *Lezioni accademiche*, pubblicate solo nel 1715, di cui si citano alcuni brani:

La gravità ne i corpi naturali è una fontana, dalla quale, continuamente scaturiscono momenti. Il nostro grave produce in ogni istante di tempo una forza di cento libre, adunque in dieci istanti, o per dir meglio in dieci tempi brevissimi produrrà dieci di quelle forze di cento libre l'una, se però si potessero conservare. Ma sin tanto che egli poserà sopra un corpo, che lo sostenga, non sarà mai possibile di aver l'aggregato delle forze, che desideriamo, tutte insieme; poiché subito quando la seconda forza, o momento nasce, la precedente è già svanita, o per così dire è stata estinta dalla contrarietà repugnante del piano sottoposto, il quale nel medesimo tempo, in che nascono detti momenti, gli uccide tutti successivamente un dopo l'altro (Lezioni accademiche, pag. 588)

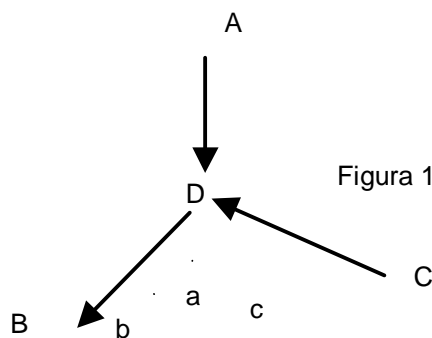
Aprasi la scaturigine della gravità. Sollevisi la palla grave in alto, in maniera tale che possa poi quando ella ricaderà all'ingù dimorare per l'aria dieci istanti di tempo, e per conseguenza generare dieci di quei suoi momenti. Io dico che detti momenti si conserveranno, e si aggregeranno insieme. Ciò è manifesto per l'esperienza continua de i gravi cadenti, e del moto accelerato; vedendosi che i gravi dopo le cadute hanno maggior forza, che non avevano quiescenti (Lezioni accademiche, pag. 559).

Quella che per Angiulli è l'azione, per Torricelli è il momento totale, fornito dall'accumulo di momenti elementari [equivalenti alla potenza] uguali ciascuno al suo momento proprio [il peso]. Il momento totale diventa infinito perché gli istanti contenuti in un qualsiasi intervallo di tempo sono infiniti e il momento elementare si replica in ogni istante.

Dopo la presentazione in generale della potenza e della sua azione, nel libro di Angiulli seguono alcune definizioni relative alle potenze, utili per l'introduzione del *principio delle azioni*, che verrà riferito nel paragrafo successivo. Un concetto fondamentale per Angiulli è il *centro della potenza* P. Questo è concepito come quel punto, considerato *fisso*, da cui si assume che origini la potenza stessa. Per esempio nel caso della forza di gravità il centro della potenza è il centro della Terra; nel caso di una forza di contatto il centro coincide o con il punto di contatto o con un'estremità dell'agente materiale che esercita l'azione, come potrebbe essere un'asta o una fune. La congiungente il centro della potenza con il suo punto di applicazione si chiama *direzione della potenza*. Inoltre lo *spazio di accesso* e lo *spazio di recesso* sono quelle quantità di cui il punto D di applicazione della potenza si allontana o si avvicina dal centro P.

Nella figura 1 [Angiulli; Fig. II] sono riportate a titolo di esempio tre potenze, AD, CD e DB, di centri A, B e C rispettivamente, applicate nel punto D con il verso indicato. Supposto che D si sposti in a, la distanza Da è lo spazio di recesso per la potenza in A, la distanza Db è lo spazio di accesso per la

potenza in B e la distanza  $Dc$  è lo spazio di recesso per la potenza in C. Se si assumono spostamenti piccoli gli spazi di accesso o di recesso coincidono con le proiezioni dello spostamento nella direzione della potenza.



### 3 IL PRINCIPIO DELLE AZIONI

Nella sua definizione di azione della potenza, Angiulli ha voluto lasciare indefinito un aspetto importante: non ha specificato come debbano essere contati gli impulsi; egli sostiene che non si possa dire a priori se gli impulsi della potenza vengano replicati in ragione dello spazio o del tempo<sup>4</sup>. Se si indica con  $f$  la misura della potenza, indicata con  $x$  la variabile spazio o tempo, la misura dell'azione nel linguaggio degli infinitesimi è data, secondo Angiulli, da  $\int f dx$ ; dunque  $f dx$  è l'azione infinitesima per  $dx \neq 0$  ed è la potenza per  $dx=0$ .

