

Anna Maria Lombardi

Il contributo di Poincaré al dibattito sulla struttura della luce bianca

Introduzione

Viene proposta l'analisi di un articolo di Henry Poincaré, pubblicato sui *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* nel 1895. Tale lavoro rappresenta il contributo dello scienziato alla discussione sulla struttura della radiazione non-monocromatica, insorta successivamente agli articoli di Gouy e di Lord Rayleigh del 1886.

Poincaré mette efficacemente in guardia contro l'eccessiva disinvoltura con cui in quegli anni venivano svolti alcuni passaggi matematici particolarmente critici, mostrando a quali paradossali conclusioni si potesse giungere con un tale modo di procedere. Egli propone una propria soluzione al problema della luce bianca, in cui viene introdotta, come corrispondente analitico del reticolo ottico, una funzione a gradino.

Il contesto scientifico

Il lavoro di Poincaré che si considera, "Sur le spectre cannelé"¹, apparve sui *Comptes Rendus* nel 1895. In quegli anni vi era un acceso dibattito tra coloro che erano coinvolti nell'interpretazione degli spettri da radiazione non monocromatica, al fine di ottenere indizi sulla struttura della luce. Nella seconda metà degli anni '80 i lavori di Gouy² e di Lord Rayleigh³ avevano dimostrato come non fosse possibile, dall'osservazione delle figure di interferenza, dedurre per la luce reale (ovvero non monocromatica) una natura periodica⁴. Questo perché, utilizzando l'analisi di Fourier, si prevedevano figure di interferenza qualunque fosse la forma dell'impulso luminoso incidente, purché il potere risolutivo fosse sufficiente. Nel 1894, A. Schuster aveva poi resa esplicita⁵ l'equivalenza dal punto di vista matematico dei due modelli che descrivevano la luce reale o come una rapida successione di impulsi scorrelati o come una sovrapposizione di infinite onde monocromatiche.

Più in generale, era diffusa l'esigenza di individuare a quali tipo di fenomeni, ovvero a quali classi di funzioni, fosse possibile applicare il teorema di Fourier. Un articolo di rassegna sugli sforzi di quegli anni, di W. Williams, fu pubblicato sul *Philosophical Magazine* nel 1896⁶.

Ecco quindi lo sfondo in cui si inquadra l'articolo di Poincaré: il dibattito sulla natura della luce e le riflessioni sulla necessità di individuare gli esatti limiti in cui fosse lecito utilizzare l'analisi di Fourier⁷. Sulla struttura della luce bianca, Poincaré aveva scritto, nel 1889, che "di tutte le teorie fisiche, la meno imperfetta è quella della luce basata sul lavoro di Fresnel e dei suoi successori."⁸. Sembrava quindi soddisfatto della descrizione ondulatoria della natura della luce. Eppure, nell'articolo del 1895, anche Poincaré dimostrava di aver preso in seria considerazione le critiche mosse da Gouy e Rayleigh, offrendo un proprio contributo al dibattito.

In particolare, questa analisi dell'articolo di Poincaré si sofferma su tre punti: l'esplicitazione dei passaggi matematici critici, l'osservazione di alcuni dei paradossi a cui portava l'applicazione senza condizioni dell'analisi di Fourier, l'introduzione della funzione caratteristica come corrispondente analitico del reticolo.

Esplicitazione matematica del problema della luce bianca e osservazione dei paradossi.

Poincaré riprende il formalismo dell'articolo di Gouy, ma rendendo espliciti alcuni dettagli che egli ritiene fondamentali. La tecnica di Fourier, difatti, era utilizzata con tale familiarità che spesso molti passaggi, come pure gli estremi di integrazione, restavano impliciti negli articoli di quegli anni. Ma ciò, secondo Poincaré, poteva dare origine a pericolose ambiguità, nei casi delicati quale quello dell'interferenza.

Un generico impulso veniva descritto da:

$$x = F(t)$$

ma, se qualunque funzione era esprimibile tramite Fourier, il movimento luminoso si poteva dunque considerare come dovuto alla sovrapposizione di una infinità di onde semplici di periodo $2\pi/q$. Lo

spettroscopio era l'analogo fisico dell'integrale di Fourier⁹, in quanto separava quelle infinite componenti semplici, ciascuna di ampiezza $|f(q)|dq$. Se si facevano interferire due raggi con differenza di cammino ottico h si otteneva un impulso della forma:

$$\mathbf{x} = F(t) + F(t+h)$$

L'effetto dello spettroscopio era ancora di isolare la radiazione di periodo $2\pi/q$, la cui ampiezza era però ora: $|f(q)| |1+e^{iqh}| dq$.

