Antonino Drago[1]

IL PRINCIPIO DI D'ALEMBERT NON E' UN PRINCIPIO. SUA RELAZIONE COL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

RIASSUNTO. In tutti i libri di testo di Meccanica razionale e di Meccanica teorica si parla del "Principio di d'Alembert". Ma già alcuni storici (Truesdell, Szabo, Fraser, Hankins) hanno rilevato che questo principio è oscuro; esso pone molti problemi interpretativi che non sono stati ancora risolti. Qui prima si rimarcano le sue differenze con quanto espongono di solito gli storici; questo "Principio": 1) è stato enunciato da d'Alembert solo per il caso dell'urto (e non per i fenomeni che variano con continuità); 2) è stato da lui posto come problema e come metodo di soluzione di quel problema; 3) è stato enunciato nei "moti", che debbono essere intesi come velocità per unità di massa (e non come variazioni di quantità di moto o accelerazioni; e senza il concetto di forza, che d'Alembert rifiutava); 4) contrariamente a quanto si scrive comunemente, d'Alembert non è affatto "razionale" nell'esporre la sua teoria meccanica (in particolare propone i suoi principi ambiguamente, basandoli soprattutto sul principio di ragione sufficiente); 5) applica il suo famoso principio a casi fisici che sono di difficile interpretazione, perché sono complessi, compie calcoli infinitesimali in maniera primordiale, si riferisce all'idea sorpassata di corpo perfettamente duro, usa surrettiziamente il principio dei lavori virtuali.

I rilievi critici degli storici precedenti vengono passati in rassegna e analizzati anche alla luce di una nuova comprensione del principio dei lavori virtuali. In precedenti comunicazioni è stata sottolineata la confusione di due secoli sul ruolo teorico del principio dei lavori virtuali; di esso è stata dimostrata per la prima volta la indipendenza dai principi di Newton (in particolare dal secondo). Questa confusione giustifica in gran parte la incapacità degli autori precedenti nel distinguerlo con chiarezza dal "Principio di d'Alembert" (benché di fatto venga incluso nelle applicazioni di quest'ultimo principio).

Si conclude che il cosiddetto "Principio di d'Alembert" è solo un tentativo di D'Alembert di sfruttare un nuovo tipo di rapporto fisica-matematica, il rapporto con l'ancòra non nato calcolo vettoriale; al fine di giungere ad un principio dinamico che da una parte fosse alternativo al secondo newtoniano, e dall'altra astraesse dalle caratteristiche "contingenti" (lavoro, spostamenti, origine storica da una regola pratica, ecc.) del principio dei lavori virtuali. Ma il tentativo è mal riuscito; e, se preso alla lettera, il principio riguarda la sola matematica, come nella generalizzazione di Lagrange; nel caso di moti continui, il Principio di d'Alembert funziona come Principio dei lavori virtuali.

1. Introduzione

In tutti i libri di testo di Meccanica razionale e di Meccanica teorica si parla del "Principio di d'Alembert" (= **PdA**). La illustrazione di questo principio non appare molto chiara, soprattutto perché esso, dai tempi di Lagrange, viene presentato attraverso una trasformazione formale che è misteriosa, perché, da sola, non può avere molto significato in Fisica:

da $F=ma$ si passa a $F-ma=0$;

in altre parole, si fa conto che a livello di principi un semplice passaggio formale dia un significato differente ai concetti fisici! Inoltre nelle applicazioni c'è ampia sovrapposizione tra questo "Principio" e il Principio dei lavori virtuali (= **PLV**), senza che i confini vengano indicati con precisione. Ad es. il testo di Sommerfeld (64-65) presenta ben tre versioni del PdA. Sulla prima, che coinvolge il passaggio precedente, dice che è "pesante" e che "non esprime esattamente il contenuto" del PdA. La seconda versione è proprio il PLV. L'ultima, chiamata "il PdA nella sua forma più semplice e naturale", di fatto è la seconda versione, ma riferendo la sommatoria alle sole forze, senza aggiungere gli spostamenti, che darebbero allora i lavori virtuali.

Chi voglia risolvere l'ambiguità risalendo alla storia di questo "Principio", va a spulciare libri di Storia della Fisica. Nel 1950 Dugas ha dato una sintesi della meccanica di d'Alembert attraverso estratti dei suoi testi; in questo modo egli non si è obbligato a verificare la coerenza interna della teoria meccanica di d'Alembert (cap. II, V, 234-243). Un secondo autore autorevole, Briggs, cambia radicalmente la valutazione tradizionale sul PdA;(112) questo non è un prinicpio, ma solamente una "regola" su come usare le leggi del moto stabilite in precedenza" da d'Alembert, le quali leggi sono molto diverse da quelli di Newton. In particolare Briggs afferma che questo principio è chiaro solo perché è simile al secondo di Newton; il che denota una sua volontà riduzionista, senza attribuzione di precisi contenuti al PdA.

[1] Gruppo di Storia della Fisica - Univ. "Federico II", Napoli - adrago@na.infn.it

Di solito ci si rivolge all'opera di Storia della Fisica, quella di Mach, che per lungo tempo è rimasta la più illustre. E infatti, la sua autorità è invocata dallo stesso Briggs. Ma Mach non chiarisce i contenuti di questo principio; anzi aumenta la varietà delle interpretazioni chiamandolo addirittura "teorema" e trovandone "tre versioni" (Mach, 348-349):

"Consideriamo un sistema di punti *M, M', M'',...* , comunque vincolati fra loro, a cui potrebbero essere applicate le forze *P, P', P'',...* (fig. 169) [è la figura di una semplice scomposizione vettoriale secondo un parallelogramma, ripetuta tre volte], che imprimerebbero a punti liberi dei movimenti determinati. Ai *punti vincolati* sono impressi invece movimenti diversi, quali potrebbero essere prodotti dalle forze *W, W', W'',...* .

Cominciamo con lo scomporre le forze *P, P', P'',...* rispettivamente in [due forze] *W* e *V, W'* e *V', W''* e *V''*, ecc.. Poiché, a causa dei vincoli, le componenti *W, W', W'',...* sono le sole che agiscano *realmente*, le forze *V, V', V'',...* si fanno *equilibrio* in virtù dei vincoli. Chiamiamo sistema di forze *applicate* le forze *P, P', P'',...* ; chiamiamo *W, W', W'',...* sistema delle forze che producono movimenti effettivi, o, più brevemente, sistema delle forze effettive; e *V, V', V'',...* , sistema delle forze guadagnate o perdute, o *sistema delle forze di vincolo*. Se scomponiamo le forze applicate in forze effettive e forze di vincolo, queste ultime si fanno equilibrio in virtù dei vincoli."

La seconda versione è la seguente (Mach, 349):

"Poiché il sistema *V, V', V'',...* , è in equilibrio, gli si può applicare il principio degli *spostamenti virtuali*. Si otterrà così un'altra forma del teorema di d'Alembert."

Segue la terza ed ultima versione (Mach, 349):

"Siano le forze *P, P', P'',...* , risultanti delle componenti *W, W', W''*,.., e *V, V', V'',...* Se facciamo agire le forze *-P, -P',...* insieme con *W, W'*.. e *V, V',...* si avrà equilibrio, ma poiché il sistema è di per sé in equilibrio, lo è anche il sistema *(-P,W)*, oppure il sistema (*P,-W*) (fig 170) [la solita figura del parallelogramma delle forze, alla quale è stato aggiunto il vettore *–P*]. Ciò significa che se alle forze applicate aggiungiamo le forze reali prese con segno contrario, sussiste equilibrio per effetto dei vincoli. Anche al sistema *P,-W* può essere applicato, come ha fatto Lagrange nella sua meccanica analitica, il principio degli spostamenti virtuali."

Notiamo che le formulazioni di Mach del PdA sono strane per diversi motivi.

Come primo motivo, notiamo che la terza versione esprime quella valutazione di una disuguaglianza formale che già criticavo all'inizio del paragrafo. Come secondo motivo, nel suo enunciato Mach non aderisce al concetto di d'Alembert di "moto", o "quantità di moto". Egli lo fa consapevolmente perché aggiunge: "Nell'esporlo ci siamo permessi una modificazione non essenziale là dove parliamo di forze invece che di quantità di moto prodotte dalle forze, che è l'espressione usata da d'Alembert nel *Traité de Dynamique* (1743)."(348-349) Mach dice che il cambiamento non è essenziale; dal contesto sembra che per lui la differenza di una derivata a questo livello non abbia importanza. Inoltre, in precedenza (262-263) egli aveva criticato radicalmente il concetto di forza newtoniano, ripetendo la tesi dello stesso d'Alembert, secondo cui *F=ma* è solamente una definizione di *F* e non un'equazione. Ciò appare incoerente.

Come terzo motivo e più importante, notiamo che nella prima versione di Mach si afferma come dato di fatto che le reazioni vincolari *V, V', V'',...* "si fanno equilibrio in virtù dei vincoli". Nella seconda versione e nella terza versione Mach ripete questa idea.

Questa affermazione di equilibrio del sistema delle forze *V* può essere accettata se ci si riferisse (in un sistema inerziale) ad un insieme di corpi non vincolati interagenti tra loro. In tal caso le forze perdute, per il principio di azione e reazione, si annullano a due a due; quindi si può ben affermare che SV_i=0.

Ma ciò non vale in generale se passiamo a corpi vincolati. Si noti che per definizione un vincolo ha massa infinita e quindi non si può muovere; inoltre non cambia affatto di forma (quindi non è elastico, nè plastico); cioè, è perfettamente duro. Su questi corpi, definiti con delle schematizzazioni limite, noi inventiamo in dinamica, sulla base di quello che vale in statica, delle reazioni vincolari; cioè attribuiamo al vincolo una forza perpendicolare alla superficie di contatto col vincolo in esame, uguale e contraria a quella che il corpo in esame esercita su di esso, in modo da far valere il principio di azione e reazione localmente sui singoli punti di contatto; senza che gli effetti di questa forza di reazione si manifestino altrimenti che per l'effetto per cui è stata inventata. Ma non c'è nulla che ci dica, anche nel caso di un solo vincolo fisso che reagisce a più corpi, se le sue reazioni hanno sempre somma nulla (neanche se ne sente il bisogno, tanto la sua massa è infinita; ogni squilibrio di forze non avrebbe effetti accelerativi). E' facile dare un controesempio; su un punto fisso vanno ad urtare un corpo elastico da destra ed uno plastico da sinistra, ognuno con massa uguale a m e velocità v. Ora se il corpo è plastico, la reazione vincolare è, in un intervallo di tempo Dt che include l'istante dell'urto, $Dmv/Dt=mv/Dt$; se invece è elastico, la reazione è doppia: $2Dmv/Dt=mv/Dt$. In totale la somma delle reazioni vincolari è pari a $mv/Dt\neq 0$. Tantomeno vi è qualcosa che ci dica se, nel caso di un sistema complesso, sia zero la somma delle reazioni vincolari che vengono fornite da alcuni vincoli, che possono ben essere del tutto scollegati tra loro. In effetti, il bilancio delle reazioni vincolari è solo locale; tentare un bilancio globale su tutti i vincoli, anche se staccati, tale da dare un risultato universale è seguire la metafisica alla quale si è aperta la porta inventando le reazioni vincolari. L'unica cosa possibile invece è confinare quella metafisica alla quale siamo costretti dalla mancanza di dati sperimentali diretti sulle reazioni dei vincoli; e cioè, affermare un principio di realtà sui vincoli: essi non possono produrre lavoro positivo; il che è il contenuto essenziale del PLV.

Quindi questa presentazione del "teorema" di d'Alembert, pur così famosa e ripetuta da tutti appare errata: non siamo autorizzati a pensare che la somma delle reazioni vincolari si annulli in generale. Casomai è il lavoro delle reazioni vincolari che non può essere positivo; il che è il nocciolo del contenuto fisico del PLV.