L'indecisione tra spazio e tempo non è dovuta solo a una necessità di obiettività, ma ha anche un'altra origine; la definizione di azione della potenza di Angiulli, per sua stessa ammissione, non è originale ma si rifà a quella del libro di Vincenzo Riccati (Riccati; 1749) dove è presente la stessa problematica della scelta. Vincenzo Riccati, introduce la potenza e l'azione della potenza in modo formalmente analogo ad Angiulli, ma attribuisce a esse un diverso stato ontologico. La potenza di Riccati è la forza newtoniana che agendo produce direttamente il cambiamento del moto di un corpo. L'azione della potenza è ancora un aggregato di impulsi, ma questo aggregato va considerato semplicemente come una grandezza matematica associata. In questo senso puramente matematico è lecito considerare sia  $f ds$  sia  $f dt$  come ugualmente rappresentativi dell'azione infinitesima. La scelta dell'una o dell'altra possibilità è affidata alla maggiore o minore utilità per stabilire le leggi dell'equilibrio. Per Angiulli invece la potenza è la forza morta. Gli impulsi a essa associati sono ipostatizzati: essi sono generati e distrutti e si accumulano solo quando non sono distrutti. Con il loro accumulo, che rappresenta l'azione della potenza, generano la forza viva che [essa e non l'azione della forza newtoniana, come per Riccati] è responsabile del cambiamento del moto. Come leibniziano Angiulli avrebbe dovuto scegliere immediatamente tra  $dt$  e  $ds$ , lo spazio e identificare l'azione con il lavoro; l'azione infinitesima con il lavoro infinitesimo<sup>5</sup>. Egli è però condizionato dall'approccio di Riccati sul dare a priori uguale dignità allo spazio e al tempo per contare gli impulsi della potenza.

Prima di sciogliere la riserva se misurare le repliche dell'impulso della potenza nello spazio o nel tempo, Angiulli affronta il problema di definire un criterio per l'equilibrio, pervenendo alla conclusione che esso è fornito dall'uguaglianza delle azioni [infinitesime].

Comincia col constatare che il criterio dell'equilibrio per essere metafisicamente ben fondato, deve basarsi su una qualche uguaglianza, mancando la quale scaturisce il moto. Nell'esaminare le varie

possibilità, Angiulli scarta subito il criterio che per l'equilibrio assume l'uguaglianza delle potenze. Pur desiderabile, essendo ben fondato metafisicamente, esso non è generalmente verificato empiricamente; per esempio l'equilibrio della bilancia con braccia diverse si realizza con due potenze diverse tra loro. Poi critica l'impostazione degli *Antichi Meccanici*, che avevano posto come fondamento dell'equilibrio l'uguaglianza dei momenti (intesi da lui in senso moderno di prodotto della forza per il braccio). Essa non fornisce una spiegazione causale, in quanto i momenti non hanno una realtà fisica:

“Sicché col dire degli Antichi, che la causa degli equilibri consiste nell'uguaglianza de' momenti, non altro sembran aver detto, che l'equilibrio dipende dall'uguaglianza di quelle quantità, dall'uguaglianza delle quali l'equilibrio dipende” [Angiulli; 15, XVIII].

si ricade quindi in una petizione di principio. Siccome l'uguaglianza dovrà riguardare in qualche modo le potenze, conclude che non resta altro se non considerare le azioni e definire l'equilibrio come conseguenza dell'uguaglianza di azioni uguali e contrarie delle potenze. Allora, se le azioni che sono le cause sono impedite, sono impediti anche gli effetti e cioè i loro moti; e allora i corpi sono in equilibrio:

“L'equilibrio nasce da ciò, che le azioni delle potenze, che equilibrar si devono, se nascessero, sarebbero uguali, e contrarie; e perciò l'uguaglianza, e la contrarietà delle azioni delle potenze è la vera causa dell'equilibrio” [Angiulli; 16, XIX]. “L'equilibrio non è altro, che l'impedimento de' moti, cioè degli effetti dell'azione delle potenze, a cui non è meraviglia se corrisponde l'impedimento delle cause, cioè delle azioni stesse” [Angiulli; 17, XXI].