Il fattore $|1+e^{iqh}|$ esprimeva proprio la modulazione, variabile con h .

Si poteva anche esprimere l'ampiezza della radiazione come modulo di:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(t) + F(t+h)] e^{-iqtdt} &= \\ &= \frac{dq}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-iqtdt} (1 + e^{iqh}) dt. \end{aligned}$$

tenendo conto del fatto che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t+h) e^{-iqtdt} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-iq(t-h)} dt$$

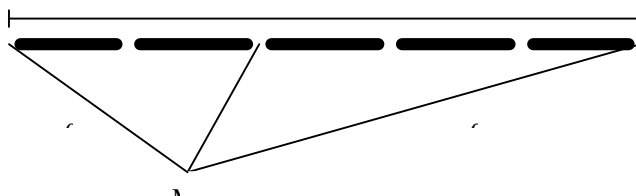
Si aveva quindi un'ampiezza modulata, e pertanto si osservavano frange di interferenza, qualunque fosse la forma del raggio incidente. A partire dal 1886, osservando questo fatto, era stata formulata la "ipotesi di Gouy", secondo la quale la luce sarebbe addirittura potuto essere stata l'effetto della rapida successione di impulsi del tutto scorrelati tra loro. La deduzione della natura ondulatoria della luce a partire dall'osservazione di frange di interferenza sembrava, così, non più giustificata.

Poincaré avvertiva, però, che questo modo di descrivere l'esperimento portava a conseguenze paradossali. Se la luce reale fosse stata composta da onde monocromatiche con ampiezza finita, difatti, queste, costanti nel tempo, avrebbero fatto sì che la luce sarebbe stata visibile sia prima dell'accensione, sia dopo lo spegnimento della sorgente.

Poincaré non era solo nel rendersi conto di quanto fosse delicato il problema dei limiti dell'applicazione della tecnica dell'integrale di Fourier. Si è già nominato l'articolo di W. Williams, pubblicato sul *Philosophical Magazine* nel 1896¹⁰. E' possibile citare, come ulteriore esempio, un lavoro di rassegna pubblicato nel 1901, che testimoniava dello stato dell'arte nell'ambito del dibattito sulla luce bianca. L'articolo¹¹, firmato da Orso Maria Corbino, riportava tra le altre la posizione di cui era portabandiera Emmanuel Carvallo. Secondo lo scienziato, alla radiazione reale non era possibile applicare Fourier poiché quella era costituita da infinite discontinuità.

Si è visto come la prima parte dell'articolo di Poincaré mettesse in guardia da un'eccessiva scioltezza nell'utilizzo della tecnica di Fourier. La seconda parte voleva invece mostrare come, dall'osservazione di frange di interferenza, fosse effettivamente possibile ottenere informazioni sul raggio incidente, e in particolare sulla presenza di quelle che Poincaré chiamava le "permanenze".

Schema del reticolo



Legenda:

P = generico punto del reticolo

M = generico punto dello schermo

θ = tempo impiegato dal raggio da P a M

$d\omega$ = intorno di P in \mathfrak{R}^2

L = lunghezza totale reticolo

Introduzione della funzione caratteristica

Poincaré introduceva una nuova schematizzazione matematica del processo di interferenza ottenuta tramite spettroscopio. Questa modellizzazione sfruttava una funzione a gradino, y , che valeva "1" dove la superficie del reticolo $d\omega$ era trasparente, e "0" altrove. Applicando il teorema di Huygens, si poteva scrivere:

Poiché y era una funzione periodica, si poteva scrivere come serie di Fourier:

$$y = \hat{A} \sum_n A_n e^{iqn} \quad \mathbf{x} = \int F(t - q) y d\omega$$

Sostituendo lo sviluppo nell'integrale, si scriveva l'impulso come sovrapposizione di infinite onde, multiple secondo n della frequenza fondamentale.

$$\mathbf{x} = \sum_n A_n e^{niqt} \int_{q_0}^{q_1} F(t - q) e^{-niq(t-q)} dq$$

Le radiazioni avevano periodo $2\pi/nq$, la vera novità era che ampiezza e fase non erano più costanti, ma variavano lentamente. Poincaré considerava ora significative solo le componenti con $n=\pm 1$. In questo modo otteneva:

$$\int_{t-q_1+h}^{t-q_0+h} F(t) e^{-iqt} dt = \int_{t-q_1}^{t-q_0} F(t) e^{-iqt} dt$$

relazione che legava la presenza di frange di interferenza ad una reale "permanenza" (ovvero ad una struttura periodica) nell'impulso incidente. Questo risultato veniva infine confrontato con la relazione ricavata in precedenza, e che Poincaré diceva frutto della "teoria incompleta":