Come quarto motivo, la applicazione del PdA di Mach solleva la domanda: qual'è il legame che Mach vede tra il PdA e il PLV? E' facile notare un passaggio illegittimo di Mach da una equazione alla successiva (349-350):

"Si ha dunque

$V=P-W, \qquad V'=Q-W,'$

ed essendo le forze V, V',.. in equilibrio, ne segue $VR=Vr$."

In questo passaggio Mach deduce da $SV_i =0$ la formula $SV_ir_i=0$.

Lo stesso appello al PLV avviene in un secondo esempio di applicazione del "teorema" (351). In realtà, ammessa e non concessa la premessa (che in precedenza ho contestato); casomai è il PLV, $SV_ids_i=0$, la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio $SV_i=0$; ma se e solo se gli spostamenti sono infinitesimi. Nella formula di Mach invece non ci sono grandezze infinitesime, dalla prima non segue la seconda uguaglianza: una somma nulla non lo è più se viene pesata arbitrariamente. (Non a caso Sommerfeld inverte l'ordine di presentazione: prima suggerisce che il PdA è il PLV e poi, giocando sulle parole, propone il PdA come l'annullarsi delle reazioni vincolari). D'altra parte, se le V fossero forze reali, le due relazioni sarebbero le equazioni di Eulero; le quali sono indipendenti tra loro: un corpo può ruotare senza spostare il suo baricentro..

Come quintomotivo, non si capisce il ruolo teorico attribuito da Mach al PdA. In un primo tempo Mach lo chiama "teorema"; ma nella sua presentazione non c'è nessun principio dal quale egli lo deduca. Quando poi lo commenta, lo chiama "schema" (353), il che aumenta l'oscurità sul suo ruolo teorico effettivo. Qui occorre ricordare che Mach cerca di ridurre tutti i principi della meccanica all'empirico, in accordo alla sua filosofia empiriocriticista; e alle volte egli forza le situazioni, presentando come "teoremi", o schemi, dei classici principi della meccanica. Queste forzature preconcette sono state già notate.(Maltese, 9-10) Quindi la sua dizione "teorema" sarebbe, detto eufemisticamente, un abuso di linguaggio.

In seguito, il suo commento filosofico non ci aiuta a capire meglio (353). Ma egli aggiunge una ulteriore nota, che chiarisce il suo punto di vista più profondo, quello sui fondamenti della meccanica:

"Quando risolviamo un problema con l'aiuto di questo teorema, non facciamo altro che servirci di conoscenze relative ai fenomeni di equilibrio, l'applicazione delle quali esso compendia. Se vogliamo però penetrare con perfetta chiarezza il fatto dinamico, cioè scoprire in esso i più semplici elementi meccanici già noti, dobbiamo compiere un altro passo in avanti e sostituire queste conoscenze sull'equilibrio con quelle newtoniane e huygesiane. Più precisamente seguendo Newton prenderemo in considerazione *moti accelerati*, dovuti a mutue relazioni dei corpi, seguendo Huygens prenderemo in considerazione direttamente i *lavori* da cui dipendono le forze vive. Quest'ultimo metodo di trattazione è particolarmente comodo, se ci si serve del principio degli spostamenti virtuali per formulare le condizioni di equilibrio del sistema *V* o *P-W*. Il teorema di d'Alembert stabilisce in questo caso che la somma dei momenti virtuali del sistema *V* o del sistema *P-W* è uguale a zero. Se i vincoli sono rigidi, il lavoro elementare delle forze vincolate è nullo. Tutti i lavori sono effettuati *dal sistema P*, e i lavori che si verificano nel sistema *W* debbono essere uguali a quelli del sistema *P*. Tutti i lavori *virtuali* - astrazione facendo dalle deformazioni dei vincoli -, provengono da forze applicate. Come si vede, il teorema di d'Alembert espresso in questa forma non è molto diverso da quello delle forze vive."

In questa nota Mach riporta il PdA, inteso come principio di equilibrio, ai due concetti basilari, corrispondenti alle due diverse fondazioni della meccanica, che egli evidentemente considera primarie: o la forza newtoniana o il lavoro di Huygens. Egli, senza negare quella newtoniana (eppure l'ha criticata) sostiene (in tutto il suo libro) la seconda di Huygens. Di quest'ultima vede il PLV come una maggiorazione; infatti da essa al PLV il passo sembra breve; così tanto che in questa nota non c'è il PdA, ma solo il PLV, perché sempre si parla di momenti e lavori virtuali. Quindi in ultima analisi è una concezione dei fondamenti della teoria meccanica quella che per Mach decide la natura del PdA. (Però nell'ultima frase egli assimila grossolanamente il PLV al teorema delle forze vive! Anche per questa confusione è inutile sperare che Mach ci chiarisca più di tanto la relazione tra PdA e PLV).

In totale, questa presentazione del PdA è quanto meno ambigua e deviante. Eppure nessuno degli storici della Fisica, a mia conoscenza, ha rimarcato questo punto, che mi sembra particolarmente importante di per sè e anche per cercare di non ripetere gli errori del passato. Anzi, nel 1935 un illustre fisico e un illustre filosofo, Linsday e Margenau, hanno collaborato assieme per studiare i fondamenti della fisica secondo l'atteggiamento di Mach. Essi riportano la presentazione data da Mach del PdA (108-110) come valida; ma, ne inficiano la affermazione basilare, perché dicono con chiarezza che parlare di equilibrio delle V_i non significa affatto SV_i=0: "Questo non è il suo significato."(110) Poi aggiungono un'avvertenza finale, composta da frasi, poco chiare, che vedono una coincidenza del PdA con il PLV; ma sviano questa conclusione aggiungendo in extremis un inciso ("in questa interpretazione" di Mach);(110) così perpetuando volutamente una ambiguità di contenuti; ciò che avevano detto sin dall'inizio: "I modi di stabilire il PdA sono molti e vari."(109)

Per conto loro Linsday e Margenau riformulano il PdA, ma finendo sempre per applicare il PLV.(110) Essi poi collocano il PdA tra le formulazioni "alternative" della meccanica; intendendo con questo aggettivo una proprietà molto semplice, quella di semplificare la soluzione di problemi di vario tipo. Il PdA infatti "dà una formula fondamentale dalla quale tutte le altre leggi meccaniche possono essere dedotte."(112) Ma poi questi autori giudicano che, per l'uso che d'Alembert fa del concetto di massa e forza, la sua formulazione della meccanica è una riproposizione della meccanica di Newton; con uno spostamento di enfasi sulla statica. "Ognuno dei problemi [risolto precedentemente con il PdA] può essere facilmente risolto con la legge di Newton".(112) (D'altronde, in un sommario del capitolo sulle varie formulazioni della meccanica essi danno anche il PLV come derivabile dai principi di Newton, e anche il viceversa,(158) ovviamente senza nessuna dimostrazione, ma solo come affermazione che chiamerei "filosofico-esperienziale").

Per questo silenzio dei commentatori e degli storici sulla presentazione di Mach del PdA è lecito ipotizzare che il problema, vecchio dal tempo di Mach, sia nel PdA originario, che forse non è stato mai espresso chiaramente. E' quello che vogliamo esaminare nel seguito per giungere a qualche conclusione certa su questo episodio storico, che, pur così lontano nel tempo, è ancora così influente anche nella didattica della Meccanica.

2. I Principi della meccanica nel *Traité* di d'Alembert

Non esistono studi dettagliati della Meccanica di d'Alembert, ma solo un capitolo di uno studio generale sulla sua opera scientifica,(Hankins, capitolo che noi esamineremo nel seguito. Altri lavori storici su d'Alembert scienziato non illuminano il nostro problema: Casini, Dhombres e Radelet-de Grave, Paty). Egli giustamente afferma: "Tutti gli storici della meccanica trattano il Principio di d'Alembert in dettaglio, ma nessuno di loro lo mette in relazione al resto della sua meccanica." (Hankins, nota di p. 191).

Allora studiamo la sua meccanica, rivolgendoci all'opera originale di d'Alembert, il *Traité* (prima edizione del 1743; la seconda non cambia i punti per noi interessanti).

A p. 3 c'è una chiara presa di posizione a favore di una teoria dedotta da pochi principi, intesi come principi soprattutto di geometria:

"Si possono ridurre a tre tutti i principi della Meccanica, la forza d'inerzia, il movimento composto e l'equilibrio. Almeno spero di far vedere con questo Trattato che tutta questa scienza può essere dedotta da questi tre principi."

Si noterà subito che tra i principi manca quello che passa sotto il suo nome. Ma è importante notare che manca anche il secondo di Newton e il principio di azione e reazione. Nella Prefazione del *Traité* d'Alembert si dichiara nettamente contrario al concetto newtoniano di forza-causa, criticandolo magistralmente.

"Avendo stabilito la forza di inerzia, cioè la proprietà che hanno i corpi di perseverare nel loro stato di riposo o di moto, è chiaro che il moto, che ha bisogno di una causa per iniziare od almeno esistere, non può essere accelerato o ritardato che da parte di una causa esterna. Ora quali sono le cause capaci di produrre o di cambiare il moto dei corpi? Noi non conosciamo attualmente che due [tipi di] forze; le une si manifestano nello stesso tempo dell'effetto che producono o, piuttosto, di cui sono l'occasione; queste sono quelle che sono originate dall'azione sensibile [empirica] e mutua dei corpi, risultante dalla loro impenetrabilità: si riducono all'impulso e a qualche altra azione derivata da quello. Tutte le altre cause non sono conosciute che per i loro effetti, e noi ne ignoriamo completamente la natura; tale è la causa che fa cadere i corpi pesanti verso il centro della terra o quella che trattiene i pianeti nelle loro orbite.

Noi vedremo presto come si può determinare l'effetto dell'impulso di quelle cause che si possono ricondurre ad esso. Per attenerci a quelli della seconda specie, è chiaro che, quando la questione è quella degli effetti prodotti da tali cause, questi effetti devono essere dati [ricavati] sempre indipendentemente dalla conoscenza della causa, poichè non possono esserne dedotti; e così, senza conoscere la causa della pesantezza, noi apprendiamo dall'esperienza che gli spazi descritti da un corpo che cade sono tra loro come il quadrato dei tempi. In generale, nel moto vario di cui sono sconosciute le cause, è evidente che l'effetto prodotto dalla causa, sia in un tempo finito sia in un istante, deve essere dato sempre dall'equazione che lega i tempi e gli spazi; una volta noto quest'effetto e supponendo il principio della forza d'inerzia, non si ha bisogno che della geometria e del calcolo per scoprire le proprietà di questi tipi di movimento.

Perché dunque ricorriamo a questo principio di cui tutti fanno uso adesso, che la forza acceleratrice o ritardatrice è proporzionale all'elemento di velocità; principio poggiato su questo unico assioma vago ed oscuro che l'effetto è proporzionale alla causa? Noi non esamineremo se questo principio è una verità necessaria; noi ammetteremo soltanto che le prove che ne sono state date fino ad ora non ci sembrano molto convincenti; né noi l'adotteremo, come fa qualche geometra, come verità puramente contingente, il che rovinerebbe la certezza della meccanica e la ridurrebbe ad essere null'altro che una scienza sperimentale. Noi ci contenteremo di osservare che, vero o dubbio, chiaro od oscuro, esso è inutile alla meccanica e di conseguenza deve esserne bandito." (pag. IX-XI)

Questa nuova situazione teorica richiede che seguiamo passo passo la sua esposizione, per capire quali siano i suoi nuovi fondamenti. Nelle pagg. 3-4 del Cap. I egli enuncia il primo principio, quello d'inerzia. Lo fa in modo curioso, mediante due "Leggi" ed un corollario; ma sostanzialmente è il ben noto principio di Cartesio.