Per spiegare quanto riportato in questo brano, Angiulli precisa ulteriormente che l'equilibrio delle azioni delle potenze non deve considerarsi causa in senso stretto dell'equilibrio. Ciascuna azione da sola sarebbe causa di un moto; se c'è una uguaglianza tra azioni contrarie, c'è anche un'uguaglianza tra i moti possibili e quindi non c'è moto e quindi c'è equilibrio. Se le potenze cominciano ad agire, e “*se nel procinto del nascere* [18, XII]” le azioni sono uguali tra loro, allora il moto sarà impossibile, se esse invece sono differenti, l'azione minore non potrà impedire alla maggiore di compiere il suo effetto e si avrà il moto. Pertanto, conclude Angiulli, il criterio generale dell'equilibrio è contenuto nel seguente teorema:

“Quindi stabiliamo un principio, cioè un criterio generale per conoscere quando tra le potenze succeder debba l'equilibrio, ed egli è quello che si contiene nel seguente teorema: *Le potenze saranno in equilibrio qualora trovansi in tali circostanze, che se nascesse un moto infinitesimo, le di loro infinitesime azioni sarebbero uguali.* E tal principio deve aver luogo in tutti gli equilibri....” [Angiulli; 18, XXI].

Si noti la presenza nell'ultima citazione del termine *infinitesime* la cui introduzione è fondamentale per pervenire a una corretta formulazione del criterio moderno di equilibrio<sup>6</sup>.

Angiulli qualifica con il termine di teorema il suo enunciato in quanto ritiene di averlo dimostrato con considerazioni di carattere metafisico<sup>7</sup>. Egli seguita cercando di portare altri argomenti a favore del principio delle azioni, che per il momento è ancora affatto generale, non specificato nella sua misura. Il principio non *solo somministra un metodo generale per esaminare l'equilibrio, ma è anche il vero modo con cui gli equilibri stessi si vanno a stabilire* [19, XXII]. Infatti, egli spiega, si supponga di mettere una palla tra due piani inclinati contrapposti [19, XIII]; appena essa viene posata non si troverà in equilibrio, ma non esistendo in natura corpi assolutamente rigidi, i piani inclinati cederanno alla pressione della palla, e forniranno una reazione elastica, la cui azione è contraria alla gravità della palla. Seppure il cedimento può considerarsi infinitesimo, le potenze danno luogo ad azioni, le quali essendo uguali e contrarie si impediscono scambievolmente e fanno sì che la palla resti in equilibrio [19, XIII].

---

Con le considerazioni appena riportate Angiulli sta cercando di dare un significato fisico alla forza morta che, se non si ammettesse la possibilità di un cedimento dei vincoli<sup>8</sup>, potrebbe rimanere oscuro, una mera finzione.

#### 4 LA MISURA DELLE AZIONI

Finalmente Angiulli passa a risolvere il problema della misura concreta dell'azione della potenza, a decidere cioè se gli impulsi della potenza si replicano nello spazio o nel tempo. Angiulli riconosce a questo punto che questa scelta è oggetto di quella disputa tra i cartesiani e i leibniziani, che in Italia era ancora viva ai suoi tempi:

Perché la celebre controversia delle forze vive, che consiste nel definire se quelle si debbano misurare per la massa moltiplicata per la velocità, oppure per la massa moltiplicata per il quadrato della velocità stessa, riducesi a quest'altra questione, cioè se l'azione della potenza debba essere proporzionale al tempo piuttosto che allo spazio [Angiulli; 22, XXV].

Che il problema della scelta della misura delle azioni condizioni la scelta della misura delle forze vive, è giustificato poi da Angiulli asserendo che esistono due modi di misurare la forza viva: o misurandone la causa, che è l'azione, o misurandone l'effetto, che è il cambiamento di velocità. Siccome le cause e gli effetti devono essere proporzionali, il modo di valutazione delle une si rifletterà sulle altre. Se si dimostra che l'azione della potenza va misurata con lo spazio si dimostra anche che la forza viva si misura con il quadrato della velocità; questo perché, per le leggi del moto stabilite da Galileo<sup>9</sup>, la potenza moltiplicata per lo spazio è proporzionale alla massa moltiplicata per il quadrato della velocità.

