S. D'Agostino[1] S. Leva[2] A.P. Morando[2]

PER UNA STORIA DELLA TEORIA DELLE RETI ELETTRICHE

La Teoria delle Reti Elettriche nacque come conseguenza scontata della pila voltiana e dalla legge di Ohm. Estranea ad ogni lettura campistica ed energetica, essa fu dapprincipio il risultato di un volonteroso quanto fortunato empirismo. Ben presto, però, sotto l'influenza di un Elettromagnetismo sempre più consolidato, condizionata dalle richieste di una Tecnologia in rapida evoluzione, essa dovette trasformarsi radicalmente. In senso applicativo, per indagare la corrente alternata, la dinamica delle reti di potenza, l'interazione magneto-elettrica delle macchine. Ed in quello fondazionale, nel momento in cui, consolidatosi il modello campistico, l'includervi l'"estranea" lettura circuitale poteva costituire un'esigenza conoscitiva sempre meno rinviabile.

In questo senso la Storia della Teoria delle Reti, colta nella sua costante ricerca di un'identità postmaxwelliana e vista come il risultato di un'osmosi interdisciplinare con competenze parallele, è la storia della moderna ingegneria elettrica scientifica. Del suo rapportarsi al Calcolo e all'Energetica, alla Teoria dei Campi e dei Sistemi; al virtuale, nel momento in cui nei laboratori di matematica il caos deterministico ed i programmi 3D promettono di fare del lascito maxwelliano un'idea quotidianamente possibile.

A tale evoluzione, innescata dalla pila di Volta e dominata dal costante bisogno di una capacità evocativa capace di tradurre un campo in un circuito, sono dedicate le note presenti.

Le origini [1¸4]

Il 1826 fu *annus mirabilis* per la comunità degli elettrici. Proprio in quell'anno, infatti, G. S. Ohm, sotto l'influenza degli studi compiuti da J.B. Fourier sulla diffusione del calore, enunciò la sua famosa legge. Con essa, quasi repentinamente, prendeva il via la *Teoria dei circuiti*. In seguito, nel 1841, J.P. Joule pervenne all'omonima legge sulla dissipazione legata ai fenomeni conduttivi. Nel 1847 fu poi la volta di G. Kirchhoff, il quale dedusse i due omonimi principi.

In base a questi, allorché si connettono tra loro più componenti in modo da costituire una rete di generatori e di resistori, si vengono a stabilire, in base alla particolare configurazione realizzata, vincoli algebrici immediati, di *nodo* e di *maglia*, fra le tensioni e le correnti in gioco. Tali relazioni, associate al *legame tensione-corrente* proprio di ciascun dispositivo, costituiscono, secondo il linguaggio attuale, il *modello matematico della rete*.

Lo schema in tal modo ottenuto evidenzia due aspetti, tra loro indipendenti, già affioranti dagli scritti dello stesso Volta: la struttura delle connessioni tra componenti e la caratterizzazione di ciascuno di questi. Della prima si sarebbe occupata la cosiddetta *topologia delle reti*[3]; della seconda il complesso di discipline, quali l'elettromeccanica, l'elettronica, l'automatica, l'energetica, etc. che, nel corso di questo secolo, sono andate rapidamente sviluppandosi a partire dal tronco primario dell'elettromagnetismo.

Così impostata, la teoria delle reti stazionarie progredì rapidamente. Nel 1853 H.L.F. von Helmholtz enunciò il *principio di sovrapposizione* e quello, ad esso legato, del *generatore equivalente*. Quest'ultimo, passato pressoché inosservato, sarà ripreso ed elaborato nella sua forma attuale nel 1883 da L.C. Thévenin. La sua versione duale, meno immediata, sarebbe stata infine formalizzata presso i Laboratori Bell, nel 1926, da E.L. Norton.

Il regime variabile

Nel frattempo, abbandonato il campo elettromotore voltiano, di tipo stazionario, si passò, con Faraday, al più generale ed impegnativo regime variabile. Almeno all'apparenza, nessun inconveniente sembrò tuttavia frapporsi all'estensione spontanea delle leggi già enunciate in precedenza. E la conferma si ebbe già nel 1853 quando, in un primo studio dei cavi sottomarini, Lord Kelvin formalizzò lagrangianamente un'equazione circuitale *a due energie* del tipo seguente:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{L}{2}q'^2+\frac{1}{2C}q^2\right]=-Rq'^2$$

nella quale, provvisoriamente, la futura induttanza compariva come una non meglio identificata *capacità dinamica*.

Per la verità l'approccio, pur formalmente non dissimile da quello attuale, risultava, di fatto, ampiamente inadeguato nella definizione dei suoi fondamenti teorici e dei corrispondenti limiti di impiego. Tuttavia, almeno in quei primi anni, complice il modesto valore delle frequenze in gioco, tali problematiche, ancora legate all'esigenza di un chiarimento e di un rigore formale confinabili entro ristrette aree specialistiche, risultarono estranee all'urgenza dell'ambito applicativo.

I pionieri dell'elettromagnetismo ottocentesco. Da sinistra: Ampére, Volta, Oersted, Faraday, Maxwell, Arago. Negli anni successivi alla pubblicazione della Dynamical Theory, e non sempre interamente a torto, l'Elettrotecnica guardò al pensiero maxwelliano più che altro come ad una paper theory del tutto inessenziale per le concrete esigenze proprie di un'attività industriale

Solo nel seguito, superata la prioritaria urgenza operativa determinata dall'espansione industriale in atto, sarebbe stato ragionevole affidare ai fisici matematici il compito di formalizzare tale approccio con il rigore e la generalità che gli erano dovuti. Ciò sarebbe accaduto, già a partire dal 1864, con la *Dynamical Theory* maxwelliana. Da questa, in particolare, sarebbe apparso in modo evidente come le equazioni del campo elettromagnetico non appartenessero ai soli teorici, ma fossero invece in grado di fornire risposte rigorose anche alle domande che, in modo crescente, venivano poste dai tecnici.

In realtà, in quegli anni, e non sempre interamente a torto, l'*Elettrotecnica* guardò al pensiero maxwelliano più che altro come ad una *paper theory* del tutto inessenziale per le concrete esigenze proprie di un'attività industriale. Solo inizialmente tale atteggiamento risultò però condivisibile. A lungo andare, infatti, la miopia legata ad una posizione di tale tipo finì col privare la nascente *Ingegneria Elettrica* della benefica osmosi con una *Scienza Elettromagnetica* invece già ampiamente consolidata, capace in quanto tale di precisare con chiarezza metodi ed obiettivi propri della parallela area applicativa.

Quanto al caso specifico della *Teoria delle reti*, essa proseguì per anni, e con eccellenti risultati concreti documentati dalla formulazione delle prime equazioni integro-differenziali ohmico-induttivo-capacitive, nella propria autonoma ricerca.

Ciò accadde non senza avvertire gli effetti della voluta scissione dalla Dynamical Theory. Un caso esemplare si ebbe con G.Prescott, un telegrafista. Questi, calcolando il rapporto v(t)/i(t), affermò che: «*it is a well known fact that alternating currents do not follow Ohm's law, and nobody knowns what law they follow*». Era il 1888: da un quarto di secolo Maxwell aveva mostrato che «*the AC obeys Ohm's law*».

La crisi fondazionale [5, 7]

Tale autonomia risultò legittima fino al 1888 quando, scontratosi con un'esperienza hertziana sbrigativamente giudicata come estranea, l'approccio empirico alle reti non fu costretto a subire un'improvvisa, quanto inaspettata, battuta d'arresto.

Nel verificare sperimentalmente il contenuto propagativo implicito nelle equazioni di Maxwell, Hertz fece ricorso alla formula di Kelvin $f_n = 1/2\pi\sqrt{LC}$ relativa al calcolo della frequenza naturale. Nell'elaborarla, egli utilizzò le relazioni di Neumann, valide a rigore per il solo regime stazionario.

Commise in tal modo, e la cosa non sfuggì ad un Poincarè particolarmente critico, il grave errore metodologico di dimostrare la validità di una teoria nuova servendosi di relazioni che, a priori, erano proprie solo di quella vecchia.

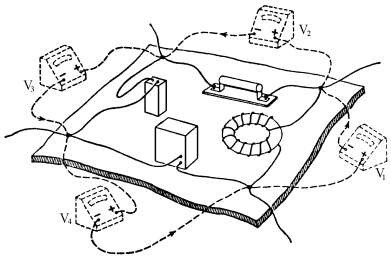
Sul piano concettuale le critiche mosse, più che legittime, rischiavano di invalidare l'attesa verifica della correttezza del pensiero maxwelliano. E con essa, la legittimità degli approcci circuitali intuitivi fino a quel momento adottati per lo studio del regime variabile. Sarà una lettera di Heaviside ad Hertz del *13 agosto 1889* a tranquillizzare il fisico matematico tedesco. E con lui, per quanto del tutto inconsapevolmente, l'intera comunità degli elettrici dell'epoca. In essa, a fronte delle riserve avanzate da Poincarè, si precisava come l'estensione hertziana al regime variabile delle formule stazionarie di Neumann potesse ritenersi correttamente applicabile a condizione che «*le onde elettromagnetiche in gioco fossero più lunghe*» dell'oscillatore stesso. Grazie al ricorso preliminare alla più generale Teoria dei Campi, la Teoria delle Reti, fino a quel momento ritenuta del tutto autonoma da questa, trovava dunque la sua prima rigorosa condizione di legittimità.

Verso una legittimazione di tipo campistico [8¸14]

Per parte sua Heaviside anticipava quelle che in seguito sarebbero state le *condizioni di Abraham*[4], attualmente usate in Elettrotecnica per accertare, con l'instaurarsi di un *regime quasi-stazionario*, la legittimità di una rappresentazione circuitale dei fenomeni elettromagnetici. Secondo tale lettura l'approccio circuitale dà risultati corretti solo nel caso in cui la lunghezza d'onda λ associata alla frequenza più veloce in gioco sia molto maggiore del diametro δ della sfera minima contenente l'intero circuito[5].

In seguito il necessario lavoro di chiarificazione, compiuto in larga parte su una formulazione ritardata di quelle stesse formule di Neumann incriminate da Poincaré, non a caso vissuto da alcuni elettrici come un "letto di procuste", non sarebbe risultato né facile né immediato. In ogni caso, da tale ricerca sarebbe apparso definitivamente chiaro come l'estensione al regime variabile delle relazioni di Ampére, Neumann, Kirchhoff etc., fino allora indiscriminatamente compiuta dai tecnici come se il regime fosse formalmente sempre stazionario, comportasse soltanto dei risultati approssimati, deducibili per via *quasi-statica* dagli integrali generali delle equazioni di Maxwell.