Poi (pagg. 13-16) egli fa vedere come, essendo nota la curva della traiettoria (gli effetti di una causa) si possa risalire all'accelerazione, e così stabilire la relazione

$$j\,dt = d^2 s = u du\ ,$$

(dove non è chiaro se φ è intesa come accelerazione per unità di massa o no). Nel "Remarque I" seguente (pag. 16-20) ripete la critica a *f=ma*, riportandosi ai soli effetti del moto. Nel "Remarque II" (pag. 20-22) tratta della comparazione delle forze acceleratrici con differenti ordini di infinitesimo. A questo punto è chiaro che, avendo eliminato le forze, egli per ora sta elaborando soprattutto la cinematica e la geometria dei vettori.

Ma il lettore si chiederà su che cosa allora sia fondata la sua teoria dinamica.

Segue il Cap. II (22-30) che inizia con quel "principio" che egli nella Prefazione aveva nominato per secondo.

Questo principio viene introdotto quando, così come è in Newton, viene posta l'attenzione su come il corpo in esame cambia il moto. D'Alembert lo dice nella Prefazione, in continuazione alla precedente citazione:

"Abbiamo fatto menzione, fino ad ora, solo del cambiamento della velocità di un mobile prodotto da quelle cause che sono in grado di alterare il suo moto; e non abbiamo ancora indagato in alcun modo quanto deve accadere se la causa motrice tende a muovere il corpo in una direzione diversa da quella che esso ha.... Si è dunque costretti a far ricorso ad un secondo Principio, quello chiamato della composizione dei Movimenti, con il quale si determina il movimento unico di un Corpo che tende a muoversi con velocità date, secondo diverse direzioni." (p. XII)

Però vedremo che d'Alembert non pensa agli incrementi continui di velocità, ma solo a quelli discontinui, dovuti ad urti. Questi cambiamenti discontinui negli urti sono considerati prima di tutto nella direzione. Questa novità è dichiarata centrale per la sua Dinamica.

Al di sotto sembra esserci un'idea guida: lasciando da parte i cambiamenti continui di accelerazione per concentrarsi sui soli cambiamenti discontinui delle quantità di moto, dovuti ad urti, la geometria dei vettori forse spiega tutto.

Si ricordi per prima cosa che in quel tempo le leggi dell'urto non erano chiare; lo diverranno solo nel 1783 con Lazare Carnot, il quale trattò tutti i casi possibili di urto introducendo l'indice di elasticità dei corpi. Invece d'Alembert era convinto dell'errore teorico comune, che per teorizzare l'urto i corpi di riferimento fossero quelli perfettamente duri (tali da non cambiare forma e quindi non conservare l'energia, d'Alembert, 1754, V, 172). Inoltre nel tempo di d'Alembert il calcolo vettoriale era appena intuito e verrà formalizzato compiutamente 100 anni dopo. Egli sembra cogliere in anticipo un avanzamento matematico successivo; per porlo all'inizio dell'uso del calcolo differenziale in meccanica e quindi anche del secondo principio della meccanica newtoniana. A causa del suo legame con una teoria dell'urto errata e della sua anticipazione intuitiva del calcolo vettoriale, occorrerà concedere a d'Alembert una buona dose di approssimazione teorica.

In questo capitolo il principio è però chiamato "Teorema del movimento composto". Per noi esso è nient'altro che la regola del parallelogramma! Il "teorema" è poi "dimostrato" col principio di ragion sufficiente. Il capitolo continua con la trattazione cinematica delle forze centrali.(27-30)

Il Cap. III (31-48) tratta il movimento distrutto o cambiato da ostacoli; questi vengono descritti come capaci di far "perdere" una certa quantità di moto e di cambiarne la direzione. Il caso di un corpo su una superficie curva è un caso particolarmente interessante (34-37).

Con ciò egli fonda la sua dinamica su concetti molto generali e astratti, in quanto lo fa sulla matematica del calcolo vettoriale.

Infine si giunge al principio che nella Prefazione (p. xiv) aveva nominato per terzo. Ancora una volta quello che prima era stato chiamato il "principio dell'equilibrio" (p. 3), ora viene presentato come "teorema":

"Se due corpi, le cui velocità sono in ragione inversa alle rispettive masse, hanno direzioni opposte, in modo tale che l'uno non possa muoversi senza spostare l'altro, allora tra questi due corpi si avrà equilibrio." (p. 37).

Vediamo se il contenuto di questo principio è chiarito dalla sua "dimostrazione". Essa non è che l'esame di alcuni esempi di applicazione di questa affermazione: dal più banale (*m* e *v* uguali) a quello con *mv* uguali ma con le masse che stanno in un rapporto razionale o irrazionale. E ogni volta egli non fa che appellarsi al principio di ragione sufficiente: "non c'è ragione per cui l'uno si muova piuttosto che l'altro ... " (pag. 37), senza fare riferimento ad altre prove; comunque egli conclude: "Da ciò sorge questo assioma, che corpi aventi quantità di moto uguali ed opposte si fanno equilibrio." (p. 39-40) dove chiama "assioma" quello che all'inizio aveva enunciato come tesi di un teorema; e ancor prima, "principio". Il tutto può prendere senso solo se per "dimostrazione" della tesi intendiamo un semplice supporto argomentativo di tipo tentativo-intuitivo (o anche metafisico). Ma certo questo atteggiamento non è "razionale" e non ci dice granché sul contenuto del principio suddetto.

Cercando di comprendere questa sua affermazione osserviamo che, come nota Briggs, finalmente qui vediamo qualcosa di dinamica, perchè si parla di masse; secondo Briggs la sua affermazione "risulta [essere] la conservazione della quantità di moto nell'urto"; però questa interpretazione non dice nulla sull' "equilibrio dei corpi". In effetti qui d'Alembert vuole vedere la statica (equilibrio) come caso particolare della dinamica; per farsi equilibrio, cioè per fermarsi, i due corpi urtantesi debbono essere o duri o perfettamente plastici. D'Alembert pensava che le leggi sugli esperimenti ideali sui corpi duri potessero essere opportunamente generalizzate a tutti i corpi. Ma noi sappiamo che questo non è vero e il suo principio è accettabile modernamente solo per i corpi perfettamente plastici; il che però ha rilevanza teorica generale nulla.

Il successivo Corollario III vuole passare al caso continuo; ma egli ragiona in un modo che è fuori dell'ordinario ed è chiaramente inaccettabile:

"Tutto quello precedentemente detto sull'equilibrio, sarà ancora vero se al posto delle velocità finite impresse ai corpi che sono in equilibrio, consideriamo delle forze acceleratrici in rapporto tra esse come le velocità finite, o... .. delle forze motrici che sono tra loro in rapporto come erano le quantità di moto. L'equilibrio sussisterà ancora, ... "(p. 41)

Si noti che questo Corollario passa a considerare la dinamica dei moti variati con continuità. Con le "forze acceleratrici... o forze motrici" d'Alembert torna a considerare, ma in via subordinata, le forze della dinamica newtoniana; le quali, nel caso dell'urto ci potrebbero dare (se d'Alembert non fosse legato all'idea del corpo duro) il principio di azione e reazione; principio che d'altronde non figura altrove nell'opera e che Briggs gli riconosce.(112)Ma è strano che questo corollario è considerato una conseguenza del "Teorema", cioè del principio precedente, con un salto logico dalle velocità alle accelerazioni.

Nel complesso è evidente che d'Alembert, sminuendo l'importanza delle forze newtoniane e quindi anche del principio di azione e reazione, voleva partire invece dalla tradizione cartesiana (della conservazione della quantità di moto) e poi ricavare, come semplice corollario, quanto gli serviva della teoria di Newton; il tutto passando, senza preoccupazioni, dal caso discreto dell'urto al caso del moto continuo.

Sotto questa luce allora possiamo ripensare al suo terzo principio. Siccome poi d'Alembert l'applica ai moti continui, allora la sua affermazione di un "equilibrio tra i due corpi" richiede che le velocità di cui si parla siano virtuali; il che può riguardare il PLV applicato alle macchine semplici (ad es., due corpi appesi con una fune comune ai due lati di un piano inclinato):

$\sum_i f_i \, ds_i = 0$, $\sum_i m_i g \, ds_i = 0$, la quale in un tempo *dt* dà $\sum_i m_i g v_i = \sum m_i v_i = 0$.

Quest'ultima uguaglianza era l'idea strategica dei cartesiani: il principio della conservazione della quantità di moto deve valere anche per i moti vincolati. Questa strategia era un errore ("memorabile", lo giudica nel 1686 Leibniz nella sua famosa polemica con Cartesio e i cartesiani, polemica detta della *vis viva*; Leibniz sosteneva che solo per caso in alcune macchine semplici valeva quella relazione e comunque non quando il moto da incipiente passava a moto su un tempo finito. Ne tratto in Drago 2000), salvo quando tutte le forze siano ad uguale accelerazione costante (come nel caso delle forze peso).

In effetti, se, andando al di là delle parole di d'Alembert, interpretassimo il "principio dell'equilibrio" come il PLV, allora egli avrebbe cumulato un vero principio (che può essere considerato o come principio euristico o come assioma a priori; ma non può essere dimostrato come teorema).

Aquesto punto d'Alembert ha presentato i tre principi che aveva annunciato nella Prefazione; con i quali egli afferma, sempre nella Prefazione (XIV-XV), che si può risolvere ogni problema. Il suo famoso PdA viene presentato successivamente, sempre col nome di Principio, ma come se fosse derivabile dai suoi tre principi.

Da questa rapida sintesi ricaviamo i seguenti punti chiari: 1) d'Alembert non è affatto "razionale" nell'esporre i principi della sua meccanica (né poi, in altri scritti, ha fatto di meglio); in particolare la parola "principio" è confusa con la parola "teorema"; 2) egli vuole distinguersi nettamente da Newton; 3) in particolare rifiuta radicalmente la forza-causa newtoniana; 4) considera come primari i fenomeni di urto, da lui considerati essenzialmente diversi da quelli continui sui quali si basa la meccanica newtoniana; 5) erroneamente considera il corpo duro come il corpo ideale per teorizzare l'urto; 6) con il terzo principio segue la tradizione cartesiana, basata sulla conservazione della quantità di moto, ma non esclude la tradizione leibniziana-bernoulliana del PLV; 7) aggiunge un suo principio (il suo secondo) che però è solo un'anticipazione del calcolo vettoriale; 8) non chiarisce se il suo PdA sia una conseguenza dei tre principi o sia un ulteriore principio.

3. Il Principio di d'Alembert nel *Traité*

Passiamo ora ad esaminare la sua versione originale del "principio di d'Alembert". Tutta la Parte II del *Traité* (49-187) è dedicata alla esposizione e a numerose applicazioni del PdA. Essa è intitolata: "Principio generale per trovare i moti di taluni corpi che reagiscono gli uni con gli altri in modo qualunque con molte applicazioni di questo Principio." (49)

Il Cap. I "Esposizione del principio" (49-50) è articolato in più punti: breve introduzione al principio, definizioni di velocità vettoriale e di quantità di moto, esposizione del "Problema generale" e, infine, "Soluzione" di questo.

D'Alembert comincia con l'osservare che i corpi possono agire fra loro in tre differenti modi:

"I corpi agiscono gli uni su gli altri solo in tre modi a noi noti: o attraverso un impulso immediato, come nell'urto ordinario; o per mezzo di qualche corpo interposto tra loro ed al quale sono attaccati in qualche modo; o, infine, per attrazione reciproca, così come il Sole ed i pianeti nel sistema Newtoniano. Gli effetti di quest'ultima specie d'azione sono stati sufficientemente esaminati, mi limiterò a trattare del moto dei corpi che si urtano in un modo qualunque, e di quelli che si tirano con dei fili o aste inflessibili." (p. 49).

L'attrazione gravitazionale era stata già criticata (pp. IX-X); elegantemente non ripete la critica, ma esclude quel tipo di interazione dalla sua attenzione; concentrandosi sulle solo interazioni di contatto.