Le argomentazioni con cui Angiulli perviene poco dopo a quella che lui considera la corretta misura dell'azione della potenza, sono solo parzialmente convincenti. Egli dice che l'azione della potenza non può ottenersi combinando la potenza con il tempo perché se in un sistema in equilibrio si concepisce un moto infinitesimo, è chiaro che tutte le potenze si muoveranno per quello stesso tempo infinitesimo che si ammette duri il moto. Se quindi l'azione della potenza si misurasse sul tempo, essendo le azioni proporzionali al tempo e alla potenza ed essendo i tempi gli stessi per tutte le azioni, le azioni sarebbero proporzionali alle potenze e il criterio dell'uguaglianza delle azioni coinciderebbe con quello dell'uguaglianza delle potenze. Ciò non è però ammissibile perché l'uguaglianza delle potenze non è un criterio di equilibrio valido universalmente, come argomentato in precedenza; pertanto, sostiene Angiulli, si deve combinare la potenza con lo spostamento (ottenendo così il lavoro):

“Non potendosi dunque l'azione della potenza misurare per la potenza moltiplicata pel tempo, uopo è rivolgersi allo spazio. In tutti gli equilibri conosciuti si trova vero, come si vedrà nei seguenti capitoli, che facendosi un moto infinitesimo, le potenze sono in ragion reciproca de' loro rispettivi spazietti d'accesso, o di recesso dal centro delle potenze stesse...” [Angiulli; 25, XXVIII]. “Sicché se l'azione della potenza si misurerà per la potenza moltiplicata per lo spazio, per cui la potenza agendo trasporta il corpo, facendolo avvicinare fino al centro, o dal centro facendolo allontanare, si salverà negli equilibri l'uguaglianza tra le minime azioni delle potenze.... Dunque l'azione della potenza dee veracemente misurarsi per la potenza moltiplicata per lo spazio secondo il metodo dei Leibniziani” [Angiulli; 25-26, XXVIII].

Angiulli ritiene di avere mostrato in questo brano che la misura dell'azione come prodotto della potenza per lo spazio è una conseguenza *metafisicamente certa*, ricavata con *esatto raziocinio* dalle premesse. Nel brano, però si affermano due cose che sicuramente non sono chiare e certe a priori; cioè che le potenze debbano essere moltiplicate per gli spostamenti (e non per il loro quadrato, per esempio) e che tali spostamenti coincidono con gli spazi di accesso e recesso già introdotti.

L'enunciato operativo del criterio di equilibrio è allora il seguente *teorema* (il termine è di Angiulli):

---

“Le potenze sono in equilibrio, qualora trovansi in tali circostanze costituite, che facendosi un moto infinitesimo, onde alcune potenze si avvicinino al suo centro, alcune altre dal suo centro si allontanano, la somma dei prodotti positivi delle potenze moltiplicate per gli rispettivi spazietti d’accesso o di recesso, sia uguale allo somma de’ simili prodotti negativi” [Angiulli; 28, XXXI]

Con una scelta che appare discutibile a un lettore, chiamerà poi il teorema sopra dimostrato con il nome di *principio delle azioni*. Il criterio dell’uguaglianza delle azioni è quindi considerato da Angiulli come un teorema, se visto da un punto di vista metafisico; come un principio, se visto da un punto di vista puramente meccanico, in quanto non deducibile da altre leggi della meccanica.

## 5 LA FILIAZIONE LEIBNIZIANA

Dopo la sua “dimostrazione”, Angiulli può finalmente schierarsi nella famosa disputa tra cartesiani e leibniziani sul modo di misurare la forza viva, dichiarandosi leibniziano:

Dunque sembra potersi con tutta sicurezza concludere essere stati i leibniziani più fortunati dei cartesiani nella celebre controversia della vera misura delle forze vive. Poiché riducendosi, come si è detto, la questione della vera misura delle forze vive a quella della vera misura dell’azione della potenza, ed essendosi già ad evidenza della natura dell’equilibrio dimostrato, che deve l’azione della potenza misurarsi per lo spazio ..... è manifesto che la forza viva, che è l’effetto dell’azione della potenza, misurarsi deve per la massa misurata per il quadrato della velocità [Angiulli, 26, XXIX].