Negli anni successivi l'analisi fondazionale dell'approccio circuitale non avrebbe più potuto prescindere da tale consapevolezza. E, con essa, dalla necessità di dedurre in modo diretto e rigoroso la Teoria delle Reti dalle Equazioni di Maxwell, così da esplicitarne con la dovuta chiarezza sia la portata concettuale che, soprattutto, le condizioni di legittimità.



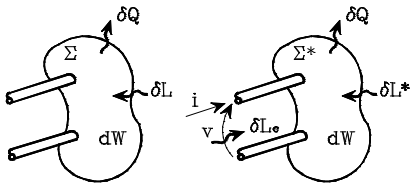
All'indomani della lettera di Heaviside ad Hertz, una rete elettrica non sarebbe più stata identificata dagli elementi bipolari che fisicamente la "costituiscono", ma dai bipoli in senso elettrico in cui, a posteriori, può essere partizionato il campo elettromagnetico corrispondente

Secondo tale lettura una rete elettrica non sarebbe più stata riguardata come la riunione fisica degli *elementi bipolari* che, delimitati da *frontiere geometriche* Σ, materialmente la costituiscono. D'ora in poi, accertate preliminarmente le condizioni di Abraham, il campo elettromagnetico oggetto di analisi sarebbe stato invece partizionato nella riunione di più componenti distinti di ordine zero, i *bipoli in senso elettrico*, ciascuno dei quali delimitato da una propria *frontiera elettromagnetica* Σ^* di estensione e configurazione variabile con le frequenze in gioco. All'esterno di ciascuna di queste superfici, viste

come luogo geometrico dei punti a densità di spostamento dielettrico e magnetico nullo, ogni componente risulta accessibile elettromagneticamente solo attraverso coppie ordinate di terminali costituenti le *porte elettriche.* In corrispondenza ad esse sono infatti definibili, nella necessaria forma univoca, le *grandezze concrete* {v(t), i(t)}. Queste, definibili solo all'esterno della frontiera elettromagnetica Σ^*, assumono il ruolo di *variabili descrittive del componente*, in quanto, per loro tramite, risulta possibile:

- tenere conto delle modalità di connessione dei componenti stessi, cioè della *topologia della rete*, mediante relazioni algebriche alle *maglie* ed *agli insiemi di taglio*:

$$\begin{cases} \sum v = 0 \\ \sum i = 0 \end{cases}$$



Essendo impervia alla radiazione, la superficie S subordina bilanci energetici del tipo seguente:* $\delta L_e + \delta L^* = \delta Q + dW_{\varepsilon\mu}$

la cui formulazione riporta al I Principio della Termodinamica.

- evidenziare, con esclusiva *equivalenza agli effetti esterni*, il comportamento elettromagnetico di ogni singolo componente mediante legami costitutivi tra le grandezze descrittive tensione-corrente:

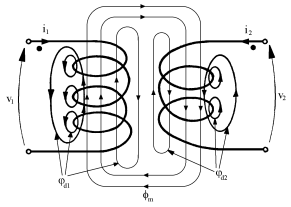
$$F\ (\mathbf{v(t), i(t)}) = 0$$

- localizzare alla sola porta elettrica, laddove viene ad essere espresso nella seguente forma univoca:

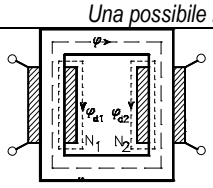
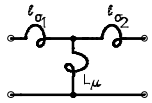
$$\mathbf{p(t) = v(t)i(t)}$$

l'intera quota parte di origine elettromagnetica dello scambio energetico complessivamente attuato dal componente;

- ricondurre all'energetica di Poynting-Heaviside un'espressione vi=p risultata fino a quel momento, nel caso di regime variabile, di derivazione incerta[6]



Una possibile mappatura del campo magnetico associato ad un mutuo induttore

		
Schematizzazione del campo magnetico tramite "linee di forza equivalenti" a concatenamento completo	*Rete magnetica interpretativa corrispondente: vi compaiono il flusso comune e i due flussi dispersi*	*Deduzione diretta, per dualità, secondo la regola di E.C. Cherry, della rete elettrica corrispondente.*

Quanto alla soluzione formale del problema, essa sarebbe giunta solo nel 1927, a cento anni dunque dalla legge di Ohm, con la pubblicazione, da parte di J.R. Carson, di *Electromagnetic theory and foundations of electric circuits theory*[7]. Oggi quel lontano lavoro di Carson, fondamento della moderna Ingegneria Elettrica Scientifica, deve considerarsi come la necessaria prosecuzione in senso circuitale della *Dynamical Theory*[8]. A partire da questa, infatti, esso mostra come, fatta eccezione per il regime stazionario, l'approccio circuitale, a rigore del tutto estraneo alle equazioni di Maxwell, sia soltanto un *analytical tool* il cui utilizzo, legittimo subordinatamente alle condizioni di Abraham, è giustificato soltanto dalle semplificazioni formali, concettuali ed operative, implicite nella sostituzione di equazioni differenziali alle derivate parziali con equazioni ordinarie, che esso porta con sé.

Le reti magnetiche [16-17]

Il calcolo dell'energia dW, di natura prevalentemente magnetica, accumulata all'interno delle frontiere elettromagnetiche Σ^*, portò con sé, una volta verificate le condizioni di regime quasi-stazionario, la necessità di rappresentare in forma circuitale, tramite le nozioni di riluttanza, induttanza e capacità, i corrispondenti campi magnetici ed elettrici.

In effetti le prime esperienze e le prime riflessioni sulla nozione di *circuito magnetico*, legate ad un approccio molto intuitivo, furono di molto antecedenti a quelle riconducibili alla condizione di Abraham. Esse possono infatti farsi risalire all'aprile del 1821, quando, dalle pagine delle *Cambridge Philosophical Transactions*, Cumming espose alcune idee sul concetto di *conducibilità magnetica*. Successivamente, con de la Rive, si pervenne alla esplicita nozione di *circuito magnetico chiuso.* Tra il '39 ed il '41, Joule giunse a correlare la potenza di un elettromagnete alla sezione del suo corrispondente circuito e parlò per primo di una *"*resistenza all'induzione" come di una grandezza proporzionale alla lunghezza del circuito magnetico stesso. Nelle sue *Experimental Researches in Electricity* Faraday, evidenziata la chiusura delle linee di forza, intuì la presenza di una causa analoga alla fem agente nei circuiti elettrici. Le stesse idee si confermarono nell'opera contemporanea di Lord Kelvin e comparvero infine, sotto forma di una sommaria e conseguente menzione di *conducibilità magnetica*, nel *Treatise*.

Nel 1873, su *Philosophical Magazine,* Rowland, introdotte le nozioni di *resistenza R alle linee di forza, forza magnetizzante M* e *numero Q di linee di forza* corrispondenti, presentò per un circuito magnetico toroidale la legge seguente:

$$Q = \frac{M}{R}$$

esplicitandone l'analogia formale con la legge di Ohm.

Nel 1882 M. Bosanquet introdusse, vista nella sua lettura attuale, la nozione di *forza magnetomotrice* M e ne confermò l'analogia formale con la forza elettromotrice E. Nel contempo egli portò avanti in modo sistematico le indagini sulla "resistenza magnetica", elaborando le relazioni per il calcolo della resistenza equivalente a partire da un circuito comunque configurato. Nel 1884 ancora Rowland intervenne introducendo la relazione M=NI ed esplicitando il legame tra la riluttanza $\mathfrak{R}$ e la geometria del circuito magnetico. Comparvero in tale occasione, per la prima volta, le "derivazioni magnetiche" intese come *flussi dispersi*.

L'evoluzione della teoria trasformatorica, basata sull'identificazione della rete magnetica associata al campo ed alla deduzione della corrispondente rete elettrica, impose un'evoluzione ancora più radicale a tali ricerche. I risultati conseguiti, con un immediato passaggio, dovuto a G.Kapp e J. Hopkinson, al modello tempo-variante, furono poi estesi al macchinario rotante.

Il contributo risolutivo si ebbe però solo nel 1949 con E.Colin Cherry, il quale dimostrò come la rete elettrica corrispondente ad una rete magnetica fosse da questa deducibile in modo diretto per dualità[9]. Mappato il campo magnetico e dedotta da questa la rete magnetica, la deduzione di quella elettrica diveniva a questo punto un'operazione immediata.

L'apporto della teoria dei campi statici [18¸24]

Fin dalla sua nascita la teoria delle reti si è avvalsa di tutte le procedure che l'analisi dei campi statici, gli unici rigorosamente formalizzabili secondo i modelli di ordine zero costituenti i *circuiti*, hanno messo a disposizione della fisica matematica.

Tra i vari metodi di indagine possono essere citati:

La *separazione delle variabili*: riporta al metodo introdotto da Fourier (1822) nel suo studio dei fenomeni di diffusione del calore. Tra i numerosi contributi riguardanti l'ingegneria elettrica può essere ricordato, per tutti, quello di Rüdemberg (1906) relativo al campo magnetico al traferro delle macchine rotanti.

Le *trasformazioni conformi:* tipiche applicazioni di tale metodo sono quelle dovute a Carter, relative al campo magnetico di un polo saliente (1900) e di una cava (1901), nonché quella di Rogowsky (1923) riguardante l'effetto ai bordi di un condensatore a facce piane e parallele.

Il *metodo delle immagini*: concepito da lord Kelvin e perfezionato, già nel suo *Treatise*, da Maxwell, ha fornito la soluzione a problemi cruciali dell'elettrotecnica. Tra i molti, può essere ricordato il calcolo della capacità di un filo posto tra piani conduttori (1921).

Il *metodo grafico*: ha come obiettivo l'integrazione per via grafica di problemi bidimensionali governati da equazioni di Laplace e di Poisson. Concepito da L.F. Richardson (1908), esso, negli anni 1909÷1934, fu ampiamente applicato ed espanso dall'opera di Lehmann. Il metodo ebbe grande diffusione, soprattutto grazie a Rogowski, in ambito industriale dove, in virtù della sua sostanziale autonomia dalle conoscenze matematiche evolute proprie della teoria dei campi, fu metodicamente applicato, fino alla fine degli anni '40, nello studio dei trasformatori.

I *metodi sperimentali*: riportano alla vasca elettrolitica, concepita da Kirchhoff (1845) e successivamente impiegata nello studio del traferro delle macchine rotanti e degli isolatori, Smoot (1905), Kennelly (1906), Fortescue (1913).