Inoltre dichiara il suo programma di lavoro:

"Io mi fermerò tanto più volentieri su quegli argomenti dei quali i più grandi geometri tuttora non hanno risolto che un piccolo numero di problemi, e [con ciò] spero, per il metodo generale che vado a dare, di mettere tutti quelli ai quali sono noti i principi del calcolo e della meccanica, nelle condizioni di risolvere i più difficili problemi di quel tipo.

PROBLEMA GENERALE

Sia dato un sistema di corpi disposti in un modo qualunque gli uni rispetto gli altri, e supponiamo di imprimere a ciascuno di essi un particolare moto, che però non può essere compiuto a causa dell'interazione con gli altri corpi; trovare, in queste condizioni, il moto che ogni singolo corpo deve prendere.

Soluzione

Siano A, B, C, .. ecc., i corpi che compongono il sistema, e supponiamo che siano stati loro impressi i moti *a, b, c*, e che essi siano costretti, a causa dell'interazione reciproca, di cambiarli nei moti **a**, **b**, **c**... ecc.; è chiaro che si può riguardare il moto *a,* impresso al corpo A, come composto dal moto **a** che egli ha [effettivamente] preso e di un altro moto α. Allo stesso modo possiamo riguardare i moti *b, c,* ecc. come composti [rispettivamente] dai moti **b** [e] β; **c** [e] γ; ecc. Ne segue che il moto dei corpi A, B, C, ecc. tra loro sarebbe stato lo stesso se al posto degli impulsi [dei moti] *a, b, c,* ecc. si fossero date le coppie di impulsi [dei moti] **a** [e] α; **b** [e] β; **c** [e] γ; ecc. Ora, per ipotesi, i corpi A, B, C, ecc.; sono andati a prendere i moti **a**, **b**, **c**, ecc., dunque i moti α, β, κ devono essere tali da non disturbare affatto i moti **a**, **b**, **c**, ecc.. Cioè, se i corpi avessero ricevuto soltanto i moti α, β, γ ecc., questi avrebbero dovuto distruggersi mutuamente ed il sistema rimanere a riposo.

Da ciò segue il principio seguente [che serve] per trovare il moto di più corpi che interagiscono gli uni su gli altri.

Decomposto ognuno dei moti a, b, c, ecc., impressi ad ogni corpo, in altri due **a** [e] α*;* **b** [e] β*;* **c** [e] γ*; ecc., tali che se ai corpi fossero stati impressi solo i moti* **a**, **b**, **c***, ecc.., essi avrebbero potuto* *conservare questo moto senza disturbarsi reciprocamente; e se si fossero loro impressi solo i moti* a , b, γ, *il sistema sarebbe rimasto a riposo.*

[Allora] è chiaro che **a**, **b**, **c**, ecc. sono i moti che questi corpi prenderanno in virtù della loro azione. Quello che era da trovare.>> (p. 49-51)

Questo brano non è l'enunciato di un "Principio", benché con questo nome venga chiamato con anche da d'Alembert. Il testo che abbiamo letto è la risoluzione di un "Problema generale"; o meglio, il PdA è un metodo di soluzione di un problema universale di urto. Quindi per prima cosa esso è un principio metodologico per indirizzare la ricerca teorica o la soluzione di problemi. Cioè, è un tipo di affermazione che la letteratura sull'argomento non precisa mai, preferendo giocare sull'equivoco dato dalla parola "principio" privata di attributi, per farlo intendere come principio-assioma anche se non lo è. Inoltre, è evidente dal testo precedente che il famoso "Principio di d'Alembert" non ha nulla a che fare con quella meccanica delle forze continue alla quale la didattica universitaria di Meccanica Razionale lo associa; esso riguarda solo la meccanica dell'urto; cosa che la letteratura (salvo qualche storico che vedremo) non riporta. E se si tiene conto che d'Alembert lo riferisce ai corpi perfettamente duri, è anche evidente a primo colpo che esso non può essere sufficiente allo scopo proposto.

Quindi il suo ruolo teorico dovrebbe essere precisato all'interno di una riformulazione globale della sua teoria, nella quale, senza più corpi duri, i suoi tre principi dovrebbero dare come conseguenza il PdA; un compito ben difficile, probabilmente impossibile.

A parte il ruolo teorico del PdA, ora si tratta di comprenderne il contenuto preciso. Si può pensare di farlo attraverso lo studio delle sue applicazioni. Ma questo è un problema non ancora risolto. Uno studioso (Fraser, 1985) gli ha dedicato un lungo articolo; ma, non ha certo risolto tutti i problemi di interpretazione con i pochissimi problemi che egli ha esaminato rispetto ai tanti del *Traité*. Assieme ad un laureando (Bevacqua, 112-125) ho controllato la applicazione del PdA a due problemi, il I problema, del centro di oscillazione (p. 69-73) e il problema II (pag. 95). In ambedue i casi abbiamo trovato che solo il PLV può spiegare la formula che risolve il problema. Anzi, nel primo problema questo fatto viene rivelato (69) da un chiaro *non sequitur*:

"per il nostro principio la leva CAR sarebbe rimasta in riposo se i corpi R, B, A avessero ricevuto solo i moti ST, -GQ, -MO. *Dunque* [sott. agg.]

A.MO.AC+B.GQ.BC=R.ST.CR",

dove all'improvviso sono stati introdotti i bracci infinitesimi AB, BC, CR per formare l'espressione del PLV. Questo è il "passaggio" che avevo già notato in Mach e contestato.

4. Osservazioni critiche di Truesdell e sua traduzione del principio

I fatti sottolineati in precedenza contrastano con tutto quello che si dice a proposito del principio di d'Alembert, e cioè, che esso sia un principio autonomo e che sia capace di ridare tutta la meccanica. Per risolvere questo contrasto interroghiamo gli studiosi più aggiornati in proposito.

In un articolo sulla meccanica di Lagrange (Fraser, 1983 p. 223) si tratta del PdA, anche se di passaggio:

"... l'interpretazione di questo principio è sorprendentemente difficile,... "

{In nota egli aggiunge: "Come risultato del lavoro degli ultimi anni di Trusdell e Szabo molta della confusione intorno al principio di d'Alembert è stata rimossa (Truesdell, 1960 pp.186-192; Szabo, 1977 pp. 31-43). Comunque, secondo me anche questi autori aggiungono solo delle specificazioni rispetto alla formulazione originale e all'uso di questo principio nel *Traité*. "}

Consideriamo allora il ben noto fisico matematico e storico della fisica, C. Truesdell. Sarò costretto ad una lunga citazione, sia perché essa offre molte chiarificazioni critiche, sia perché la sua valutazione ha lasciato il segno sugli storici successivi, nessuno dei quali ne contesta i giudizi. Per maggior chiarezza anticipo all'inizio della sua citazione una nota che egli mette in fondo (191) alle poche pagine che dedica al PdA:

"... le affermazioni che in letteratura di Meccanica sono chiamate tradizionalmente "Principio di d'Alembert"... [sono]

A. Le equazioni del moto si ottengono aggiungendo alle forze applicate per unità di massa le "forze inerziali", definite come le negative delle accelerazioni dei corpi sui quali agiscono le forze. Questo principio non elimina le forze di vincolo... [seguono notizie storiche, nelle quali questa versione è attribuita ad Eulero]

B. Il principio dei lavori virtuali, se alle forze applicate sono aggiunte le "forze inerziali" diventa la legge generale della dinamica. Questo principio, che ha in comune con la legge di d'Alembert la eliminazione delle forze vincolari, è dovuto a Lagrange *Mécanique Analytique*, II Partie, Seconde édition, § 7".

In effetti il testo di Sommrfeld, che non è l'ultimo per importanza, non rientra in questa classificazione che pure è abbastanza comprensiva. Riguardo al contenuto delle affermazioni, noto che esse ripetono quanto fece Lagrange.

Ora riprendiamo l'ordine originario dello scritto di Truesdell. Esso inizia riportanto l'originale del principio di d'Alembert e poi prosegue con:

"Generazioni di lettori sono rimasti confusi da questa affermazione: ma essa può essere decifrata. D'Alembert è un famoso *schizograph*: l'elegante precisione del suo stile letterario, riscontrabile spesso nelle prefazioni dei suoi lavori scientifici, non illumina mai la grande oscurità della sua trattazione matematica. L'oscurità non è solo nello stile: il linguaggio di d'Alembert, sia nell'analisi infinitesimale che nella filosofia naturale, è straordinariamente vago per i suoi tempi. La sua parola "corpo" ha lo stesso vago significato che in Newton; abitualmente ma non sempre, sta a significare ciò che noi chiamiamo punto-massa, quello che era già stato definito con precisione da Eulero nel 1734. La parola "moto" significa velocità, ma egli la usa principalmente per indicare l'incremento differenziale della velocità; nella maggior parte dei casi, per seguire il suo ragionamento abbiamo bisogno di tradurre "moto" in "accelerazione" [Notiamo che Truesdell ammette di introdurre cambiamenti radicali di significato, in una parola chiave qual'è "moto"; non si danno le prove di ciò che si attribuisce a d'Alembert e si rimedia dando la parola d'onore che ciò vale per "la maggior parte dei casi"].

Egli desidera eliminare dalla meccanica la parola "forza", come un concetto *a priori* [cioè, proprio quel concetto che invece viene fuori a Truesdell che intende il "moto" come accelerazione]; egli la considera come un fenomeno derivante necessariamente dal cambiamento di moto subìto dalla massa, e la *definisce* come il rapporto dell'accelerazione per la massa. Comunque, <<Devo far notare che per evitare circonlocuzioni, ho spesso fatto uso dell'oscuro termine di *forza...* >>; cioè egli ammette la utilità della forza nel ragionamento euristico, e la usa liberamente (come vedremo più avanti) in connessione con i problemi speciali risolti per la prima volta nel suo libro.

Acquisite queste precisazioni di linguaggio, ora possiamo porre il suo principio in termini moderni. {In nota egli aggiunge: Una ricerca in letteratura ha rivelato che un solo autore chiama "principio di d'Alembert" il principio così come pubblicato da d'Alembert: questo autore è G. Hamel (citazione bibliografica). Una forma più o meno equivalente all'originale è riportata da Levi Civita e Amaldi (citazione bibliografica). Una sua variante è chiamata "la terza forma del principio di d'Alembert" da Boltzmann (citazione bibliografica). Tutti gli altri lavori associano il nome di d'Alembert a uno o ad entrambi i principi descritti}. Per l'accelerazione *a* di ogni corpo del sistema abbiamo $a = a_f + a_c$, dove a_f è l'accelerazione assegnata come è ad es. l'accelerazione di gravità; e a_c è l'accelerazione dovuta alla mutua interazione ed ai vincoli. [E' chiaro che Truesdell interpreta il Corollario III del II Cap. come il terzo principio di Newton]

Il principio di d'Alembert asserisce che *le forze corrispondenti alle accelerazioni* a_c *formano un sistema in equilibrio statico, cioè* $\sum M\vec{a}_c = 0$, $\sum \vec{r} \times M\vec{a}_c = 0$, dove le somme sono fatte su tutti i corpi costituenti il sistema. Equivalentemente $\sum M\left(\vec{a} - \vec{a}_f\right) = 0$, $\sum \vec{r} \times M\left(\vec{a} - \vec{a}_f\right) = 0$."(186-187)

E' chiaro che Truesdell forza il significato di "moto" al fine di "tradurre" (nel senso di "traduttore-traditore") il PdA secondo la sua concezione dei fondamenti della meccanica, cioé ricondursi a qualcosa di simile a quelle che per lui costituiscono l'apice dello sviluppo della meccanica del '700, le equazioni cardinali di Eulero. Evidentemente Truesdell vuole estendere la validità delle equazioni cardinali di Eulero a tutte le situazioni meccaniche, in particolare quelle che includono vincoli; come se i vincoli fossero corpi normali per i quali si possono applicare i principi di Newton; una conseguenza dei quali dovrebbe essere anche il PLV. In altri termini, *Truesdell ha dato realtà ontologica alle equazioni cardinali di Eulero*, come se fossero vere in assoluto; cioé ha fatto propria non solo la teoria meccanica, ma anche la metafisica di Eulero; il quale è noto che voleva sostituire la metafisica tradizionale con la ormai affermata e comprovata metafisica della scienza meccanica.(Cassirer, 520-521)

In uno scritto precedente ho mostrato invece che il PLV è indipendente dai principi di Newton e che ignorando questo punto gli storici hanno mantenuto una valutazione distorta dell'evoluzione della meccanica.(Drago, 1993) Dal mio punto di vista, Truesdell non tiene conto né che i vincoli sono corpi ideali a causa delle nostre schematizzazioni limite, né che noi inventiamo le reazioni vincolari, che nella realtà non sono mai sperimentate direttamente. Pertanto egli applica ingenuamente il bilancio delle due equazioni cardinali alle forze applicate, a quelle risultanti e in particolare a quelle perdute; quando in realtà nessuno ci assicura che le equazioni cardinali valgano anche nel caso delle sole reazioni vincolari. Il controesempio che ho dato nel precedente caso di Mach lo dimostra.