Angiulli poco dopo sostiene anche che con le sue argomentazioni ha dato una prova inconfutabile del fatto che le forze vive si misurano con il quadrato della velocità; prova più convincente anche di quelle fornite da Leibniz (*Essay de Dynamique*, 1692) e Bernoulli (*Discours sur la loix de la communication de mouvements*, 1724).

Il principio delle azioni, continua successivamente, non sembra punto differire dal principio delle velocità virtuali di Jean Bernoulli (che risale al 1717) di cui cita in francese solo la sintetica definizione del 1724 (Bernoulli, 1724), che si riporta in lingua italiana:

Due agenti sono in equilibrio, o hanno dei momenti uguali, quando le loro forze assolute sono in un rapporto reciproco delle loro velocità virtuali; sia che le forze che agiscono le une sulle altre siano in moto o in quiete.

Chiamo velocità virtuali, quelle che due o più forze in equilibrio acquistano, quando si impone un movimento; o se queste forze sono già in moto. La velocità virtuale è l’elemento di velocità che ciascun corpo guadagna o perde, di una velocità già acquisita, in un tempo infinitamente piccolo, secondo la sua direzione (Bernoulli, Opere; pag. 23).

Essendo le velocità virtuali proporzionali agli spazi di accesso o di recesso infinitesimi, il principio di Bernoulli, constata Angiulli, sembra esattamente coincidente con il suo. Egli però non dichiara di essersi rifatto a Bernoulli, ma piuttosto a Galileo, Cartesio, Borelli e ad altri *sublimi meccanici*.

La posizione di Angiulli non va vista come un disconoscimento dei meriti e della priorità di Bernoulli, va vista piuttosto come la coscienza che il suo principio delle azioni è una delle possibili espressioni del principio dei lavori virtuali, alla cui formulazione ha grandemente contribuito la scuola italiana; visto che Angiulli si occupa dei fondamenti è giusto che egli si richiami più a Galileo che a Bernoulli, perché Galileo ne *Le meccaniche* e nei *Discorsi sulle cose che stanno in su l’acqua ...* si era occupato di concetti basilari del principio dei lavori virtuali<sup>10</sup>, mentre Bernoulli ha contribuito principalmente al suo perfezionamento, riconoscendo la natura infinitesimale dello spostamento virtuale<sup>11</sup>.

Anche Vincenzo Riccati nel suo *Discorso*, confronta il principio dell'uguaglianza delle azioni con il principio delle velocità virtuali di Bernoulli, egli è più preciso e fa riferimento alla versione riportata estesamente da Varignon (Varignon, 1725), in cui la similitudine tra i due principi appare più evidente:

Solamente io avvertirò che il famoso teorema dell'incomparabile Giovanni Bernoulli, il quale è stato dimostrato in tutte le macchine dal dottissimo sig. Varignon, non è altro che una conseguenza dell'uguaglianza delle azioni contrarie, che è necessaria in ogni equilibrio. Il teorema Bernoulliano è il seguente. In ogni equilibrio di quante e quali potenze si vogliano, in qualunque maniera applicate, e agenti per qualsiasi direzione, la somma delle energie positive è uguale alla somma delle energie negative, purché come affermative si prendano. Per nome d'energia il sig. Bernoulli altro non intende se non se il prodotto della potenza e della velocità virtuale della stessa potenza; la quale sarà positiva, se seguita la direzione della potenza, sarà negativa, se seguita la direzione opposta. E chi è che non veda, che la velocità virtuale della potenza è proporzionale allo spazio, per cui il corpo, o la potenza si avvicina al centro delle forze; ovvero se le potenze siano corde elastiche alla contrazione o diffrazione delle corde. Dunque l'energia bernoulliana è la stessa, o almeno proporzionale a quella che per noi chiamasi azione della potenza (Riccati, 1749; pag. 237) [nota: la velocità virtuale di Bernoulli è la componente dello spostamento infinitesimo ( $ds$ ) del punto di applicazione della forza ( $f$ ) nella sua direzione; l'energia è il prodotto interno  $f \times ds$ , cioè il lavoro virtuale].