I *metodi numerici*: resi concretamente possibili con l'avvento dei moderni calcolatori, essi costituiscono il presente ed il futuro di tale approccio. Talvolta, come ad esempio nel caso della fusione termonucleare, tali indagini hanno indotto riflessioni sulla topologia dei campi. L'esempio più noto è quello di *I. Tamm* (1926) relativo all'*andamento ergodico* dei campi magnetici.

Tali indagine, inizialmente riservata al solo regime stazionario, è stata successivamente estesa, con particolare attenzione verso i problemi legati alle costruzioni elettromeccaniche, al *regime quasi-stazionario magnetico*.[10]

Introdotto da Maxwell nel *Treatise*, questo approccio fu in seguito oggetto di studi da parte di Heaviside (1884), lord Rayleigh (1886) e soprattutto di lord Kelvin (1890) il quale ricondusse l'analisi dei fenomeni diffusivi all'uso delle funzioni di Bessel.

L'AC System

Il caso monofase [25]

Con l'aumento, dovuto all'espansione industriale, della richiesta di potenza, la corrente continua, con i suoi modesti valori di tensione in gioco, si trovò del tutto inadeguata. Sia nelle potenze unitarie generabili, sia sulle distanze valicabili con gli elettrodotti. Occorreva a questo punto il passaggio alla corrente alternata. E, con essa, all'uso del trasformatore, grazie al quale, per le successive sezioni di generazione, trasmissione e distribuzione, potevano essere adottati i livelli più idonei di tensione.

Tale estensione, comportando l'uso di algoritmi più onerosi di quelli richiesti dalla continua, colse di sorpresa, mettendone in luce il modesto livello di preparazione, i tecnici. In quei tempi si può affermare che soltanto E. Mascart, J. Joubert, A. Potier, O. Heaviside e G. Ferraris potessero avere alcune concrete conoscenze sull'argomento. Esse, mutuate da approfondimenti in altri settori, non apparivano tuttavia ancora consapevolmente indirizzate all'Elettrotecnica. In realtà, la teoria dell'alternata, una volta confermata da parte dei fisici la validità della legge locale di Ohm per i regimi lentamente variabili[11], era già totalmente implicita nelle equazioni di Maxwell. Bastava integrarle in corrispondenza ad ingressi sinusoidali lentamente variabili. Ciò non accadde: nella maggior parte dei casi si preferirono infatti strade "alternative", assai più empiriche e tortuose.

Il primo contributo concreto fu quello di Galileo Ferraris il quale, nel dimostrare la fattibilità tecnica del trasformatore, ne dedusse il rendimento formalizzando allo scopo la formula della potenza attiva (1885):

$$\langle p(t)\rangle = P = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\cdot i(t)dt = VI\cos\varphi$$

Restava tuttavia aperto il problema più oneroso: la messa a punto di algoritmi integro-differenziali con cui trattare il regime sinusoidale. La questione era molto complessa: un'indagine condotta nel 1890 mostrò infatti che negli Stati Uniti solo quattro facoltà di ingegneria (MIT, Armour Institute, California, Ohio State) prevedevano nel loro curriculum il calcolo differenziale.

Una prima soluzione giunse nel 1885 con la pubblicazione, su *The Electrician,* da parte del matematico Thomas Blakesley, di un ampio e cruciale articolo dal titolo "*Alternating currents*". In esso, sfruttando la corrispondenza tra sinusoidi e vettori rotanti, la ricerca della soluzione di regime veniva ricondotta ad una serie di costruzioni grafiche da compiersi su vettori rotanti sincroni con il semplice ausilio di righello, compasso e di un po' di trigonometria. Quasi contemporaneamente, anche G.Kapp, studiando i trasformatori, adottò questo stesso approccio. Risultò in tal modo possibile mettere a disposizione dell'Elettrotecnica tutto quel patrimonio di potenti e consolidate costruzioni grafiche che, da tempo, erano proprie della Scienza delle Costruzioni.

La risposta degli elettrici fu immediata. Confermata preliminarmente l'isofrequenzialità e la sinusoidalità della risposta di regime, le equazioni dei circuiti divenivano in tal modo incomparabilmente più semplici. Soprattutto esse risultavano più tangibili e più visibili rispetto all'immagine offerta in precedenza da quelle "astratte equazioni differenziali" così tanto lontane dalla formazione di base dei tecnici dell'epoca. Nel contempo, provenendo essi in gran parte da ingegneria meccanica o civile, la dimestichezza con la Statica grafica risultava per loro un percorso concettuale obbligato ed efficace. Lo stesso Steinmetz accolse con entusiasmo il contributo di Blakesley e di Kapp, osservando in proposito che «*at present all mathematical theories, especially if they have to start from the solution of differential equations, are still of very little value for 'practical engineer' who is not yet generally expected to master the powerful weapons of mathematic*».

Il calcolo simbolico: la generazione di potenza elettrica con la radice quadrata di –1 [26]

La soluzione finale si ebbe nel 1893, con la *trasformata di Steinmetz*. In essa il metodo degli esponenziali complessi, già adottato da *Euler, Fresnel e* successivamente, nel 1847, da *von Helmholtz, si fondeva con il metodo dei vettori rotanti di Blakesley*, *Kapp* e *Kennelly.* L'approccio, algebrizzando in forma complessa la soluzione di regime di equazioni integro-differenziali raramente agli ingegneri del tempo, si rivelò essenziale per l'*AC System*. In questo senso si parlerà espressamente, con *V. Karapetoff*, di una generazione di potenza in alternata resa possibile dalla radice quadrata di meno uno.

Nel seguito, correlandola all'accumulo energetico nei campi elettrico e magnetico, sarebbe stata introdotta la *potenza reattiva*:

$$Q = VI\sin\varphi = \max\left\{\frac{d}{dt}\left[w_\varepsilon(t) + w_\mu(t)\right]\right\}$$

Infine, associandola al *cimento termico* del componente imputabile alle perdite conduttive e a quelle per isteresi, sarebbe stata introdotta la *potenza apparente*:

$$A = VI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Tali legami sarebbero stati poi unificati nel dominio fasoriale da *Steinmetz* mediante una relazione del tipo seguente:

$$\overline{A} = \overline{V}\underline{I} = P + jQ$$

la quale avrebbe ricondotto la potenza complessa al formalismo proprio della corrente continua.

Di tale potenza *Boucherot*, con un principio nel seguito rigorosamente dimostrato da *Langevin*, avrebbe enunciato la conservazione in una qualunque rete lineare e tempo-invariante. Sarà infine *Tellegen*, con il *suo teorema della conservazione delle potenze virtuali*, a darne, in una forma elegante e stringata consentita dal moderno approccio topologico alla teoria delle reti, la dimostrazione attuale.

L'estensione al regime periodico, resa possibile dalla serie di Fourier, del bilancio energetico avrebbe condotto alla teoria di *Budeanu* e con essa alla nozione di *potenza deformante* (1927). A questa avrebbe infine fatto seguito l'approccio quella di Fryze (1931).

La tecnologia polifase [28-29]

Legata al geniale artificio di combinare campi magnetici oscillanti prodotti da altrettante correnti alternate, la tecnologia polifase prese ben presto a diffondersi quale mezzo per ottenere, a valle di un trasformatore ormai consolidato, un motore AC a coppia spontanea. Partendo da avvolgimenti fissi, un sistema di tale tipo, concepito originariamente da Ferraris in forma bifase, conduceva ad un campo magnetico rotante grazie al quale un cilindro che vi fosse immerso poteva essere forzato alla rotazione. Nel seguito, con Dobrowolski (1891), si diffuse il sistema trifase. Egli lo preferì al precedente bifase osservando come l'aumento del numero delle fasi, oltre ad accrescere l'uniformità in senso spaziale del campo magnetico al traferro, consentisse, in ipotesi di simmetria fisica del sistema, la presenza di una potenza istantanea costante.

Il primo approccio circuitale al trifase fu di tipo classico: ogni configurazione trifilare veniva vista come la "riunione" di due monofase distinti aventi in comune il terzo filo come ritorno. Corrispondentemente, i vari componenti venivano riguardati come *tripoli in senso elettrico*. Quanto allo studio delle variabili descrittive necessarie in questo caso, esso conduceva alle nozioni di grandezza di fase e di linea.

Nel seguito, con Stokvis (1914) e Fortescue (1918), si passò al metodo razionale: ogni trifase, pensato a simmetria fisica, veniva preventivamente riguardato come il risultato della sovrapposizione di tre distinte reti trifase simmetriche, denominate di *sequenza diretta, inversa ed omopolare*. Ciascuna di queste, proprio in virtù della sua simmetria, poteva a sua volta essere ricondotta ad un circuito monofase equivalente. In tal modo, complice il principio di sovrapposizione, l'analisi delle reti trifase riportava senza eccezione a quella di reti monofase equivalenti, una per ciascuna sequenza.

L'analisi dei transitori [30¸34]

Alla fine del secolo scorso lo studio dei transitori, strettamente vincolato al dominio del tempo, poteva contare solo sull'analisi classica. Seguendo questa via, esso aveva dato comunque risultati innegabili: Helmholz aveva studiato i circuiti induttivi (1851), Kelvin quelli RLC (1853), Siemens, infine, quelli capacitivi (1857). La bibliografia a cavallo tra i due secoli, come ancora oggi si può vedere nel fondamentale trattato di Rüdemberg, è in effetti disseminata dello studio analitico e della successiva verifica sperimentale dei "singoli casi isolati". La situazione, pur supportata da una simile mole di risultati concreti, doveva tuttavia risultare ancora ben lontana da un'impostazione organica ed unificata se, ancora nel 1911, Steinmetz, la massima autorità in Elettrotecnica, poteva affermare che l'analisi dei transitori non aveva ancora acquisito la completezza ed il rigore che erano invece propri da tempo della matematica superiore. Il problema era dunque sia metodologico che applicativo.