Comunque egli confessa onestamente di aver creato un artefatto rispetto al testo di d'Alembert, perché prosegue così:

"Bisogna espressamente evidenziare, comunque, che nel lavoro di d'Alembert non compare *nessuna equazione generale* e che le precedenti formule corrispondono a quello che *fa* e non a quello che *dice*. I lettori moderni, abituati ai concetti newtoniani e alle più recenti formulazioni della meccanica dei sistemi, interpreteranno le [sue] formule come l'affermazione che *i vincoli e le forze di interazione non esercitano alcuna forza o momento totale*. {In più, in nota Truesdell indica un caso di applicazione incoerente da parte di d'Alembert}. Questa affermazione è lontana dall'approccio di d'Alembert; ma è sufficiente per mostrare che mentre il principio è corretto per la maggior parte dei sistemi [da lui] trattati in dinamica, esso è insufficiente, senza aggiungere ipotesi o ulteriori specificazioni, per determinare il moto di sistemi non rigidi in generale. Siccome [si noti bene] l'interpretazione del principio di d'Alembert è una nota trappola per gli storici ["a nototious pitfall for historians"], io propongo la mia interpretazione solo come congettura.

{In nota aggiunge: Sia per scritto che in alcune conversazioni ho incontrato molti partigiani entusiasti di d'Alembert, alcuni dei quali sono stati sconvolti dalle mie critiche. Nessuno comunque ha indicato correttamente una specifica scoperta di d'Alembert, [che sia stata] ottenuta seguendo soltanto l'argomentazione con cui egli vi è arrivato. I due storici che hanno studiato alcuni dei suoi lavori in dettaglio, Todhunter e Burkhard, hanno trovato molta confusione e non hanno puntualizzato la maggior parte delle ipotesi aggiuntive che io ho evidenziato e specificato. La sua è una di quelle reputazioni (più numerose oggi che ai suoi tempi), che [agli studiosi] non sembra necessario verificare. Per quanto ne so, questa introduzione [di Truesdell all'*Opera omnia* di Eulero] è l'unico concreto studio sul lavoro di d'Alembert pubblicato negli ultimi 50 anni, cioè l'ultimo tentativo di rendergli giustizia storica fissando quello che ha fatto, invece che tramandare comode genericità}.

Nonostante l'oscurità delle sue procedure e affermazioni, una cosa è certa: d'Alembert ottenne nuovi risultati di grandissimo valore. Come sia intricato il suo metodo è visto molto bene dall'esempio che qui ci può interessare: quello del pendolo composto. [Qui Truesdell ripropone il problema II di pag. 95 del *Traité*, seguendo lo stesso ragionamento di d'Alembert].

Avendo seguito questa derivazione, siamo in condizioni di valutare il suo principio, la cui originalità è stato oggetto di controversie. Da parte sua d'Alembert dà riferimenti che sembrano solo fuorviare. {In nota aggiunge: I suoi riferimenti riguardano solo le applicazioni, non il principio. Nel § 75, riguardo al centro di oscillazione, egli dà una forma diversa dalla precedente, ma solo in cose irrilevanti; ma d'Alembert scrive: <<Il principio applicato in quest'ultima soluzione si riduce a quello di J. Bernoulli... .. è in questo modo che avevo pensato di risolvere il problema, e questo è anche quello che ha fatto Eulero. Ma Eulero non ha affatto dimostrato questo principio, che, se presentato in questa forma, non è facile da dimostrare. In aggiunta l'autore [Eulero] lo applica in questa stessa memoria alla soluzione di alcuni problemi di oscillazioni di corpi flessibili ed inflessibili.>> Nella seconda edizione d'Alembert stranamente alterò questo passaggio scrivendo: <<Eulero non ha dimostrato questo principio, né può essere dimostrato se non tramite il mio. Inoltre l'autore [Eulero] ha applicato questo principio solo alla soluzione di pochi problemi… ., e la soluzione data ad uno di questi è errata. Questo mostra come il mio principio è preferibile per risolvere non solo problemi di questo tipo, ma anche tutte le questioni della dinamica>>}.

Lagrange scrisse una storia di questo caso storico che dà i giusti riferimenti, ma crea confusione con una sua vaghezza che è stata trasmessa fedelmente o mal interpretata da parte degli storici successivi. [Nota di Truesdell su Lagrange] Di fatto ciò che rende operativo il principio di d'Alembert sono due idee indipendenti: 1) il prodotto della massa per l'accelerazione di un corpo, se cambiato di segno, può essere riguardato come una forza alla pari con le forze applicate, 2) le forze esercitate dai vincoli non hanno bisogno di essere considerate se non per le limitazioni che impongono sulle reali accelerazioni.

Questo non é il suo linguaggio, ma ne spiega la procedura. La sua importanza è stata appoggiata sempre sulla seconda idea." (Truesdell, 187-190)

Qui è evidente la ulteriore ammissione, da parte di Truesdell, di aver offerto solo una traduzione della teoria di d'Alembert. Dei due punti indicati da Truesdell, il punto 1 verrà criticato da Szabo, come vedremo nel prossimo paragrafo. Inoltre esso era inaccettabile metafisicamente al tempo di d'Alembert: la forza-causa non può dare luogo ad una controforza-causa o forza-controcausa; fu solo nel 1783 che L. Carnot criticò magistralmente e abbandonò il concetto di forza-causa e perciò seppe introdurre per primo la pur semplice formula matematica della forza resistente (come una forza che forma un angolo ottuso con lo spostamento del corpo). La mostruosità metafisica di cui sopra fu in effetti introdotta da Lagrange, il quale giocava formalisticamente con la matematica.

Il punto 2 non è chiaro: o è banale ("danno limitazioni"); o è un accenno alle formule che prima aveva dato come congettura e che ho mostrato errate; o infine lascia la porta aperta ad altre interpretazioni oltre la sua, in particolare a quella che ci vede il PLV nella forma $\sum R_i \, \delta s_i = 0$; che però non è un principio accettato da Truesdell (che riconosce Eulero come il punto più alto della meccanica teorica) e che quindi egli neanche nomina.

Truesdell poi prosegue con un'aggiunta di carattere storico; essa manifesta la poca chiarezza da lui raggiunta sul contenuto di questo principio:

"Entrambe le idee, nel contesto del centro di oscillazione ed espresse in una terminologia ancora diversa, derivano da un grande articolo di J. Bernoulli (1703). Per risolvere il problema del centro di oscillazione, J. Bernoulli applicò queste idee ed il principio dell'equilibrio dei momenti; la soluzione di d'Alembert è, in fin dei conti [sic!], identica. Per risolvere il problema del pendolo composto D. Bernoulli applicò queste idee ed il principio dell'equilibrio delle forze; la soluzione di d'Alembert è, alla fine [sic!], identica nel calcolo delle forze acceleratrici risultanti, ma va oltre quella di Bernoulli nel senso che non accetta l'ipotesi specifica di Taylor, e perviene ad equazioni differenziali di validità generale.

Ricapitolando, il principio di d'Alembert non contiene idee che non si trovino già nei lavori di J. e D. Bernoulli; piuttosto il suo merito è l'intuizione [solamente] che *quelle idee sono generali e possono essere usate per ottenere equazioni differenziali del moto per una grande classe di sistemi dinamici.* [ma allora perché non lo si chiama "Principio di Bernoulli-d'Alembert"?]

Infine, come dovrebbe essere chiaro dalla presentazione di cui sopra, il principio originario di d'Alembert è solo tenuamente connesso con le due versioni tradizionalmente dette "Principio di d'Alembert" che si trovano nella letteratura della meccanica.>> (Truesdell, 190–191. Qui c'è la nota che ho posto all'inizio di questo paragrafo)

Lo scritto di Truesdell appare come una critica radicale della tradizione e della letteratura corrente; essa propone una sua interpretazione che attribuisce un contenuto preciso a quel principio; ma, come lui stesso dice, è solamente tentativa; e, a mio parere, errata. Ma ha molti meriti nella parte critica e, indirettamente, sottolinea ancora una volta che ogni interpretazione del PdA dipende da quale concezione si ha dei fondamenti della meccanica.

5. Osservazioni critiche di Szabo

Dall'opera successiva di Szabo ricaviamo queste note critiche:

"Dalla posizione del problema si vede subito che:

1) d'Alembert per "movimento" intende le velocità (come rimarcato più avanti)

2) le "velocità perdute" … Sono gli incrementi delle velocità nell'unità di tempo; la "soluzione" del problema di cui d'Alembert crede di dare la prova è [segue la citazione del testo del PdA]

La "prova" di d'Alembert si basa sulle forze di reazione R_i prodotte dalle forze impresse F_i

$$\sum R_i + \sum F_i = \sum ma_i \quad (1)$$

Il movimento prende attuazione solo attraverso le interazioni delle reazioni; cosicché, deduce d'Alembert, $\sum R_i$ deve essere nullo. Ma [come già osservavano Linsday e Margenau] questa non è una dimostrazione in senso matematico, perché qui vengono considerate come proposizioni uguali la proposizione delle "possibilità" (del passaggio delle reazioni alle forze impresse) con quella reale. Perché è certo che la (1) è possibile, ma non che è reale. Nella dimostrazione di d'Alembert si nasconde il cosiddetto "Principio della passività delle reazioni vincolari". [Sembrerebbe $\sum R_i \,\delta s_i = 0$; ma invece poi Szabo dice:] Quando non è necessario avere a che fare con le reazioni vincolari esse non agiscono." (Szabo, 1979, pag. 35).

In più poi Szabo fornisce delle:

"5. **Osservazioni critiche sul principio di d'Alembert**.

Nella letteratura c'è qualche confusione su questo principio. Di essa ne indicheremo i punti principali. Di solito dai libri di Fisica (tra i quali quelli di Fisica Teorica) si ricava l'impressione che il principio è senza dimostrazione. Esso viene presentato così (cito da un testo universitario):

$$ma = F \Rightarrow F - ma = R = 0$$

Qui è difficile stabilire in quale ordine elencare tutte le perplessità:

1) la mossa geniale di uno scienziato importante qui è degradata ad una semplice uguaglianza; su un tale fatto risulta ben aderente la frase di Hamel: "questa è una enorme sottovalutazione e persino un'offesa a d'Alembert"

2) [il passaggio da F=ma alla uguaglianza con la forza d'inerzia è una banalità] quando viene trattato il moto libero di un punto-massa.

Allora gli si associa il principio dei lavori virtuali, nella forma $\sum \left(F_i - ma_i\right) \delta s_i = 0$, che infine si qualifica come: "questa estensione del principio di d'Alembert"; il che è ancora una volta da notare, perché questa versione di quel principio è introvabile in d'Alembert: essa viene da Lagrange."(Szabo, 1979. pag. 36).