Oltre al diverso modo di esposizione, ci sono differenze importanti tra l'approccio di Angiulli (e di Riccati) e quello di Bernoulli. Angiulli presenta il principio delle azioni come il fondamento della Statica. Inoltre per superare le difficoltà che, in presenza di vincoli, incontra a considerare l'azione come prodotto della potenza per il tempo, è condotto a misurare l'azione come prodotto della potenza per gli spostamenti ammissibili con i vincoli. Bernoulli, presenta il principio delle velocità virtuali solo come un corollario dell'equilibrio (una sua condizione necessaria), e sembra considerare anche spostamenti non compatibili con i vincoli, per lo meno secondo Varignon.

## 6 IL PRINCIPIO DELLE AZIONI COME FONDAMENTO DELLA STATICA

Angiulli prosegue facendo vedere l'utilità del principio delle azioni per risolvere problemi e nel contempo dimostrando, come aveva anticipato, che esso funziona in *tutti gli equilibri conosciuti*; da questa conferma scaturirà la definitiva dimostrazione della validità del principio. Vale la pena di notare, come già fatto da Corradi (1985), che Angiulli non si accontenta, come invece fa Riccati, di verificare il suo principio con la legge della leva<sup>12</sup>. Anzi egli afferma, in modo coraggioso, che la legge della leva non è universalmente valida (come ritenuto dalla maggioranza dei meccanici del tempo); per esempio essa non si applica nella carrucola mobile e nei fluidi. Poiché il principio delle azioni funziona sempre, esso è superiore a quello della leva. Inoltre, secondo Angiulli, la legge della leva è solo una legge di carattere empirico, negando egli la validità delle dimostrazioni di Archimede, Galileo, Stevin ecc.; mentre invece (per lui) il principio delle azioni è ben fondato metafisicamente.

Dopo queste considerazioni Angiulli conclude però in modo un po' sorprendente:

“Si noti in secondo luogo, che facendosi comparazione tra il principio dell'equivalenza, e quello delle azioni, debbono amendue stimarsi egualmente fecondi, ed estesi, con quella lor differenza, che in alcun casi con maggiore facilità, ed eleganza si adopra il principio dell'equivalenza, in altri casi è più comodo, ed opportuno l'adoperare il principio delle azioni.”

“E' finalmente con attenzione da notarsi, che il metodo della composizione, e risoluzione delle forze [la regola del parallelogramma] non è il vero metodo della natura, ma è un metodo che si han formato i Geometri per la più facile e spedita solutione de' lor problemi. La natura nelle sue opere non va giammai a comporre, e risolvere le forze, ma adopera sempre azioni, le quali essendo uguali, e contrarie, fan sì, che si producano gli equilibri. ....” [Angiulli; 63-64, LXV-VI].



Pertanto egli rinuncia in parte alla pretesa di far del principio analitico dell'uguaglianza delle azioni il cardine di tutta la statica ritenendo, ingiustamente, come poi mostrerà Lagrange, che in pratica è spesso conveniente l'approccio geometrico basato sulla tecnica della composizione e scomposizione delle forze, sviluppata da poco da Varignon. Non rinuncia però ad attribuire al principio delle azioni il pregio di essere il principio generale da cui possono ricavarsi tutti i metodi di soluzione dei problemi statici, che assumono così una mera valenza algoritmica.

## 7 CONCLUSIONI

Il libro di Angiulli appare in un periodo in cui in Italia cominciano ad affermarsi le teorie newtoniane della Meccanica. Angiulli non accetta l'innovazione; ciò però non è un inconveniente in quanto, ponendosi in competizione con la meccanica newtoniana, sviluppa con lucidità una formulazione del principio degli spostamenti virtuali straordinariamente simile a quella moderna e fonda la Statica su una base alternativa a quella offerta dalla meccanica newtoniana.