Nel frattempo, dal 1886, Heaviside, spinto dalla complessità delle equazioni delle linee a costanti distribuite di cui stava occupandosi[12], aveva sviluppato dei nuovi ed "eccentrici" metodi di calcolo. L'idea su cui si basava il suo approccio era quella di leggere in un'equazione differenziale l'espressione della

derivata df/dt di una funzione come il prodotto algebrico della funzione stessa f(t) per un operatore d/dt indicato con la lettera p (sinonimo di pulsazione) e di estendere ad esso le regole ordinarie dell'Algebra. Accettando tale lettura, la modellizzazione differenziale ordinaria di una rete lineare tempo-invariante a costanti concentrate diveniva algebrica, per cui la corrente incognita risultava esprimibile in una forma polinomiale del tipo seguente: i(t)=e(t)/z(p). Il procedimento era dunque, nella sua semplicità apparente e nella sua immediatezza, quanto mai allettante perché sembrava promettere, con il superamento di tutte le complessità proprie del metodo classico, l'atteso approdo a quei metodi diretti ed unificati di cui, con l'espansione delle reti di potenza, l'ingegneria sentiva sempre più il bisogno. Tale approccio, come aveva mostrato lo stesso Heaviside, potendo estendersi alle equazioni a derivate parziali, pareva inoltre prospettare un'analoga semplificazione concettuale anche per la teoria delle reti a costanti distribuite. Immediata era poi l'estensione ad altri ambiti applicativi, dal calore all'idraulica.

Non era facile però interpretare in modo coerente espressioni di tale tipo, nelle quali, dopo tutto, funzioni del tempo rappresentative di ingressi noti erano associate a niente di più che un puro e semplice simbolo grafico...Per tale motivo le critiche a carico del fisico inglese piovvero numerose e giunsero, durissime, da ogni parte. Per fortuna Heaviside le ignorò e proseguì per la sua strada: egli aveva infatti intuito che il suo metodo, pur "eccentrico", doveva celare qualcosa di cruciale. Dopo tutto, grazie a questo "strano simbolo grafico", l'equazione z(p)= 0 conduceva alle stesse costanti di tempo del sistema già calcolabili con l'analisi classica. Restringendo poi la sua indagine alla sola funzione telegrafica da lui stesso introdotta, egli era stato anche in grado di calcolare, in una forma del tipo seguente:

$$i(t) = \frac{e(t)}{z(p)\big|_{p=0}} + e(t)\sum \frac{e^{p^* t}}{p^* \dfrac{dz}{dp}}$$

(p* essendo gli zeri dell'equazione z(p)=0), la risposta di un sistema inizialmente scarico.

Non appariva invece altrettanto agevole giungere con il dovuto rigore alla necessaria formalizzazione della teoria stessa, benché essa, almeno in seconda lettura, rivelasse tracce di sé già nell'opera di Laplace, Cauchy, Boole, Hamilton. E, anche in questa direzione, le critiche non si attenuavano certo… Heaviside proseguì tuttavia per il suo cammino. Ed in modo agguerrito: «Forse- egli obiettava- perché non conosco il meccanismo della digestione dovrei rinunciare a cibarmi?».

Osservò al riguardo lo stesso Giorgi, che di Heaviside fu grande ammiratore: «Mal compresa da principio, la sua opera desta ammirazione sempre di più ogni anno che passa. Quando i suoi contemporanei obbiettavano che le regole dettate da lui conducevano a risultati erronei, Heaviside rispondeva: «quando le applicate voi, questo accade; quando le applico io, no»: ed era vero: questa constatazione fa nello stesso tempo apprezzare l'intuito superiore del grande autore inglese…».

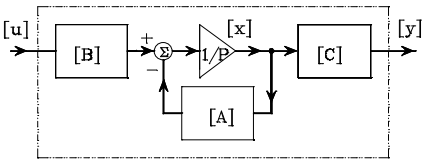
Nel seguito, accanto a quelli di Giorgi, si sarebbero avuti i contributi di rigorizzazione derivati dai lavori di Bromwich e Carson. Il primo, secondo un'operazione di antitrasformazione, avrebbe ricondotto il calcolo di i(t) ad un integrale di linea sul piano complesso; il secondo avrebbe individuato nella relazione 1/pz(p) l'integrale nel tempo della funzione i(t) e^{-pt} che corrisponde, con linguaggio attuale, alla trasformata di Laplace. Solo con Doetsch (1927) e van der Pohl (1929) si sarebbe però giunti alla lettura attuale, basata in modo definitivo sulle nozioni di funzione di trasferimento e di trasformata di uscita. A fronte di tali risultati, e sulla scia di alcune idee originarie di Poisson, la moltiplicazione nel campo complesso sarebbe successivamente risultata interpretabile nel dominio del tempo con quella particolare operazione di integrazione, la convoluzione, che riporta a Duhammel (1833).

L'ingresso in teoria dei sistemi [35¸ 37]

Con gli anni '60, forte del calcolo operatoriale e della teoria dei grafi, la *teoria delle reti* sarebbe entrata a far parte della più generale *teoria dei sistemi*, di cui, avvalendosi dei concetti di

variabile di stato, di *ingresso-uscita* e di *variabile di rete*, avrebbe acquisito il processo logico, sintetizzato dall'impiego di modelli matematici espressi nella seguente forma ricorsiva:

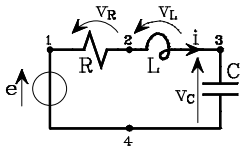
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[x] = [A]\cdot[x] + [B]\cdot[u] \\ [y] = [C]\cdot[x] \end{cases}$$

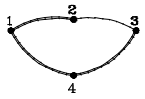


Il ricorso alla Teoria dei Sistemi, avvenuto nei primissimi anni '60, avrebbe conferito alla Teoria delle Reti l'immediatezza ed il rigore formale proprio del suo approccio attuale.

Ne sarebbe derivato l'impiego della nozione di *funzione di trasferimento*, di *integrale di convoluzione*, di *risposta all'impulso*, di *Fast Fourier Transform*, di *Teorema del campionamento*, su cui si basa una parte assai evoluta della moderna teoria delle reti.

L'uso simultaneo della *Teoria dei Grafi*, nel frattempo portato ad un alto grado di perfezione formale, avrebbe agevolato poi la scrittura preliminare dell'equazione di stato, consentendone la formalizzazione diretta del modello matematico.





L'impiego della Teoria dei grafi velocizza la scrittura delle equazioni di rete conducendo in modo diretto alla loro espressione in forma normale del primo ordine.

Un esempio può essere offerto dal caso semplice costituito dal "circuito a due energie" di Kelvin. Ad esso può essere associata la seguente equazione integro-differenziale:

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = Ri(t) + Lpi(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\xi)d\xi + v_C(0) = e(t)$$

Derivando i due membri rispetto al tempo, si ha:

$$\left[p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}\right]\cdot i(t) = \frac{pe(t)}{L}$$

da cui:

$$\left[p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2\right]\cdot i(t) = \frac{pe(t)}{L}$$

Il passaggio alla forma normale del primo ordine, propria della Teoria dei Sistemi, non è in tal caso immediato: esso richiede infatti di assumere come incognita la funzione corrente e la sua derivata prima e di effettuare poi tutte le sostituzioni del caso. È sufficiente in tal caso dover considerare una rete di una qualche complessità per giungere rapidamente ad un problema estremamente oneroso sul piano formale.

Il passaggio alla forma normale del primo ordine risulta poi indispensabile nella procedura di calcolo non appena, a causa di non linearità o tempo-varianze presenti nel sistema, l'integrazione debba essere compiuta per via numerica.

Il ricorso alla teoria dei grafi è in questo senso risolutivo. Associato al circuito il suo grafo, basta porre l'induttore sul coalbero ed adottare come variabili di stato la corrente e la tensione capacitiva. Scrivendo la legge delle tensioni alla maglia induttiva e la legge delle correnti all'insieme di taglio capacitivo, risulta allora in modo diretto:

$$\begin{cases} Lpi = e - Ri - v_c \\ Cpv_c = i \end{cases}$$

da cui in forma normale:

$$p\begin{bmatrix} i \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot e$$

Tale semplicità ed immediatezza si conferma poi per reti di maggior complessità, sia topologica che di ordine del modello. Analoghe considerazioni valgono infine in presenza di non linearità e tempo-varianze. La procedura resta immutata semplicemente sostituendo le variabile di stato corrente induttiva e tensione capacitiva rispettivamente con il flusso magnetico concatenato e la carica elettrica.

L'assetto finale: campi, onde, reti [38¸48]

In quegli anni postmaxwelliani durante i quali aveva impostato la propria analisi fondazionale, l'Elettrotecnica andò radicalizzandosi su due posizioni distinte e, per certi aspetti, anche antitetiche. Da un lato prevaleva l'impostazione dei fisici matematici, maxwellianamente legata alla priorità concettuale dell'approccio campistico; dall'altro, influenzata dalle esigenze proprie di una *conoscenza efficace*, andava sempre più affermandosi quella di natura tecnica, legata invece ad un prioritario approccio sperimentale di natura più direttamente circuitale.

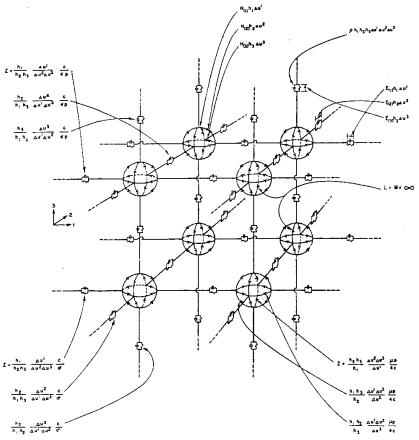
In questa dicotomia sempre più evidente, la didattica delle Scienze Elettriche imponeva, come passaggio obbligato, la scelta preliminare del percorso concettuale da seguire: la disciplina doveva essere proposta a partire dai campi verso le reti oppure in senso opposto? Doveva inoltre essere adottato il *metodo storico*, secondo il quale l'impostazione dei fondamenti di una scienza deve necessariamente ricalcare il percorso seguito dalla sua stessa evoluzione, oppure quello *logico*, legato invece all'adozione di un'opportuna successione di *postulati di definizione* preliminari?

Negli anni successivi l'esigenza di una nuova sensibilità pedagogica e fondazionale, ampiamente diffusa in quegli anni in cui l'Elettrotecnica andava rivendicando una propria autonomia metodologica, avrebbe pesantemente condizionato l'analisi fondazionale dei primi decenni del secolo. Pur con le oggettive difficoltà legate alle diverse scelte possibili, una cosa appariva tuttavia chiara fin da subito: non era più accettabile che da una parte vi fosse un modo di "impostare l'elettricità" proprio dei fisici ed ignorato dai tecnici e che dall'altra vi fosse una procedura tecnica che si sviluppava pressoché autonomamente dal modo di vedere classico. Occorreva dunque pervenire ad una sistemazione più organica ed unificata. Ed in ogni caso, per i Politecnici, soprattutto "a misura di ingegnere".