Più avanti si legge che, secondo Hamel, ci sono "cinque incomprensioni" della letteratura sul principio di d'Alembert:

"1) il principio di d'Alembert non si limita alla particella libera: in questo caso è una banalità. 2) Esso non segue dal PLV; questo gli si può aggiungere come un possibile principio dell'equilibrio. 3) Il principio di d'Alembert non è esaurito nel caso dei corpi rigidi, o in altre parole non sempre le condizioni dell'equilibrio sono la somma delle forze impresse e la somma dei momenti delle forze. 4) [segue un confronto del principio di d'Alembert con l'assioma di Boltzmann sulla simmetria del tensore degli sforzi]. 5) Spesso il principio viene esposto in modo troppo ampio, dicendo, che ogni condizione d'equilibrio statica diventa vera anche per il movimento, mediante l'aggiunta di accelerazioni negative." (Szabo 1979. pag. 36)

A seguire, Szabo dà un esempio in cui questo fraintendimento viene illustrato.

In totale Szabo non scioglie il nodo, dà solo delle perplessità e al più delle precisazioni. In effetti era solo questo il livello di chiarificazione che Fraser attribuiva loro nella sua nota (dalla quale siamo partiti alla ricerca di lumi da Truesdell e Szabo): è proprio vero che all'enunciato e alle applicazioni del PdA i due studiosi "aggiungono [solo] delle specificazioni".

6. Traduzione di Hankins

In un ulteriore lavoro del 1985 Fraser rimanda ad un altro autore che l'ha preceduto, quell'Hankins che ha scritto un libro sulla scienza di d'Alembert.

Hankins sintetizza la teoria meccanica in qualche paragrafo. Egli introduce una novità importante perché riconosce con chiarezza che le leggi di d'Alembert (a parte la prima) "erano leggi per il caso dell'urto" e come tali vanno spiegate.(Hankins, 1970, 174)

Egli ricorda la prima legge e poi la "seconda legge del moto", notando che quest'ultima è manchevole (perché non specifica la direzione del moto perduto). Inoltre paragona questo principio con la seconda legge di Newton;la quale, si noti, fu enunciata come *f=Dmv*, dove il secondo membro della formula è un cambiamento di moto come in d'Alembert; ma a noi è chiaro che tra i due autori resta la divergenza con sulla forza, che sta nella formula di Newton e che d'Alembert non vuole. Il terzo principio (dell'equilibrio) viene messo a confronto da Hankins con quello di azione e reazione, cioé come principio sulle forze o sulle variazioni delle quantità di moto (criticando il fatto che d'Alembert lo abbia chiamato "dell'equilibrio"). Ma non riesce a giungere ad una chiara conclusione su quale sia la loro relazione; la considera "… un tentativo di rendere la statica un caso particolare della sua dinamica dell'urto"(Hankins, p. 190)

E arriviamo infine al paragrafo specifico sul PdA.

"*Il principio di d'Alembert*. Le tre leggi del moto che abbiamo appena discusso sono gli assiomi della meccanica dell'interazione di d'Alembert. Ma più importante, e certamente più noto, è il suo famoso "principio di d'Alembert", che egli ha derivato dalle ultime due di queste leggi. Il Principio di d'Alembert è fondamentalmente un principio d'urto [per il caso dell'urto]. L'urto tra due corpi può essere di due tipi. Può essere o diretto, come la collisione tra due palle da bigliardo, o può essere trasmesso da qualche oggetto intermedio, quale un'asta rigida o una corda anelastica. Questi sono i casi che d'Alembert intende affrontare con il suo principio. Le corde e le aste sono chiamate *vincoli* nella meccanica moderna. Lazare Carnot per primo puntualizzò che questi vincoli non devono compiere lavoro; cioè, i corpi devono essere perfettamente duri e i collegamenti devono essere perfettamente rigidi. Altrimenti il principio non è valido. E' implicito nell'affermazione di d'Alembert che egli tratta aste *inflessibili*.

Il modo più facile di descrivere il Principio di d'Alembert è con un esempio [scelto da Hankins in modo del tutto particolare].

Consideriamo due palle dure di massa M_1 e M_2 in moto con velocità V_1 e V_2 come in fig. 8.4. Nello stesso istante entrambe colpiscono un'asta AB [per quello che dice dopo: mobili] senza massa, perfettamente rigida, e [essendo duri] vi aderiscono nei loro punti di contatto. A causa dell'asta, esse sono costrette a cambiare istantaneamente le loro velocità in V_1' e V_2'. I cambiamenti di velocità causati dal vincolo sono V_1'' e V_2''. Ora il Principio di d'Alembert dice che secondo la sua terza legge [quella dell'equilibrio] i "movimenti" [le quantità di moto perdute] ($M_1 V_1''$ e $M_2 V_2''$) sono in equilibrio, in modo che se essi fossero applicati all'asta isolata, si eliderebbero l'uno con l'altro e l'asta rimarrebbe immobile [il che è quasi sempre impossibile: vale solo se i punti di impatto coincidono con il baricentro dell'asta e le masse fossero uguali]. Non si stanno considerando forze statiche o accelerative, ma urti (d'Alembert si riferisce all'azione come 'impulsion'), proprio come sono descritte nella sua terza legge. [E' evidente il lodevole sforzo di Hankins di riformulare tutto d'Alembert mediante il concetto tipico dell'urto *Dmv* e di derivare il PdA dal terzo principio dell'equilibrio].

{In nota aggiunge notizie e valutazioni un po' alla rinfusa: "Tutti gli storici della meccanica trattano il Principio di d'Alembert in dettaglio, ma nessuno di loro lo mette in relazione al resto della sua meccanica. La migliore trattazione di questi concetti è di Truesdell [rif. bibl.], Ernst Mach [rif. bibl.] dà una buona trattazione storica. Vedi anche R. Dugas [rif. bibl.]. Erwin N. Hilbert [rif. bibl.] afferma che il Principio di d'Alembert è derivato dal Principio dei Lavori Virtuali, ma ciò è difficile da accettare, vista l'avversione di d'Alembert per le forze. La migliore trattazione è di Volfgraff (1915)"}.

La relazione tra V_1'' e V_2'' può essere determinata dalle leggi della statica perché queste velocità rappresentano un caso di equilibrio. Una volta note V_1'' e V_2'', il problema si risolve se si chiede di determinare lo stato successivo del sistema conoscendo il suo stato prima della collisione, o viceversa."

Nei casi in cui non c'è impatto (per esempio, la situazione dell'istante successivo, quando le due masse attaccate all'asta si muovono su linee curve) i cambiamenti di velocità sono infinitesimi (dV ") durante ogni intervallo di tempo infinitesimo (dt). In questo caso d'Alembert scrive i 'movimenti' come $M_1 dV_1''/dt$ e $M_2 dV_2''/dt$, il che ovviamente è un caso di accelerazione dovuta alle forze dei vincoli. Sebbene i problemi che egli tratta normalmente riguardino le accelerazioni e non gli urti, *d'Alembert pensa sempre nei termini del caso originale di urto ed è ciò che rende così difficile seguire le sue dimostrazioni*." (Hankins, 190-191; corsivo agg.)

Hankins nota finalmente un punto cruciale: d'Alembert dice urti, ma poi quasi sempre applica il PdA ai moti continui. Anche perciò Hankins ha cercato di collegare *Dmv* finito con *f=ma*; ma alla fine ammette che la sua è una traduzione del pensiero di d'Alembert. In effetti Hankins voleva arrivare a quella *f=ma* che per lui è l'unico fondamento della meccanica, anche rispetto alla teoria dell'urto. Infatti, a seguire:

"Notiamo come sono usate la seconda e la terza legge di d'Alembert per derivare il suo principio. Cercando la soluzione nella velocità, la seconda legge permette di ricavare V_1" e V_2", Siccome questo è un caso di collisione (l'asta semplicemente trasmette urto), esso può essere trattato con la terza legge. In effetti nella sua discussione della terza legge, d'Alembert aveva già preparato la strada al suo principio, discutendo molti casi di urti trasmessi da aste rigide e corde anelastiche. (In nota aggiunge: Il Principio di d'Alembert richiede in realtà un altro assioma che *non è espressamente affermato nelle sue leggi*. Questo è la terza legge di Newton. [Infatti] La terza legge di d'Alembert asserisce che se le quantità di moto perse da due corpi sono uguali ed opposte $MV_1'' = MV_2''$ ci sarà equilibrio. La terza legge di Newton è necessaria per affermare che, se i due corpi agiscono mutuamente l'uno sull'altro, allora i momenti risultanti risulteranno uguali e opposti.)

d'Alembert era molto orgoglioso del suo principio e fece affermazioni molto esagerate sulla sua validità e generalità. Disse:

<<Io credo che si può essere sicuri che non ci sono problemi in dinamica che non possano essere facilmente risolti come un gioco per mezzo di questo principio, o almeno che si possano ridurre facilmente un'equazione... Esso non è basato su nessuna strana o oscura metafisica.... Non fa uso di azioni o forze o di nessuno di quei principi secondari che possono essere buoni per conto loro... ma che non saranno mai principi primari, perché la metafisica non li chiarirà mai.>> (J. d'Alembert, "Dynamique" in *Encyclopédie*, V, p. 175)

d'Alembert credeva che il suo principio combinato con le sue leggi del moto fornisse un metodo puramente deduttivo per risolvere tutti i problemi di meccanica. Non c'è bisogno di dire che non è così, ma il principio è abbastanza generale per i casi di corpi perfettamente duri e rigidi che d'Alembert tratta nella sua meccanica."(Hankins, 1970, p. 192)

E' chiaro che il giudizio di Hankins sul PdA è di piena insufficienza; ma il PdA viene salvato perché al suo tempo ebbe un ruolo progressivo,sia pure in una direzione che poi si è rivelata falsa, (redenta poi dalla inclusione nella formulazione di Lagrange?):

"Il suo contributo, almeno per quello che fu riconosciuto nel xviii secolo, fu quello di aver dato un principio *generale* per la soluzione di un'ampia classe di problemi meccanici. Siccome fu il primo di molti altri principi simili, esso costituisce l'inizio di uno sforzo continuo per ridurre i movimenti dei sistemi meccanici a regole semplici e generali."(Hankins, p. 194)

In conclusione, Hankins pretende di offrire una interpretazione. Essa è meno aprioristica della congettura di Truesdell, se non altro perché è centrata sull'urto e non sulle forze. Ma l'interpretazione appare arbitraria quando egli sceglie l'esempio specifico su cui far tornare al meglio il principio (e per di più ne ricava una conclusione erronea). Inoltre, egli riconosce che d'Alembert, per ottenere i risultati, doveva comunque compiere delle generalizzazioni arbitrarie (dai casi di urto). Per cui l'interpretazione di Hankins dovrebbe concludere con chiarezza che l'enunciato del PdA non è un vero principio; e allora, come storico, dovrebbe spiegare il problema che ha posto Truesdell, perchè per 250 anni è stato trattato come tale.

7. Traduzione di Fraser

Passiamo infine all'ultimo storico del nostro elenco. Fraser ha compiuto nel 1983 una prima, rapida analisi della meccanica di d'Alembert e poi nel 1985 ha cercato di capire il PdA mediante lo studio dei vari problemi proposti nel cap. III del *Traité*.

Pnel primo scritto (Fraser, 1983, 224-225) ha dichiaratamente tradotto i concetti base del PdA:

"Primo, il termine "corpo" va inteso come *punto massa* o corpuscolo, e "azione mutua" si riferisce ai cambiamenti di moto dovuti ai vincoli del sistema. Detto ciò, denotiamo con v la velocità del corpo A al tempo t. Nell'istante successivo dt le forze agenti su A dovrebbero, se il corpo fosse libero, imprimergli l'incremento di velocità dv'. La quantità $v+dv'$ rappresenta il "moto impresso": $a=v+dv'$." (224)

Qui Fraser, attribuisce una *variazione* di velocità nel tempo (dv nel tempo dt) a quello che d'Alembert chiama "moto". Può darsi che questa lettura di Fraser sia coerente con alcune applicazioni, dove vengono trattati dei moti continui, ma in un urto (quale è ben specificato da d'Alembert prima e durante il suo principio e poi da Hankins, al quale anche Fraser si richiama), ciò non è corretto.