Angiulli riprende il concetto di azione sviluppato da Vincenzo Riccati nel *Dialogo di Vincenzo Riccati della Compagnia di Gesù ...*. L'esame dei testi potrebbe far pensare che egli, già studente di Riccati, abbia in gran parte copiato dal maestro. In realtà il discorso è più complesso; entrambi conoscono i lavori di Leibniz e Bernoulli e cercano, ciascuno a modo suo, di adattare le nozioni della scuola dinamica italiana (che aveva visto in Giovanni Alfonso Borelli, 1608-1679, l'ultimo grande rappresentante) a quelle sviluppate in ambito europeo; in particolare a quelle di Jean Bernoulli che sono le più conclusive e le più vicine alle concezioni di Torricelli e Borelli.

Il linguaggio dei due studiosi italiani è profondamente diverso; Angiulli si colloca più direttamente nella scia dell'Accademia del Cimento e mostra come con l'uso delle concezioni lì sviluppate sia possibile pervenire ad una formulazione dinamica corretta dei principi della statica. A differenza di Riccati, Angiulli è sostanzialmente un leibniziano e i concetti di forza morta e forza viva, introdotti prima da Leibniz e poi adottati da Jean Bernoulli (Bernoulli, 1724), sono essenziali per lo sviluppo del suo concetto di azione che ricalca solo formalmente quello del maestro. Angiulli, ha più coraggio di Riccati e lo precede nel dichiarare esplicitamente il principio delle azioni, cioè il principio dei lavori virtuali, come il fondamento della Statica, però considera la legge della leva e la legge della composizione e scomposizione delle forze (regola del parallelogramma) come criteri di fatto più utili nella pratica. Egli non possiede ancora il concetto di spostamento ammissibile nella sua accezione generale, né si rende conto della versatilità che il principio delle azioni possiede, che di fatto nelle applicazioni lo rende oggi generalmente preferibile a qualunque altro metodo. Qualche anno più tardi Luigi Giuseppe Lagrangia (Lagrange), con la sua *Mecanique Analytique* (1788), completerà lo sviluppo del principio dei lavori virtuali, ponendolo a fondamento dell'intera meccanica e mostrandone la straordinaria versatilità.

RINGRAZIAMENTO: Ringrazio il professor Antonino Drago per l'incoraggiamento e i consigli ricevuti durante la stesura dell'articolo.

## Bibliografia

- Angiulli Vincenzo, *Discorso Intorno agli Equilibri*, Stamperia Simoniana, Napoli, 1770.
- Bernoulli Jean, *Du discours sur le loix de la communication du mouvement*, in Opera Omnia, cap. I, Losanna, 1742.
- Borelli Giovanni Alfonso, *De motu Animalium*, Roma, 1680-1 [Citato in Westfall, 1982; pag. 280].
- Cartesio Renato, *Lettera a Mersenne del 12 settembre 1638*, in Ouvres de Descartes, a cura di Adam e Tannery, Parigi, 1996.

- Capecchi Danilo, *Il Principio dei Lavori Virtuali da Aristotele a Bernoulli*, Luda Editore, Napoli, 1999.
- Casini Paolo *Newton in Italia 1700-1740*, in *Newton e la coscienza europea*, Il Mulino, Bologna, 1983.
  - Corradi Massimo, I principi della meccanica secondo Vincenzo Angiulli, *Atti del Convegno: Il Meridione e Le Scienze*, Palermo, Maggio 1985.
  - Galilei Galileo, *Le Meccaniche*, in *Opere*, vol. III, Adriano Salani, Firenze, 1935.
  - Galilei Galileo, *Discorsi intorno alle cose che stanno in sù l'acqua e scritture varie*, in *Opere*, vol. V., Adriano Salani, Firenze, 1935.
  - Dal Monte Guidobaldo, *Le Meccaniche dell'illustriss. Sig. Guido Ubaldo de' marchesi del Monte*, tradotto da Filippo Pigafetta, edito da Evangelista Deuchino, Venezia, 1615.
  - Indorato L. e Nastasi P., *Riccati's proof of the parallelogram of forces in the contest of the vis viva controversy*, *Physis*, 1990, pagg. 751-767.
  - Leibniz Gottfried Wilhelm, *Essay de Dynamique*, 1692, in P. Costabel: *Leibniz et la dynamique en 1692*, Hermann, Parigi, 1960.
  - Leibniz Gottfried Wilhelm, *Specimen Dynamicum*, 1695, A cura di Antonino Drago, 1999.
  - Mach Ernst, *La Meccanica nel suo Sviluppo Storico*, Boringhieri, Torino, 1992.
  - Minieri-Riccio Camillo, *Notizie biografiche degli scrittori napoletani fioriti nel XVIII secolo*, Hoepli, Milano, 1875.
  - Riccati Vincenzo, *Dialogo di Vincenzo Riccati della Compagnia di Gesù dove ne' congressi di più giornate delle forze vive e dell'azioni delle forze morte si tien discorso*, Stamperia di Lelio dalla Volpe, Bologna, 1749.
    - Riccati Vincenzo, *De' Principi della Meccanica*, Stamperia Coleti, Venezia, 1772.
    - Riccardi Pietro, *Biblioteca matematica italiana*, Milano, Gorlich, 1952.
    - Torricelli Evangelista, *Lezioni Accademiche* (1715), in *Opere scelte*, UTET, Torino, 1975.
    - Varignon Pierre, *La Nouvelle Mecanique ou Statique*, Claude Joubert, Parigi, 1725.
    - Westfall Richard S., *Newton e la Dinamica del XVII Secolo*, Il Mulino, Bologna, 1982