Tale disagio era sentito, all'indomani della rivoluzione scientifica provocata dalla *Electromagnetic Theory* di Heaviside, in tutto il mondo. Nel 1895 il francese Cornu prendeva posizione, dalle pagine di *The Electrician*, contro J. Perry, il quale, fautore di una didattica più moderna in grado di liberarsi dell'antico fardello costituito dall'approccio classico proprio del Mascart, proponeva di impostare l'elettromagnetismo partendo direttamente dal tensiometro e dall'amperometro... Il Cornu bollava questi metodi come antiscientifici ed affermava che nessun esperimento con misure elettriche poteva insegnarsi fino a quando, partendo dagli esperimenti basati sulle palline di sambuco, gli allievi non avessero seguito l'intera trafila della fisica classica. Si trattava dunque, nel momento stesso in cui l'Ingegneria Elettrica, come evento postmaxwelliano, andava prendendo coscienza di sé, della contrapposizione tra la bilancia di torsione di Coulomb e gli strumenti integrali. In tale discussione intervenne Giovanni Giorgi, il quale, il 12 aprile 1896, sempre dalle pagine di *The Electrician*,

nell'articolo *«The foundations of electrical science»*, prese posizione a favore di Perry, affermando non solo che qualunque gruppo appropriato di fenomeni e di grandezze elettriche poteva essere assunto come fondamentale, ma che vi era nel contempo tutto l'interesse a semplificare l'esposizione introducendo dapprima il circuito elettrico e da qui progredendo verso i campi e le onde. L'articolo di Giorgi, una pietra miliare con la quale epistemologicamente si evidenziava la sostituzione in Elettrotecnica del metodo storico con quello logico, segnava in modo irreversibile la transizione dall'indirizzo antico a quello moderno.

In accordo con tali riflessioni, il primo a proporre in forma compiuta una strategia fondazionale alternativa fu proprio Giorgi. Con le sue *Lezioni di Fisica Matematica,* pubblicate nel 1926-27, l'impostazione della Scienza Elettrica imboccò una nuova strada, basata su un approccio lagrangiano e legata nel contempo, in accordo con la sua presa di posizione su "*The Electrician*", sia alla sostituzione del metodo storico con quello logico, sia alla priorità, nell'ordine espositivo, della lettura circuitale rispetto a quella campistica. Quest'ultima, riguardando Heaviside come il primo vero postmaxelliano, partiva direttamente dalla azione per contatto e solo in seguito proponeva, come caso particolare, quella a distanza.



Gabriel Kron: rete elettrica tridimensionale a costanti distribuite associata alle equazioni di Maxwell.

Tale rilettura si tradusse in un'impostazione metodologica un nuovo schema fondazionale basato su:

- l'abbandono definitivo del *metodo storico*, perché giudicato non idoneo didatticamente;
- il passaggio al *metodo logico* basato su postulati di definizione e su esperimenti concettuali opportuni;
- l'adozione delle *grandezze globali* e la successiva progressione verso quelle *locali;*
- l'interpretazione delle *equazioni fisiche* in termini esclusivi di relazioni matematiche tra grandezze misurate.

Sul piano epistemologico tale impostazione, caratterizzata sia da un forte impatto di generalità e di immediatezza applicativa che da un radicale risparmio di conoscenze fisico-matematiche preliminari, si basava sull'*identità concetto-operazioni* propria dell' *operazionismo* di P.W. Bridgman, in quegli anni in fase di grande affermazione. Ne emergeva in tal modo una didattica determinata nell'intenzione di fornire risposte generali e subito. Per essa l'allievo, superando a piè pari una lunga fase preliminare di iniziazione, era subito condotto a familiarizzare con i concetti ed i metodi di analisi propri di una disciplina direttamente finalizzata ad applicazioni concrete. Quanto al bagaglio delle nozioni preliminari necessarie per l'accesso, esso veniva a ridursi al minimo possibile: Analisi Matematica e, come si conviene ad una disciplina comunque nata dalla Fisica Tecnologica, quel po' di Termodinamica necessaria per i bilanci energetici. Da allora tale approccio ha subito una vasta diffusione, fino a diventare, e non più solo in Italia, la "strategia fondazionale" attualmente più diffusa.

Tale affermazione, sempre più consolidata, non ha tuttavia potuto escludere la consapevolezza della necessità di successivi approfondimenti di tipo più esplicitamente maxwelliano. E ad essi ha affidato, superando a piè pari i limiti di prima lettura propri dei *postulati di definizione* e degli *esperimenti concettuali*, l'affinamento e la sistemazione metodologica della teoria stessa, così da precisarne il significato profondo e, con questo, i suoi possibili limiti di impiego. Ne sono emerse formulazioni perfezionate della condizione di Abraham, nonché, da parte di S. Shelkunoff (1971), controesempi atti a mostrare sul piano metodologico come la diseguaglianza $\lambda >> \delta$ costituisca una condizione necessaria ma non sufficiente.

Sviluppando i suoi studi sull'applicazione alla teoria delle reti dell'approccio tensoriale di Levi Civita e Ricci Curbastro, nel 1943, sotto l'impulso delle ricerche condotte in quegli anni alla General Electric nell'area delle Comunicazioni Elettriche, G. Kron, generalizzando l'ormai consolidato approccio alle linee a costanti distribuite, perveniva infine alla rete elettrica equivalente delle equazioni di Maxwell. Tale risultato, sostenuto in modo sempre più concreto dall'avvento dei calcolatori, avrebbe aperto un filone. Questo, a tutt'oggi oggetto di ricerca, si sarebbe fuso con gli studi attuali di compatibilità elettromagnetica.

Appendice A-I: i contenuti concettuali dell'approccio circuitale e la loro estraneità, in regime variabile, rispetto alla Teoria di Maxwell.

Antecedente al pensiero maxwelliano, la *Teoria delle Reti* (TdR) mutua i propri fondamenti metodologici e la propria legittimità sperimentale da una generalizzazione al regime variabile delle osservazioni di Ohm, Faraday e Kirchhoff. Concettualmente autonoma rispetto alle equazioni di Maxwell (EDM), la TdR, non contenendo in sé alcuna indicazione sul ruolo giocato in senso propagativo dalla frequenza, implica approssimazioni la cui entità non può essere determinata a partire dalle osservazioni su cui essa stessa è basata. La sua area di possibile impiego, fissata dalla sua medesima collocazione storico-culturale, risulta pertanto essere a priori, ed in modo esclusivo, quella propria del regime lentamente variabile. Qualora infatti se ne estendessero i concetti al regime rapidamente variabile, il suo approccio condurrebbe a risultati di dubbia validità, accettabili solo a posteriori e comunque con la dovuta cautela.

Inquadrata a posteriori nell' elettromagnetismo maxwelliano, la TdR può essere invece correttamente riguardata come la descrizione con altro linguaggio di una classe di soluzioni approssimate delle EDM. Tale interpretazione, di natura fisico-matematica, è risolutiva in quanto consente di evidenziare, con tutta la completezza ed il rigore necessari, sia l'intrinseca valenza campistica propria dell'approccio circuitale, sia il significato e l'entità del complesso delle approssimazioni corrispondentemente introdotte.

Sia dunque un fenomeno fisico stazionario, localmente identificato dall'assegnazione, per i vettori $\mathbf{W}=k\mathbf{V}$ che lo definiscono, delle rispettive leggi ai rotori ed alle divergenze. Nel caso in cui $\mathbf{V}$ sia irrotazionale e $\mathbf{W}$ sia solenoidale, mappato il *campo armonico* corrispondente, risultano in esso rispettivamente individuabili superfici equipotenziali e tubi di flusso. In tali condizioni è detto *circuito* ogni tronco di tubo di flusso di $\mathbf{W}$ delimitato da due superfici equipotenziali di $\mathbf{V}$; corrispondentemente è denominato *rete* l'insieme, topologicamente caratterizzabile tramite il *grafo* ad essa associabile, dei circuiti deducibili dalla mappa del campo stesso. Data la natura stazionaria delle assegnazioni da cui è caratterizzato, il fenomeno viene indagato nel solo dominio spaziale. All'interno di questo, basata sulle nozioni locali di densità areolare di circuitazione, il rotore, e di densità volumetrica di flusso, la divergenza, l'analisi risulta fondata sui concetti topologici di *maglia* e di *insieme di taglio*. Essa risulta pertanto, in modo intrinseco, di natura circuitale. Indipendentemente dal fatto, proprio di una lettura locale o globale, che le maglie e i tagli considerati siano di dimensione infinitesima o finita. Nel primo caso, associando all'intorno di ogni punto cicli e superfici gaussiane elementari, l'analisi fa riferimento diretto alle equazioni differenziali ai vortici e alle sorgenti del campo. Integrandole spazialmente, essa perviene alle funzioni locali incognite $\{\mathbf{V}(\mathbf{r}),\mathbf{W}(\mathbf{r})\}$. Tale approccio è di tipo analitico in quanto risulta descrittivo di ogni punto del campo. Come tale si caratterizza per la completezza della soluzione che fornisce. Per contro esso ha un limite costituito dalla formalizzazione delle condizioni al contorno. Queste comportano infatti difficoltà matematiche onerose, raramente risolubili in forma chiusa nei casi concreti. L'approccio globale, di tipo sintetico, è finalizzato al superamento delle difficoltà legate alla

formalizzazione delle condizioni al contorno. In quest'ottica esso sostituisce in ogni tronco di tubo le funzioni locali $\{\mathbf{V},\mathbf{W}\}$ con le corrispondenti grandezze concrete circuitazione e flusso $\{C,\Phi\}$ a queste associabili per via integrale. In tal modo la dipendenza dalle coordinate spaziali, racchiusa nelle espressioni integrali di definizione, non appare più in forma esplicita nelle relazioni riguardanti le variabili trasformate $\{C,\Phi\}$. Tali equazioni, di natura algebrica globale, riguardano le maglie e gli insiemi di taglio deducibili dalla rete. Esse costituiscono pertanto, secondo una lettura denominata a costanti concentrate, *modelli a dimensione zero*. Una procedura di questo tipo, giustificata dalla sua immediatezza e dalla sua semplicità formale, è legittimata dalla univocità della trasformazione funzionale di cui essa si avvale. Ne deriva, in particolare, una lettura operativa immediata: fissate le sezioni estreme del tubo, le indicazioni del circuitometro e del flussometro risultano rispettivamente indipendenti dal percorso dei cordoni e dalla collocazione delle sonde dei due strumenti. A tali legami può essere infine aggiunta la relazione costitutiva atta a legare tra loro le grandezze globali. A questo proposito riveste particolare interesse concettuale il caso in cui il tronco di tubo di flusso, delimitato dalle due sezioni estreme $\{\Sigma_A,\Sigma_B\}$, possa ritenersi sufficientemente sottile. In tali condizioni infatti esso, assimilabile al suo asse di simmetria Γ_{AB}, può essere geometricamente identificato dall'ascissa curvilinea s. Corrispondentemente, osservando che:

$$\Phi = \int_{\Sigma(s)} \mathbf{W}(s)\times\mathbf{n}\,dS = \langle W_n(s)\rangle \cdot A(s) \cong |\mathbf{W}(s)| \cdot A(s)$$

riguardata Γ_{AB} come una linea vettoriale di $\mathbf{W}(s)$, si ottiene la forma seguente:

$$\int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{V}\times\mathbf{t}\,ds = \int_A^B V ds = C = \int_A^B \frac{W}{k} ds = \int_A^B \frac{\Phi}{kA(s)} ds = \left(\int_A^B \frac{ds}{kA(s)}\right)\cdot\Phi = \Re\Phi$$