"Siccome [il corpo] A è connesso agli altri corpi, egli in realtà, subisce durante l'intervallo dt l'incremento dv e la "velocità reale" alla fine di questo istante è $v+dv$: [poniamo] $\bar{a}=v+dv$. Quindi la decomposizione $a=\bar{a}+a$ diventa $v+dv'=v+dv+dv''$ dove $a=dv''$ denota il moto perso a causa dei vincoli. Per ogni altro corpo del sistema si otterrà una decomposizione simile. Il principio di d'Alembert asserisce che la quantità dv'', se applicata da sola ad ognuno di questi corpi, produce equilibrio. In ogni problema assegnato il principio viene usato per ricavare l'equazione differenziale del moto." (224)

E' evidente che Fraser ha fatto di tutto per riportare il principio, che riguardava gli urti, ad una affermazione sulle accelerazioni dei moti continui, quindi ad *f=ma*, ed infine alle equazioni differenziali. Insomma, per Hankins la teoria newtoniana è l'unico fondamento di qualsiasi altro principio suggerito nella storia della meccanica.

Poi nell'articolo del 1985 (diviso in due parti), egli studia le risoluzioni originali dei problemi proposti da d'Alembert; ma sono solamente due problemi, il II e il X. Per fare questo egli si riconduce alle equazioni suggerite da Truesdell. (anche Scott, pp. 55-57, ripete questa interpretazione del PdA). Nella seconda parte di questo articolo egli esamina l'altro problema delle piccole oscillazioni (problema V) e conclude che la sua interpretazione "è la sola accettata da storici come Mach [1883], Truesdell [1960] e Szabo [1979]... [però] deve essere considerata come un caso particolare, non come veramente rappresentativa di come egli concepiva e trattava il suo principio nel *Traité*." Nel prosieguo Fraser esamina, ma senza formule, casi in cui le sue formule del caso continuo non possono essere applicate, perché riguardano casi di urto. Quindi la sua ricerca "sperimentale" non ha dato risultati innovativi, limitandosi a trovare una conferma alla congettura di Truesdell in alcuni casi particolari. Il che depone a favore solamente della serietà dei lavori di Truesdell, non della validità dell'enunciato originario del PdA.

8. Il rapporto del principio di d'Alembert col principio dei lavori virtuali

Per chiarire la "trappola per gli storici" del PdA abbiamo considerato le valutazioni sul suo contenuto teorico, espresse da alcuni recenti commentatori dell'opera di d'Alembert: Truesdell, Szabo, Hankins e Fraser.

Si noti che nessuno ripete le interpretazioni di un altro storico, considerandole dei semplici contributi; tanto che nessuno le esamina a fondo; il che riduce questi giudizi a dei semplici suggerimenti. Inoltre ognuno di loro è cosciente di stare interpretando d'Alembert al di là delle sue parole; e in definitiva si dimostra quanto meno incerto; perché non può pretendere che, anche nella sua interpretazione, il pdA sia un principio veramente generale, valido anche oggi. Tutti cercano di giustificarlo o per il suo tempo, o come un ponte per passare verso altri principi successivi. Il tutto conferma l'imbarazzo degli storici, già denunciato (francamente e meritoriamente) dal solo Truesdell, già negli anni '60.

Notiamo anche che nessuno dei precedenti autori mantiene distinti i casi dell'urto e del moto continuo, come se la fisica della meccanica newtoniana e la matematica dei limiti ε-δ ci assicurassero il passaggi dall'uno all'altro caso e viceversa. Solo Hankins, che giustamente sostiene che tutta la teoria di d'Alembert è basata sull'urto, dice fuggevolmente che L. Carnot ha proseguito la impostazione di d'Alembert basando la sua teoria solo sull'urto; ma Hankins non espone questa teoria, che costituirebbe un interessante punto di riferimento storico.(192).

Infine nessuno riconosce una fondazione della teoria essenzialmente diversa da quella di Newton (o di Eulero), che è ben noto essere valida per il solo caso continuo, e poi solo estensibile al caso discreto. Ora questo punto è importante, perché L. Carnot tratta l'urto come fenomeno primario; e poi fonda tutta la sua teoria non su *f=ma*, ma su "un principio molto simile al PLV" (L. Carnot, 1803, p. XIII), cioé al PLV modificato opportunamente per il caso dell'urto. In un altro lavoro (Drago 1993) ho fatto notare che il PLV è incompreso dal 1780. Tuttora nei libri di meccanica razionale non è chiaro se esso è un "principio" oppure un "teorema" o un "metodo". E soprattutto non si sa decidere se esso è indipendente o no dal secondo principio di Newton. Quando invece è evidente che lo è; perché il secondo di Newton tratta di un punto massa e non ha alcun mezzo per trattare i vincoli, che richiedono una specificazione in più (il loro lavoro non può essere positivo). Per non aver stabilito questa indipendenza, tutto ciò che storicamente si ricollega al PLV è rimasto nell'oscurità.

A mio giudizio è questo contesto di confusione sul PLV (oltre che alla confusione dovuta all'idea fallimentare di corpo duro) che finora ha impedito agli storici di chiarire il contenuto teorico del PdA (i quali storici, d'altronde, non hanno nemmeno precisato sui testi la polemica tra Leibniz e i cartesiani e quindi non hanno chiaro quali significati assume in questi due autori il cosiddetto "Principio dell'equilibrio").(Drago, 2000) Tra tutte le interpretazioni-traduzioni, in definitiva quella vechia di Mach, se letta per forze continue e alla luce del PLV e delle sue considerazioni sulla fondazione huygensiana della meccanica, è la meno traditrice del testo di d'Alembert.

Provo a riassumere la situazione delle analisi critiche sul PdA con la tabella seguente (dove tra parentesi sono poste mie valutazioni di quel che sostiene l'autore in questione).

AUTORE	**Concetto di "Moto"**	**Principio di azione e reazione**	**PdA = 4° principio?**	**Alternativo a Newton**	**Equazione matematica del Principio di d'Alembert**
Mach	*f*	*?*	*(sì)*	*sì*	*Equilibrio reazioni vincolari, PLV*
Linsday e Margenau	*f*	*?*	*(sì)*	*no*	*PLV*
Truesdell	*a*	*sì*	*(sì)*	*no*	*Equazioni cardinali per le reazioni vincolari*
Briggs	*mv*	*sì*	*no*	*no*	*(regola, non principio)*
Hankins	*mv*	*no*	*no*	*no*	$\sum m_i.\Delta v_i = 0$
Fraser	*dv*	*sì*	*(sì)*	*No*	*Equazioni cardinali sulle reazioni vincolari*
Drago	*mv*	*no*	*sì*	*sì*	*PLV*

Si noti che la proposta di d'Alembert su come rifondare la meccanica non è stata falsificabile, né ai suoi tempi, né fino a quando fu dominante la schematizzazione del corpo duro che d'Alembert seguiva. Solo dopo il 1850, l'affermazione della conservazione dell'energia in termodinamica impose di bandire l'idea di corpo duro, che, mantenendo la sua forma invariata, non permette la conservazione dell'energia.(Scott, cap. XII)

Ma si noti che questo concetto di corpo duro non è decaduto del tutto nella meccanica odierna: tuttora i vincoli sono corpi perfettamente duri, cioè non cambiano forma sotto qualsiasi urto. Per questo motivo la manifesta confusione sul PdA non ha mai mosso qualche teorico a chiarirla; per eliminarla egli avrebbe dovuto compiere (invece di una ricerca storica, così come si è fatto in questo scritto) una revisione globale della attuale Meccanica razionale; la quale non ha avuto un Lobacevskij che abbia impegnato tutta la vita per sostenere l'indipendenza (invece che dell'ipotesi delle parallele dalle altre) del PLV dai principi newtoniani; ma ha avuto un Lagrange, che, mediante un'equivoca operazione (sia di completamento del PdA che di generalizzazione del PLV) ha fornito un nuovo schema, che è risultato molto potente per ottenere tanti nuovi risultati in meccanica; ma questa operazione, sia per la nuova matematica (il mal fondato calcolo variazionale) sia per il suo nuovo concetto (che cosa è *T-L*?) ha oscurato i fondamenti della meccanica, a tal punto da farli considerare un problema non più da veri scienziati.

Ma oggi, chiarito il fallimento dell'idea di corpo dureo e la portata solo tentativa della proposta di d'Alembert, bisogna essere ancora più severi di Truesdell: il principio di d'Alembert non è affatto un principio di una teoria e nemmeno una legge generale per l'urto o per i moti continui. Oggi il principio di d'Alembert non ha diritto di cittadinanza nei testi di Meccanica. Tutto quello che nel passato può aver dato fortunosamente, oggi è ricavabile correttamente seguendo un'altra via, specialmente attraverso il PLV.

Piuttosto c'è da considerare la sua indubbia efficacia storica. Abbiamo visto che nella sua applicazione esso viene tradotto di fatto nel PLV (e non potrebbe essere altrimenti, trattandosi quasi sempre di corpi vincolati); il quale è un valido principio metodologico per costruire la teoria meccanica. Secondo la mia valutazione del PLV, ciò dimostra che il PdA deve essere trattato al di fuori del formalismo newtoniano o euleriano.

Allora sottolineo che anche la successiva fondazione di L. Carnot, che tratta come basilari quegli urti che sono l'argomento acclarato della meccanica di d'Alembert, è alternativa a quella di Newton, perché anche essa dipende dal PLV (e anche perché riesce a dare gli invarianti del moto con una tecnica algebrica originale, in alternativa alle equazioni differenziali del secondo principio di Newton). In più L. Carnot finalmente riesce a dare una teoria generale dell'urto mediante l'introduzione dell'indice di elasticità. Infine sa estendere il caso degli urti al caso continuo.

Allora la 2° equazione di L. Carnot costituisce un *completamento* del PdA molto chiaro, ben di più della famosissima interpretazione di Lagrange. Quest'ultima di fatto generalizza il PLV restando dentro il solo caso del continuo (quindi non nel caso dell'urto considerato originariamente da d'Alembert); inoltre svilisce il PdA ad una semplice uguaglianza matematica.

Con questo nuovo punto di riferimento storico, la teoria di L. Carnot, si possono eliminare molte oscurità dalle quali è circondata la trattazione dell'urto da parte di d'Alembert. Infatti questo completamento suggerisce subito una interpretazione del PdA: d'Alembert ha cercato una legge generale (come la 2° equazione di L. Carnot) senza riuscirci, perché ancorato all'idea del corpo duro e al principio dell'equilibrio dei cartesiani (che lo pensavano distintamente dal PLV).

Tutto ciò indica che la tradizionale fama del PdA è usurpata. Se poi il PdA ha avuto un ruolo storico, questo appare molto confusamente; la sua valutazione richiederebbe un'interpretazione dettagliata del pensiero dei vari teorici (in particolare di Lagrange) che hanno dato nuovi fondamenti alla teoria meccanica. Comunque i suoi validi completamenti, da parte di L. Carnot e di Lagrange, non giustificano l'usuale menzionare, in maniera oscura e malfondata, il PdA.

9. Ipotesi sull'origine del Principio di d'Alembert

Ho già espresso alcune valutazioni sull'origine del PdA nel corso della precedente analisi. Voglio aggiungere che in definitiva il PdA può dipendere da una premessa "naturale", che non è stabilita espressamente dagli autori; essa aveva il compito di risolvere un problema basilare della teoria, cioé il rapporto fisica-matematica della meccanica. Questa ipotesi è manifestamente radicata in tutti gli autori del tempo ed è ricorrente nelle interpetazioni del PdA precedentemente riportate: *la dinamica deve essere vista in continuità con la statica*. Per Newton, che considerava la dinamica dopo la geometria, la cinematica e la statica, questa ipotesi si esprimeva con due punti. Un punto era il concetto di corpo duro, che traduceva in dinamica le stesse caratteristiche (forma fissa per ogni sollecitazione) del corpo rigido della statica. Altro punto è l'estensione del concetto di forza statica (misurata con un dinamometro) al concetto di forza dinamica (non misurabile, se non indirettamente attraverso *ma*).