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t+h)e^{-iqt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)e^{-iq(t-h)} dt$$

Le due relazioni erano equivalenti solo in particolari condizioni (al limite di $\theta_0 = -\infty$ e $\theta_1 = +\infty$, oppure quando h era trascurabile rispetto a $\theta_1 - \theta_0$ ovvero il numero dei tratti del reticolo era troppo grande rispetto al numero dei periodi di cui differivano i raggi fatti interferire). In generale, però, mentre la seconda era una semplice tautologia, Poincaré considerava la prima come la dimostrazione che, realmente, l'osservazione di frange di interferenza per la sovrapposizione di due raggi incidenti provava una struttura periodica degli stessi.

Conclusioni

Poincaré contribuisce al dibattito sulla struttura della luce bianca degli ultimi due decenni del secolo scorso, in primo luogo evidenziando la necessità di formalizzare rigorosamente i passaggi matematici. Se la tecnica di Fourier era diventata un utile strumento in moltissimi campi, essa poteva presentare delle insidie, che Poincaré esemplifica con un paradosso. Senza rinunciare al teorema di Fourier, ma applicandolo in maniera differente e "più moderna", egli riesce a ottenere una nuova dimostrazione della natura periodica della radiazione che produce interferenza. Nella propria descrizione del processo di interferenza tra due raggi di luce non monocromatica egli introduce una funzione a gradino, analoga di quella introdotta da O. Heaviside nella trattazione dei fenomeni elettronici.

Pochi anni dopo la pubblicazione dell'articolo di Poincaré, nel 1900, sarà individuata da Hilbert la classe delle funzioni a cui è lecito applicare la tecnica di Fourier, ovvero lo spazio L^2 . Per quanto riguarda invece l'utilizzo della funzione caratteristica in fisica, si osserverà una sua rapida diffusione. Si avanza l'ipotesi che questa abbia avuto una parte importante nella successiva adozione della formalizzazione tramite proiettori della meccanica quantistica.

Bibliografia

- Corbino, O.M.(1901). "Sulla costituzione della luce bianca", *Il Nuovo Cimento*, 1901, 5's., **2**: 161-172.
- Gouy, G.J. (1886). "Sur le mouvement lumineux" *Journal de Physique*, 1886, 2' s., **5**: 354-362.
- Larmor, J. (1905). "On the constitution of the natural radiation.", *Philosophical Magazine*, 1905, 6' s., **10**: 574-584.
- Lombardi, A. M. (1998a). *Propagazione di radiazione non monocromatica: radici classiche della meccanica quantistica*. Tesi di dottorato, Padova, 1998.
- Lombardi, A. M. (1998b). "Sul movimento luminoso, un articolo del 1886", *Atti del XVII Congresso nazionale di Storia della Fisica e dell'Astronomia*, Como, 1997: 221-232.
- Poincaré, H. (1889). *Théorie mathématique de la lumière*, **1**.
- Poincaré, H. (1895), "Sur le spectre cannelé", *Comptes Rendus des séances de l'Académie des sciences*, CXX, 1895, **14**: 757-762.
- Rayleigh, Lord (1888). "Wave Theory of Light", sta in *Encyclopædia Britannica*, 1888, **7**: 424-459.

Schuster, A.(1894). "On Interference Phenomena." *Philosophical Magazine*, 1894, 5' s., **37**: 509-545.

Wheaton, B. R. (1992). *The tiger and the shark, empirical roots of wave-particle dualism*, (Cambridge University Press), 1992: 40-43.

Williams, W.(1896) "On the convergency of the Fourier's Series." *Philosophical Magazine*, 1896, 5's., **42**: 125-148.

NOTE

¹ (Poincaré,1895).

² (Gouy,1886).

³ (Rayleigh,1888).

⁴ (Wheaton,1992).

⁵ (Schuster,1894).

⁶ (Williams,1896).

⁷ (Lombardi,1998a).

⁸ (Poincaré,1889).

⁹Pochi anni più tardi, J. Larmor scriveva: "The Fourier mathematical process, as also the ideal grating..., operates by simply selecting and piecing together elements existing in the original radiant disturbance, so as to isolate periodic wave-trains that on superposition would reproduce the form of the original vibration-curve...though the original Fourier expansion of the pulse is always analytically legitimate and definite, it is not always allowable, without scrutiny as to convergency, thus to operate on its separate terms and add". (Larmor,1905).

¹⁰ (Williams,1896).

¹¹ (Corbino,1901).