#### NOTE

<sup>1</sup> Dipartimento di Scienza delle Costruzioni Università di Napoli Federico II

<sup>2</sup> Galileo Galilei lo fa nella giornata aggiunta dei *Discorsi*. Egli si prefigge di misurare l'efficacia dell'impatto di un corpo A che cade su un corpo B per mezzo di una forza statica che produce lo stesso effetto. Perviene alla conclusione che i due tipi di forza sono incommensurabili.

<sup>3</sup> Se sia vera l'una o l'altra posizione era oggetto di disputa tra cartesiani e leibniziani; Angiulli non si è ancora schierato apertamente leibniziano, così lascia in sospeso la cosa. Torricelli, nel brano sopra riportato, somma nel tempo.

<sup>4</sup> Secondo Leibniz, il lavoro infinitesimo  $fds$  fornisce la forza morta (potenza) per  $ds=0$  e si trasforma in forza viva per  $ds \neq 0$ . quindi il lavoro è naturalmente la misura dell'azione della forza morta (*Specimen dynamicum*, 1695).

<sup>5</sup> L'introduzione dello spostamento virtuale infinitesimo sarà proprio il contributo principale di Jean Bernoulli al principio dei lavori virtuali.

<sup>6</sup> Senza entrare nel merito della validità della deduzione, bisogna notare che egli ha fatto riferimento anche all'informazione di carattere empirico secondo cui l'uguaglianza delle potenze non è sempre un criterio valido per l'equilibrio.

<sup>7</sup> In realtà, se il cedimento deve essere infinitesimo, la rigidità dei supporti deve essere infinitamente grande; qui interviene l'idea dei corpi elastici di rigidità infinita, dovuta a Jean Bernoulli, che come Leibniz pensava che non potessero i corpi perfettamente duri.

<sup>8</sup> Naturalmente Galileo non ha fatto mai esplicito riferimento alle diverse possibilità di misura delle azioni. Il riferimento allo scienziato pisano è motivato dalle leggi di questi che stabiliscono la proporzionalità della velocità  $v$  con il tempo  $t$  e del quadrato della velocità con l'altezza di caduta  $h$ . In termini moderni,  $v = gt$  e  $v^2 = 2gh$ .

<sup>9</sup> Questo principio in Galileo era basato sulla dinamica aristotelica, ed era nella forma delle velocità virtuali invece che degli spostamenti.

<sup>10</sup> Bernoulli nei suoi scritti non dà nessuna motivazione al suo principio ma si limita a enunciarlo, senza dargli nemmeno tanta enfasi.

<sup>11</sup> Vincenzo Riccati nel suo *Discorso* considera sia il caso della leva cui sono applicate potenze con centro all'infinito (pesi), sia il caso in cui il centro delle potenze è a distanza finita. Fa poi osservare che in entrambi i casi il principio delle azioni fornisce un risultato coerente con le osservazioni sperimentali e in linea con la legge dei momenti; dunque il principio delle azioni è verificato.

<sup>12</sup> Coerentemente anche alla posizione espressa da Mach (*La meccanica nel suo sviluppo storico*, 1992; pag. 47), e oggi prevalente.