Tale approccio, particolarizzato ai casi stazionari conduttivo, dielettrico e magnetico, conduce, tramite le nozioni circuitali corrispondenti di resistenza, elastanza e riluttanza, ai concetti di rete elettrica, dielettrica e magnetica. Secondo questa lettura, mappato il campo e calcolatone l'elemento circuitale rappresentativo, le dimensioni e le proprietà fisiche del componente stesso a due terminali, così come la configurazione del campo nel suo interno, sono relegate ad una posizione del tutto di secondaria importanza La lettura globale conferma la sua validità anche nel caso in cui il campo armonico, identificato da assegnazioni del tipo seguente:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = 0 \\ \mathrm{div}\,\mathbf{w}(\mathbf{r},t) = 0 \end{cases}$$

sia funzione anche del tempo. In tali condizioni, istante per istante, la trasformazione funzionale che conduce al modello di ordine zero continua ad essere univoca e dunque legittima.

La possibilità di un approccio integrale viene meno nel momento in cui il campo, privato del suo carattere conservativo e/o solenoidale, non sia più armonico. In tali condizioni, infatti, il legame funzionale che conduce dalle grandezze locali a quelle globali trasformate non risulta più univoco. Sul piano operativo tale condizione si traduce nella dipendenza delle indicazioni del tensiometro e del flussometro dal percorso dei cordoni e dalla posizione delle sonde. È questo, ad esempio, caratterizzato dalla presenza di una variabile temporale ritardata, il caso del CEM rapidamente variabile. In tali condizioni infatti, essendo spazio e tempo accoppiati, non risulterebbe più possibile pervenire, tramite un integrale di campo, a modelli di ordine zero.

Indicazioni al riguardo provengono dallo sviluppo in serie di potenze dei potenziali ritardati. Posto in proposito, con riferimento ai potenzianti ed ai potenziati:

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \stackrel{\Delta}{=} R$$

sviluppando in serie di potenze i due potenziali preventivamente così formalizzati:

$$\begin{cases} v(\mathbf{r}_2,t)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\displaystyle\int_\tau \frac{\rho_L(\mathbf{r}_1,t-R/c)}{R}d\tau \\ \mathbf{a}(\mathbf{r}_2,t)=\dfrac{\mu}{4\pi}\displaystyle\int_\tau \frac{\mathbf{j}_\sigma(\mathbf{r}_1,t-R/c)}{R}d\tau \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{cases} v(\mathbf{r}_2,t)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\displaystyle\int_\tau \frac{\rho_L(\mathbf{r}_1,t)}{R}d\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\int_\tau\left(\frac{-R}{c}\right)^n\frac{\partial^n}{\partial t^n}\frac{\rho_L(\mathbf{r}_1,t)}{R}d\tau\right] \\ \mathbf{a}(\mathbf{r}_2,t)=\dfrac{\mu}{4\pi}\left[\displaystyle\int_\tau \frac{\mathbf{j}_\sigma(\mathbf{r}_1,t)}{R}d\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\int_\tau\left(\frac{-R}{c}\right)^n\frac{\partial^n}{\partial t^n}\frac{\mathbf{j}_\sigma(\mathbf{r}_1,t)}{R}d\tau\right] \end{cases}$$

da cui, avvalendosi del metodo degli esponenziali complessi, si ottiene:

$$\begin{cases} \bar{V}(\mathbf{r}_2,j\omega)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\int_\tau\left(-j2\pi\frac{R}{\lambda}\right)^n\frac{\bar{\rho}_L}{R}d\tau=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\int_\tau\frac{\bar{\rho}_L}{R}d\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\int_\tau\left(-j2\pi\frac{R}{\lambda}\right)^n\frac{\bar{\rho}_L}{R}d\tau\right] \\ \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_2,j\omega)=\dfrac{\mu}{4\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\int_\tau\left(-j2\pi\frac{R}{\lambda}\right)^n\frac{\bar{\mathbf{J}}_\sigma}{R}d\tau=\frac{\mu}{4\pi}\left[\int_\tau\frac{\bar{\mathbf{J}}_\sigma}{R}d\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\int_\tau\left(-j2\pi\frac{R}{\lambda}\right)^n\frac{\bar{\mathbf{J}}_\sigma}{R}d\tau\right] \end{cases}$$

In tali ipotesi, se la distanza dell'osservatore $\mathbf{r}_2$ dalla sorgente posta in $\mathbf{r}_1$ è tale per cui:

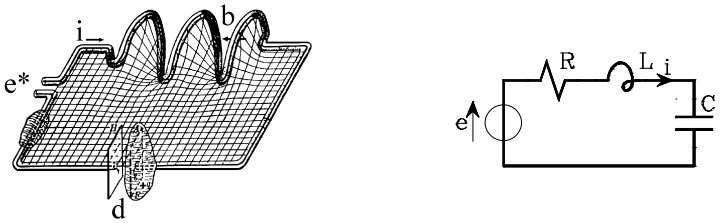
$$\frac{R}{\lambda}<<1\ \forall\ r_1$$

cioè se, con ovvio significato fisico, si ha $\lambda>>R$, allora, troncando lo sviluppo in serie di potenze, si può adottare l'*approssimazione di primo ordine* così sintetizzata:

$$\begin{cases} \bar{V}(\mathbf{r}_2,j\omega)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\displaystyle\int_\tau\frac{\bar{\rho}_L(\mathbf{r}_1,j\omega)}{R}d\tau \\ \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_2,j\omega)=\dfrac{\mu}{4\pi}\displaystyle\int_\tau\frac{\bar{\mathbf{J}}_\sigma(\mathbf{r}_1,j\omega)}{R}d\tau \end{cases}$$

Un confronto con le relazioni complete mostra come per $R/\lambda<<1$ l'effetto del ritardo dovuto alla velocità finita di propagazione può essere trascurato. In tali condizioni, lo spazio ed il tempo nuovamente si disaccoppiano e lo spazio da fisico torna ad essere geometrico.

Appendice A-II. Il contributo di Carson



Deduzione secondo Carson delle equazioni di un circuito a due energie

Viene considerato in tal caso, con riferimento alla condizione di regime quasi stazionario magnetico:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\mathbf{e} = -\mathrm{p}\,\mathbf{b} \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{h} \cong \mathbf{j}_\sigma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e} = -\mathrm{gradv} - \mathrm{p}\,\mathbf{a} \\ \mathrm{div}\,\mathbf{j}_\sigma \equiv 0 \end{cases}$$

un tronco di tubo di flusso di conduzione, immerso in un mezzo a conduttività nulla. Il campo elettrico totale, somma di quello impresso **e*** e di quello maxwelliano **e**, soddisfa alla legge di Ohm:

$$\mathbf{e}_{\mathrm{tot}} = \mathbf{e} + \mathbf{e}^* = \frac{\mathbf{j}_\sigma}{\sigma}$$

da cui:

$$\mathbf{e}^* = \frac{\mathbf{j}_\sigma}{\sigma} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{gradv}$$

Integrando lungo il ciclo γ identificato dall'asse del tubo di flusso, ignorando inizialmente la presenza del doppio strato, si ha:

$$\oint_\gamma \mathbf{e}^* \times \mathbf{t}\, ds = \oint_\gamma \frac{\mathbf{j}_\sigma}{\sigma} \times \mathbf{t}\, ds + \oint_\gamma \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathrm{t}} \times \mathbf{t}\, ds + \oint_\gamma \mathrm{gradv} \times \mathbf{t}\, ds$$

Osservando che:

$$\oint_\gamma \mathbf{e}^* \times \mathbf{t}\, ds = \mathrm{e}$$

$$\oint_\gamma \frac{\mathbf{j}_\sigma}{\sigma} \times \mathbf{t}\, ds = \oint_\gamma \frac{\mathrm{j}_\sigma}{\sigma} ds = \oint_\gamma \frac{\mathrm{i}}{\sigma \mathrm{A}} ds = \mathrm{i} \oint_\gamma \frac{1}{\sigma \mathrm{A}} ds = \mathrm{Ri}$$

$$\oint_\gamma \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathrm{t}} \times \mathbf{t}\, ds = \frac{d}{dt} \oint_\gamma \mathbf{a} \times \mathbf{t}\, \mathrm{ds} = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{\mathrm{di}} \frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{Lpi}$$

$$\oint_\gamma \mathrm{gradv} \times \mathbf{t}\, ds = \oint_\gamma \mathrm{dv} = 0$$

si ottiene:

$$\mathrm{e}(\mathrm{t}) = \{\mathrm{Lp} + \mathrm{R}\} \cdot \mathrm{i}(\mathrm{t}) = \mathrm{z}(\mathrm{p}) \cdot \mathrm{i}(\mathrm{t})$$

Mettendo in conto la presenza del doppio strato, la procedura di integrazione resta formalmente invariata. L'unica differenza risiede nel fatto che tra le armature il termine j_σ/σ assume la forma indeterminata 0/0 e va sostituito, tramite l'addendo gradv, dal contributo v_c.

Si ottiene allora:

$$e = Ri + Lpi + v_c = Ri + Lpi + \frac{q}{C}$$

da cui:

$$e = Ri + Lpi + \frac{1}{Cp} i = z(p) \cdot i(t)$$

Riferimenti Bibliografici

I titoli contrassegnati con * contengono un'ampia bibliografia storica e scientifica alla quale si rinvia per l'approfondimento dell'argomento stesso.