Invece per Leibniz l'ipotesi comportava una affermazione innanzitutto sulle velocità; il caso statico (v=0) doveva essere ottenuto come limite di quello dinamico, anzi come il caso del moto incipiente (dv). Questa ipotesi di continuità tra statica e dinamica era appoggiata da lui sulla "legge dell'equilibrio di Torricelli", cioè sull'anticipazione del PLV nel caso della forza peso. Inoltre, egli non accettava l'idea di corpo perfettamente duro per due ragioni: una metafisica, a causa della sua famosa "legge di continuità della Natura" (la natura non fa salti, neanche intellettuali) e una fisica, perché egli considerava la dinamica fondante la statica, quindi il corpo rigido in statica non ci può dire nulla in dinamica; (Drago La Sala, 1999) dove piuttosto egli sosteneva l'idea di corpo elastico; che nell'urto permette la continuità dei moti e la conservazione dell'energia.

Ora vediamo come questa ipotesi di continuità tra statica e dinamica è applicata da d'Alembert. Egli segue l'idea di corpo duro e si rifà a Cartesio con quella legge "dell'equilibrio" che aveva causato la famosa polemica sulla *vis viva*; polemica che d'Alembert sbrigativamente liquidò come di una "perfetta inutilità".(XVII) Per lui l'urto, che è da riferire ai corpi duri, generalizza, in termini di equilibrio, la statica col seguente percorso: se due corpi hanno massa e velocità uguali, dopo l'urto frontale restano immobili (statica); egli inoltre sostiene che l'equilibrio si avrà anche per tutti i casi nei quali *mv=MV*. Con ciò egli frede di aver posto le basi per una teoria completa dell'urto. Siccome poi in qualche macchina semplice il caso dell'equilibrio statico di due corpi con masse differenti suggerisce che anche il moto incipiente abbia la legge della proporzione inversa della massa con la velocità ($mv = MV$), egli suppone, seguendo in ciò i cartesiani, che questa stessa legge valga in generale; per cui la pone come suo terzo principio. Poi il suo PdA ribatte il suo secondo principio, che in effetti è il suo contributo specifico: la decomposizione vettoriale delle quantità di moto; ma in più con l'ambiguità che nel caso continuo lo si possa considerare come il PLV.

A questo punto egli può aver avuto la sensazioen di aver "superato" i principi newtoniani e di aver anche incluso ogni valido principio della meccanica. Lo manifesta quello che scrive nello *scolio* (182-183) che tratta il suo "principio fondamentale dell'equilibrio", cioè il PLV:

"..in generale la conservazione delle forze vive dipende da questo principio, [il quale afferma] che quando due forze si fanno equilibrio le velocità dei punti dove sono applicate, considerate nella direzione delle forze, sono in ragione inversa delle loro stesse forze. Questo principio è riconosciuto da molto tempo dai "geometri" come Principio fondamentale dell'equilibrio: mai nessuno, che io sappia, ha dimostrato questo principio in generale, ... Il principio dell'equilibrio del quale stiamo parlando, si può dimostrare facilmente: o le forze sono uguali e in direzione opposta, o sono applicate ai bracci differenti di una leva o, infine, la forza risultante passa per qualche ostacolo fisso e insormontabile, come nel problema X. Tutto quello che abbiamo detto sopra, mi sembra sufficiente per dimostrare i primi due casi: riguardo all'ultimo caso, è chiaro che le forze decomposte nella direzione perpendicolare alla forza risultante, sono uguali e anche le velocità nella stessa direzione saranno uguali. Da ciò è agevole ricavare la dimostrazione cercandola su qualche caso particolare, per esempio, sul caso del problema X, dove essa è facilmente ricavabile."

Perciò d'Alembert, risolvendo il problema dinamico dell'urto con l'idea (di Wallis e Newton) del corpo duro e quindi riportando l'urto alla statica, con i suoi principi secondo e terzo, crede di aver incluso, mediante la formula tipica dei cartesiani ($mv = MV$), il principio generale dell'equilibrio, il PLV. Dato questo progetto onnirisolutivo, di seguito egli dice che può dimostrare anche il teorema delle forze vive, mediante delle considerazioni dinamiche sulle forze.

Per comprendere l'origine del PdA in d'Alembert, allora procediamo sostanzialmente all'inverso di questo processo intellettuale. Egli ha scelto l'urto, e non il moto continuo di Newton, come il fenomeno fondante tutta la teoria, al seguito della tradizione continentale di Cartesio e Leibniz. In questo caso ha cercato quella legge principio generale per l'urto che i Cartesiani avevano cercato invano; lasciando in eredità solo la loro equivoca versione del "principio dell'equilibrio". La mia ipotesi è che il principio al quale ricorre d'Alembert è in effetti un tentativo di potenziamento del principio cartesiano mediante l'aggiunta del PLV, ma trasfigurato. Più precisamente, egli ha cercato di generalizzare il PLV ad un principio formale che fosse della massima generalità; per prima cosa, in modo che non fosse più "contingente"; perchè i principi di questo tipo, come d'Alembert dice nell'Introduzione, "... rovinerebbero la certezza della meccanica e la ridurrebbe a essere solo una scienza sperimentale". (XI-XII) Allora, per estrarre la parte più "universale" e "razionale" del PLV d'Alembert ne ha eliminato le forze-causa, quegli "Esseri oscuri e metafisici, capaci di spandere le tenebre su una scienza già chiara di per sè.";(XVI) per restare con le sole reazioni vincolari, intese come *Dmv*. Con questa grandezza fisica ha voluto esprimere esemplarmente l'equilibrio del PLV con i corpi duri (che si fanno equilibrio nell'urto quando hanno quantità di moto uguali). Allora i vari *Dmv* o *mv* o *v* sono stati detti "moti"; e su di essi egli ha cercato una legge generalissima, sulla base della novità del calcolo vettoriale, quale tecnica matematica sostitutiva, nei fondamenti della meccanica, delle equazioni differenziali di Newton.

Non ci si meravigli dell'astruso processo di astrazione che attribuisco ipoteticamente a d'Alembert. Esso aveva un illustre precedente, che tuttora tormenta le menti degli studenti con idee fuori della sperimentabilità: il newtoniano "principio di azione e reazione". Questo principio per essere sperimentale dovrebbe specificare il tipo di azione (forza?) a cui si riferisce; inoltre, una volta che si è sperimentata un'azione su di un corpo, esso dovrebbe indicare come trovare le reazioni (in che luoghi e su quanti corpi); per la qual cosa esso dovrebbe specificare anche la legge di interazione (se attrattiva o repulsiva, se dipendente da una potenza del raggio e quale). Il principio non dice nulla di tutto questo, ma esprime solo un concetto antropomorfo (tipico dei litigi tra maschi). Dopo tre secoli che lo usiamo, a noi oggi è chiaro che Newton ha generalizzato metafisicamente la sua intuizione dal caso dell'attrazione gravitazionale, che per Newton era l'Interazione universale, a qualsiasi interazione; che inoltre ha dilatato il caso di due soli corpi a qualsiasi numero di corpi; e xche si è riferito ad un generalissimo concetto di "azione" che non ha definito. Con il precedente di questo cattivo esempio, non è strano che d'Alembert abbia poi cercato di estrarre da un principio, il PLV, delle affermazioni devitalizzate, che però a lui potevano apparire metafisicamente generalissime; (e che in effetti poi sono approdate ad un calcolo nuovo, quello vettoriale).

BIBLIOGRAFIA

F. Bevacqua: *Analisi storico-critica della meccanica di d'Alembert*, Tesi di laurea in Fisica, Univ. "Federico II", Napoli, a.a. 1998-99.

J. M. Briggs: "J. d'Alembert", in C.C. Gillispie (ed.): *Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner's Sons, 1971, vol. 1, 110-117.

P. Casini: "D'Alembert: l'economia dei principi e la << metafisica delle scienze>>", *Riv. Filos.*, **75** (1984) 45-62.

L. Carnot: *Principes fondamentales de l'équilibre et du mouvement*, Crapelet, Paris, 1803.

E. Cassirer: *Storia della Filosofia Moderna*, Einaudi, Torino, vol, 3, 1953.

J. d'Alembert: *Traité de dynamique* (1743), Culture et Civilisation, Bruxelles, 1967.

J. d'Alembert: "Dynamique" in D. Diderot, J. Le Rond d'Alembert (ed.), vol. V.

J. d'Alembert: "Dureté" in D. Diderot, J. Le Rond d'Alembert (ed.), vol. V, 172.

J. d'Alembert: *Traité de l'équilibre et du Mouvement des Fluides*, Paris, 1770.

J. Dhombres et P. Radelet-de Grave: "Contingence et nécessité en mécanique. Etude de deux textes inédits de Jean d'Alembert", *Physis*, **28** (1991) 35-107.

D. Diderot e J. Le Rond d'Alembert (ed.): *Éncyclopédie française*, Paris, 1754.

A. Drago: "The principle of virtual works as a source of two traditions in 18th Century Mechanics", in F. Bevilacqua (ed.): *History of Physics in Europe in 19th and 20th Centuries,* SIF, Bologna, 1993, 69-80.

A Drago: *La Meccanica di Leibniz*, 2000 (in corso di stampa).

A. Drago e A. La Sala: "La meccanica di Leibniz come alternativa alla meccanica di Newton", in P. Tucci (ed.): *Atti del XVI Conv. di Storia della Fisica e dell'Astronomia*, 1996, 383-402.

A. Drago e A. La Sala: "La dinamica dell'urto in Leibniz", *Giornale di Fisica*, 1999 (in stampa).

R. Dugas: *Histoire de la mécanique*, Griffon, Neuchatel, 1950.

C. Fraser: "J.L. Lagrange's Early Contribution to the Principles and Methods of Mechanics", *Archive for History of Exacts Sciences*, **28** (1983) 197-242**.**

C. Fraser: "D'Alembert's Principle: The original foundation and application in J. d'Alembert's *Traité de dynamique(1743)*", *Centaurus*, **28** (1985) 31-61.

T.L. Hankins: *J. d'Alembert, Science and Enlightenment*, Claredon Press, Oxford, 1970.

E. N. Hiebert: *Historical roots of the principle of conservation of energy,* University of Wisconsin, Madison, 1962.

J.L. Lagrange: *Mécanique analytique*, Blanchard, Paris, 1965.

G.W. Leibniz: "Brevis Demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum circa legem naturalem, secundum quam volunt a Deo eandem semper quantitatem motus consevari, qua et in re mechanica abutuntur", *Acta Eruditorum* di Lipsia, ottobre 1686 (trad. in Drago 2000).

R. B. Lindsay e H. Margenau: *Foundations of Physics*, Dover, New York, 1963.

E. Mach: *La meccanica nel suo sviluppo storico critico*, Boringhieri, Torino, 1968.

G. Maltese: *Storia di F=ma*, Olschki, Firenze, 1992.

I. Newton: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, London, 1687.

M. Paty: "D'Alembert et la théorie physique", in AA.VV.: *J. d'Alembert, portrait a plusieurs voix*, Centre International de Synthèse, Edition des Archives contemporaines, Paris, 1989, 231-260.

W. L. Scott: *The conflict between atomism and conservation theory 1664-1860*, Elsevier, New York , 1971.

A. Sommerfeld: *Meccanica*, Sansoni, Firenze, 1961.

C. Truesdell: *The rational Mechanics of Flexible or elastic bodies 1638-1788*, Introduction to L. Euler, *Opera omnia*, Fussli Turici, 1960.

Y. Szabo: *Geschichte der Mechanicher Prinzipien*, Birkhaueser, 1979.