[1] G.S. Ohm, *Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet*, T.H. Riemann, Berlin, 1827, pp.2-3,107-111

[2*] M.S. Gupta, *Georg Simon Ohm and Ohm's Law*, IEEE Trans on Education, Vol. 23, August-1980, pp.156-162

[3] G.R. Kirchhoff, *Uber die Auflösung der gleichungen, auf Welche man bei der Untersuchung der linearen vertheilung galvanischer Ströme gefürt wird*, Pogg. Ann. 1847, p. 435

[4] H.L.F. von Helmholtz, *Opere*, a cura di V. Cappelletti, UTET, Torino, 1967

[5] J.G. O'Hara, W. Pricha, *Hertz and the Maxwellians*, Peter Peregrinus Ltd in association with the Science Museum, London, 1987

[6*] J.P. Nahin, *Oliver Heaviside Sage in Solitude,* IEEE Press, 1988,

[7*] I. Yavetz, *From Obscurity to Enigma. The Work of Oliver Heaviside, 1872 1889*. Birkhäuser Verlag, Basel 1995

[8] J.H. Poynting, *On the Transfer of Energy in the Electromagnetic Field*, Philosophical Transactions of the Royal Society, 1884, 175, p343

[9] J. Slepian, *Energy Flow in Electric Systems, the VI Energy Flow Postulate*, Trans. AIEE, 1942, 61, p.835

[10] S. Leva, A.P. Morando, *One-Port Electromagnetic Concept and Slepian Theorem*, *Proc. ISEF '99*, pp.513-516, Sept. 1999, Pavia

[11] S. Leva, A.P. Morando, *About transition fields-circuit theory*, Proc. ISEF '99, pp.509-512, Sept. 1999, Pavia

[12] A.P. Morando, S. Leva, *Elettrotecnica – Reti Campi*, Esculapio Bologna, 1998

[13] J.R. Carson, *Electromagnetic Theory of the Foundations of Electric Circuit Theory*, The Bell System Technical Journal, 1927, pp. 1-17

[14] D. Graffi, *La teoria dei circuiti elettrici e le equazioni di Maxwell*, Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 1939, pp.249-285

[15] A.P. Morando, S. Leva, *Note di Teoria dei Campi Vettoriali*, Esculapio Bologna, 1998

[16*] W. Karapetoff, *The magnetic circuits*, Mc Graw Hill, New York, 1911

[17] E.C. Cherry, *The duality of interlinked electric and magnetic circuits*, Proc. Phys. Soc. of London, B, 1949, Vol. 62, pag. 101

[18*] G Battistini, *Il metodo di Lehmann per la determinazione grafica dei campi magnetici*, l'Elettrotecnica, 1949, pp. 267-282

[19] L. V. Bewley, *Two-dimensional fields in elctrical engineering*, The Macmillan Comapany, New York, 1948

[20*] D. Vitkovich, *Field Analysis*, Van Nostrand, Amsterdam, 1966

[21] Lord Kelvin, *Reprint of Papers of Electrostatics and Magnetism*, Macmillan, 1872, pp.52,144

[22] Lord Kelvin, *Mathematical and Physical Papers*, Vol.III, C.J. Clay and Sons, Cambridge University Press, Warehouse, 1890, pp.473-480;491-495;511-515

[23] J.C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Clarendon Press, 1873, Oxford, pp291-293

[24] Lord Rayleigh, *On the Self-induction and Resistance of straight Conductors*, Phil. Mag., 1886, XXI, pp.381-394

[25*] R. Kline, *Steinmtez Engineer and Socialist*, The Johns Hopkins University Press, London, 1992

[26] C.P. Steinmetz, *AC phenomena*, Mc Graw Hill, New York, 1894

[27*] R. King, *Transmission -line Theory*, Mc Graw Hill Book Company, New York, 1955

[28] C.L. Fortescue, *Method of Symmetrical co-ordinates applied to the solution of polyphase networks*, AIEE-1918- pp.1027-1136

[29*] C.F. Wagner, R.D. Evans, *Symmetrical Components*, Mc Graw Hill, New York, 1933

[30] C.P. Steinmetz, *Theory and calculation of electric circuits*, Mc Graw Hill, New York, 1917

[31*] J.R Carson, *Electric Circuit Theory and Operational Calculus*, Mc Graw Hill Book Company inc, New York, 1926

[32*] R. Rudemberg, *Transient Performance of Elecrtric Power Systems*, Mc Graw Hill, New York, 1950

[33] E.J Berg, *Heaviside's operational calculus as applied to enginnering and physics*, Mc Graw Hill Book Company inc., New York, 1929

[34*] G Giorgi, *Regimi variabili nei sisteni lineari*, Monografia AEI N°18, Milano, 1971

[35] G.Kron, *Tensorial and Topological Foundations of Electric Networks*, Indiana University Press, 1966

[36*] Journal of the Franklin Institute, *Gabriel Kron and the Large-Scale System Science*, Special Issue, 1968

[37] H.Happ, *Gabriel Kron and Systems Theory*, Union College Press, Schenectady, New York, 1973

[38] G. Rutelli, *Scienza del cinquantennio e contributo di Giovanni Giorgi*, l'Elettroetcnica, Vol XLI, 1954, pp 518-529, 569-580

[39] G. Giorgi, *Lezioni di Fisica Matematica*, Stab. tipo litografico Attilio Sampaolesi, Roma, 1927

[40*] G.Giorgi, *Verso l'Elettrotecnica Moderna*, Libreria Editrice Politecnica Tamburini, Milano, 1949

[41] A.P. Morando, *Considerazioni sull'insegnamento dell'Elettromagnetismo*, Rivista AEI, 1994, pp.52-57

[42] A.P. Morando, *L'insegnamento e la ricerca in Elettrotecnica nei primi 100 anni di storia del Politecnico di Milano*, Quaderni di storia della fisica 2, 1997, pp. 55-72

[43*] R. Manigrasso, A.P. Morando, *La nascita dell'Ingegneria Elettrica*, Tecniche Nuove, Milano, 1997

[44*] A.P. Morando, *G. Ferraris e la nascita dell'Ingegneria Elettrica moderna*, Leo S. Olschki Editore, Firenze, MCMXCIX, 1997

[45] A. Gandelli, S. Leva, A.P. Morando, *Dal metodo storico al metodo logico nell'impostazione dell'Elettrotecnica: proposte per un metodo intermedio*, AEI, Vol.86, N°1, Gennaio 1999, pp.43-47

[46] G. Kron, *Equivalent Circuits of The Field Equations of Maxwell*, Proc IRE, 1944, pp. 289-299

[47] S.A. Schelkunoff, *Methods of Electromagnetic Field Analysis*, Bell System Technical Journal, 1945, pp. 487-509

[48] S.A. Schelkunoff, *On teaching the Undergraduate Electromagnetic Theory*, IEEE Trans. on Education, Vol E-15,1 february 1972, pp. 15-25

NOTE

[1] Accademia dei XL, Istituto della Enciclopedia Italiana

[2] Dipartimento di Elettrotecnica, Politecnico di Milano Piazza Leonardo da Vinci 32 - 20133 Milano Tel: +39-2-23993729 - Fax: +39-2-23993703 - e-mail: sonia@bottani.etec.polimi.it

[3] Lo sviluppo della *topologia di rete* avrebbe condotto, con gli anni '50 di questo secolo, alla *Teoria dei Grafi*. Sue sarebbero state, affiancate alle già consuete nozioni di *nodo*, *ramo* e *maglia*, quelle successive di *albero*, *coalbero*, *insieme di taglio*, etc. Tali approcci avrebbero consentito di individuare, con immediatezza ed in tutta la loro generalità, gli insiemi di correnti e tensioni indipendenti deducibili da una rete. Esse avrebbero inoltre sviluppato l'originale metodo di Kirchhoff pervenendo successivamente a quello dei nodi, degli anelli, degli insiemi di taglio e delle maglie.

Risalendo alle origini, L. Euler fu il primo, nel 1736, a porre in forma topologica una questione concreta: il problema urbanistico di Köningsberg, la sua città. Nel 1874 A.Cayley, docente a Cambridge, introdusse la nozione di albero. Nel 1895 Poincaré, con la sua *Analisis situs*, conferì alla materia, nel frattempo rivisitata dallo stesso Maxwell, un quadro sistematico coerente. Questo, con il cinese Wang, fu infine trasferito nel 1934 alle reti elettriche.

[4] Cfr. Appendice A-I.

[5] Se ciò accade, il *tempo ritardato* (t-r/c), proprio dell'integrale generale delle equazioni di Maxwell, diviene *tempo attuale* t. Lo spazio cessa allora di essere compromesso con l'evento [15]: da *fisico* diviene semplicemente *geometrico*; diventa cioè un semplice contenitore di corpi. Corrispondentemente, le equazioni differenziali alle derivate parziali, proprie di un fenomeno di *azione per contiguità,* divengono ordinarie, rappresentative cioè di *azioni a distanza*. In tal modo l'«*attraverso e mediante*», caratteristico della teoria dei campi, viene sostituito dal semplice «*attraverso*» proprio invece della teoria delle reti.

Essendo le dimensioni δ del circuito trascurabili rispetto alla lunghezza dell'onda λ del campo elettromagnetico, gli argomenti delle grandezze elettromagnetiche in gioco risultano avere lo stesso valore in tutti i punti del circuito. Sotto questa condizione, per ogni elemento di corrente ne esiste sempre un altro che è praticamente "il negativo" del primo. In tal modo, ad una certa distanza dal circuito, gli effetti di questi due elementi sostanzialmente si cancellano: l'energia "persa" per radiazione risulta praticamente trascurabile. Tale approccio è legato all'ipotesi di contributo magnetico nullo da parte della corrente di spostamento. Esso implica una celerità infinita dei fronti d'onda per la quale, in accordo con una rappresentazione mediante modelli di ordine zero, la rete è riguardabile come un punto materiale coinvolto in un'azione a distanza. Esattamente come in Meccanica Razionale.

[6] Non a caso, a questo riguardo, J. Slepian (1942) parlò ironicamente di «*postulato* vj *degli ingegneri*». Soddisfatte le condizioni di Abraham, i potenziali $\{v,a\}$, pur funzione del tempo, possono essere considerati non più ritardati, ma attuali. Ad essi corrispondono allora campi $\{e,h\}$ variabili spazialmente almeno come $1/r^2$. Corrispondentemente, il flusso di Poynting attraverso la frontiera di un bipolo in senso elettrico, divenendo un infinitesimo come $1/r^2$, può essere reso minore di un numero arbitrario comunque piccolo, pur di adottare come frontiera elettromagnetica Σ^* una sfera di raggio convenientemente elevato. In tali condizioni, essendo:

$$\oint_{\substack{\text{bipolo in}\\ \text{senso elettrico}}} \mathbf{e}\wedge\mathbf{h}\times\mathbf{n}\,dS = \int_{\substack{\text{frontiera}\\ \text{elettromagnetica}}} \mathbf{e}\wedge\mathbf{h}\times\mathbf{n}\,dS + \int_{\substack{\text{porta}\\ \text{elettrica}}} \mathbf{e}\wedge\mathbf{h}\times\mathbf{n}\,dS = 0 + vi = p$$

il bilancio energetico, secondo Poynting, di ogni bipolo in senso elettrico può essere ricondotto ad una formulazione del I Principio della Termodinamica del tipo seguente:

$$\delta L_e + \delta L^* = \delta Q + dW_{\varepsilon\mu}$$

per la quale la somma del lavoro elettrico δL_e ai morsetti e del lavoro δL^* scambiato attraverso Σ^* con i sistemi non elettrici vale la somma del calore δQ ceduto all'ambiente e dell'incremento dell'energia $dW_{\varepsilon\mu}$.

In seguito l'applicazione ai bipoli del *Corollario di Slepian* avrebbe consentito di chiarire ulteriormente il significato energetico di tale approccio. Partizionata, con Slepian, la potenza scambiata dal componente nei termini seguenti:

$$p_\Sigma \overset{\text{Poynting}}{=} \oint \mathbf{e}\wedge\mathbf{h}\times\mathbf{n}\,dS \overset{\text{Slepian}}{=} \int_{\text{morsetti}} v\,\mathbf{j}_\sigma\times\mathbf{n}\,dS + \int_\Sigma v\frac{\partial\mathbf{d}}{\partial t}\times\mathbf{n}\,dS + \int_\Sigma \mathbf{h}\wedge\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t}\times\mathbf{n}\,dS \quad (^\circ)$$

nel caso in cui valga la condizione di Abraham risulta non nullo il solo contributo legato alla conduzione ai morsetti. Gli altri due, infatti, associati ad uno spostamento (dielettrico e magnetico) variabile almeno come $1/r^2$, sono infinitesimi di ordine superiore rispetto al raggio della sfera contenente l'elemento bipolare. Ciò consente di:

- evidenziare, legandolo alla velocità u della densità volumetrica di carica ρ, il "carattere meccanicistico" della potenza scambiata dai bipoli in regime quasi stazionario:

$$p_{\Sigma^*} = \oint v\,\mathbf{j}_\sigma \times \mathbf{n}\,dS = \oint v\rho\,\mathbf{u} \times \mathbf{n}\,dS = (v_A - v_B)i$$

- confermare, all'esterno delle frontiere Σ*, i principi di Kirchhoff

$$\begin{cases} \mathbf{j}_\mu = \dfrac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \cong 0 \\ \mathbf{j}_\varepsilon = \dfrac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \cong 0 \end{cases} \forall P \in \Sigma^* \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{rot}\,\mathbf{e} \cong 0 \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{h} \cong \mathbf{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{\text{maglia}} v \cong 0 \\ \sum_{\substack{\text{insieme} \\ \text{di taglio}}} i \cong 0 \end{cases}$$

- dedurre, quale conseguenza all'irrotazionalità di e e della solenoidalità di j all'esterno di Σ*, la conservazione quasi-stazionaria delle potenza elettrica dell'intera rete:

$$\int_\infty \mathbf{e} \times \mathbf{j}\,d\tau = [v]_t \cdot [i] = 0$$

Tale conservazione può essere poi estesa in modo immediato alle potenze virtuali, cioè alle potenze relative, per un dato dominio di integrazione, ad un campo elettrico consevativo e ad un campo di conduzione solenoidale non consistenti nella medesima configurazione. Intuita da Heaviside, già presente in alcuni scritti giovanili di G. Ferraris, tale proprietà sarebbe stata in seguito indagata a Bologna dal fisico matematico Luigi Donati. Essa si tradusse infine nel 1953 nella *relazione di Tellegen*.

Dalla relazione (°) sarebbe infine derivata la proprietà generale seguente, assumibile come fondamento della Teoria delle Reti: condizione necessaria e sufficiente perché un regime sia quasi stazionario, e dunque indagabile per via circuitale, è che la totalità delle coppie ordinate di morsetti presenti individui solo porte elettriche, così da condurre ad una definizione univoca della tensione e della corrente di conduzione ai morsetti.

[7] Cfr. Appendice A-II

[8] Questa analisi, oltre che per i suoi fondamentali contenuti metodologici, appare oggi altrettanto storicamente significativa per i processi osmotici che essa, espressione di uno scambio fecondo tra università e industria, seppe innescare tra le varie aree di competenza interessate. Presentata dapprima alla *National Accademy of Sciences,* essa, convenientemente ampliata, fu in seguito didatticamente inclusa in un corso appositamente tenuto presso il MIT; comparve infine, con specifica valenza tecnica, nel *Bell System Technical Journal.* Era questo, a pochissimi anni dalla prematura scomparsa di Steinmetz, avvenuta nel 1925, e dalla pubblicazione, nel 1917, del suo *Theory and calculation of electric circuits*, il segno tangibile di come l'ingegneria elettrica stesse approdando all'assetto scientifico-tecnico attuale.

È doveroso ricordare infine come nel 1938, in maniera del tutto autonoma rispetto a Carson, il fisico matematico italiano Dario Graffi abbia riproposto una nuova e più evoluta lettura, compendiosa dell'effetto pelle, della transizione campi-reti.

[9] Mappato il campo ed associata ad esso la corrispondente rete magnetica, supposta planare, da questa è deducibile la seguente equazione ai flussi di anello:

$$[\vartheta] \cdot [\varphi] = [m] \quad (*)$$

Se [φ] varia nel tempo, ai morsetti dei singoli avvolgimenti, pensati, senza perdita alcuna di generalità, di egual numero di spire N, compaiono le tensioni [v]=Np[φ]. Risolvendo la (*) rispetto alla corrente [i] ed esplicitando la tensione indotta, si ottiene allora:

$$[i] = [\vartheta / N^2 p] \cdot [v] = [1/Lp] \cdot [v] \quad (**)$$

Tale sistema è interpretabile come il complesso delle equazioni ai nodi indipendenti di una rete elettrica in cui [v] sono i potenziali nodali e [1/Lp] le auto e mutue suscettanze operatoriali relative ai diversi nodi indipendenti. Dal confronto tra il sistema (*) agli anelli e quello (**) ai nodi si deduce che il

fenomeno dell'insorgere del flusso nel circuito magnetico per effetto delle forze magnetomotrici è *duale* dell'insorgere delle tensioni per effetto delle correnti variabili negli avvolgimenti. Se ne deduce che i circuiti rappresentativi dei due fenomeni debbono potersi dedurre l'uno dall'altro secondo le ordinarie regole della dualità.

[10] È tale un regime governato dalle seguenti equazioni ai rotori:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\mathbf{e} = -\mathrm{p}\,\mathbf{b} \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{h} \cong \mathbf{j}_\sigma \end{cases}$$

Secondo tale definizione, il campo magnetico è generato dalle sole correnti di conduzione. Queste, come accade in regime stazionario, sono chiuse su se stesse. Nel contempo, esse assumono però una distribuzione spaziale non uniforme che dipende a sua volta dal campo elettrico indotto dal campo magnetico stesso. L'effetto che ne deriva è un'azione di contrasto, l'effetto pelle, esercitata dalle fem indotte e tendente ad ostacolare la diffusione del campo nei conduttori. In tal caso i risultati dell'approccio campistico stazionario non sono più corretti e vanno di volta in volta modificati con fattori atti a tenere conto della non uniformità dovuta al fenomeno diffusivo in atto.

Per tale motivo, in regime quasi stazionario, la teoria delle reti richiede l'elaborazione preventiva delle due equazioni ai rotori, in modo tale da pervenire per loro tramite ad un'equazione di diffusione del tipo seguente:

$$\{\Delta_2 - \sigma\mu\mathrm{p}\}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{e}(\mathrm{P},\mathrm{t})\\ \mathbf{h}(\mathrm{P},\mathrm{t})\end{bmatrix} = 0$$

la cui integrazione, fornendo la distribuzione spaziale del campo in seno ai conduttori, consenta la messa a punto degli appositi fattori correttivi da associare all'espressione statica degli elementi circuitali. Un esempio tipico è costituito dal calcolo della resistenza efficace di un conduttore cilindrico di raggio r e lunghezza l. Nota la resistenza geometrica $R_\rho = l/\sigma A$, corrispondente all'ipotesi di campo di conduzione uniforme, dedotto, per integrazione dell'equazione di Fourier, lo spessore di penetrazione δ, risulta immediato passare alla resistenza efficace $R_e = R_\rho r/2\delta$.

[11] Il modello classico di Drude, espresso nel dominio complesso, assegna alla velocità dei portatori di carica la seguente espressione:

$$\overline{\mathbf{U}} = \frac{-\mathrm{e}/\mathrm{m}}{\mathrm{j}\Omega - 1/\tau_{\mathrm{coll}}}\overline{\mathbf{E}}$$

Tenuto conto che $\tau_{coll}=10^{-14}$ sec, si deduce che, al di sotto delle frequenze ottiche, il termine $j\Omega$, non modificando in modo apprezzabile il denominatore della frazione, lascia essenzialmente immutato il modello della conduzione ohmica.

[12] In quegli stessi anni, imposte dalla posa dei primi cavi transoceanici, si sviluppò parallelamente la teoria delle linee a costanti distribuite. (Cfr. in proposito, in questo stesso volume, il lavoro dedicato a Heaviside e [27]).

Dopo i primi contributi, espressi in forma circuitale dall'*equazione dei telegrafisti* e dovuti a Kirchhoff, Lord Kelvin e Heaviside, il primo approccio campistico, dedotto direttamente dalle equazioni di Maxwell, è dovuto a J.J. Thomson (1893); ad esso fecero seguito i lavori di H.Hertz (1893), G. Mie (1900) e MacDonald (1902), i quali portarono alla conclusione che la linea, guidando un modo TEM, escludesse ogni possibilità di radiazione. Successivamente Steinmtez (1909) e Carson (1921) elaborarono modelli più evoluti dai quali risultò possibile evidenziare la simultanea presenza di contributi radiativi. Nel seguito, C. Manneback (1923) giunse infine a calcolare la resistenza di radiazione associata a tale fenomeno.