M.A.Penco[1]

Le statistiche intermedie di G.Gentile jr.

Introduzione

In questo studio si presenta e commenta l'articolo di G.Gentile sulle statistiche quantistiche intermedie tra quella di Bose-Einstein e quella di Fermi-Dirac.

Queste due statistiche sono caratterizzate dal un numero massimo di occupazione per ogni cella dello spazio delle fasi che è rispettivamente ∞ e 1. L'autore pone l'ipotesi più generale che in una cella vi possa essere al più un numero finito d di particelle e in questo modo arriva ad una formula generale delle statistiche intermedie che contiene come casi particolari la formula corrispondente alla statistica di BE e quella della statistica di FD.

La trattazione considera le particelle del sistema indistinguibili e pertanto esclude le particelle classiche, ritenute distinguibili. Si è ritenuto interessante fare il confronto con il metodo unificato usato da Brillouin nel 1927, che invece contiene sia le particelle classiche che quelle quantistiche, tutte quante considerate distinguibili, per evidenziarne le profonde differenze di impostazione, sia concettuali che (e soprattutto) probabilistiche

1. Le statistiche utilizzate in termodinamica

Le statistiche utilizzate in termodinamica sono tre: la statistica di Maxwell-Boltzman, quella di Bose-Einstein e la statistica di Fermi-Dirac.

Cerchiamo di mettere in evidenza le differenze che intercorrono tra di esse analizzando via via le differenti ipotesi che solitamente vengono introdotte per definirle.

In modo del tutto generale, consideriamo un sistema di g celle su cui si ripartiscano n particelle. Esaminiamo la descrizione più fine del sistema, compatibilmente con la natura degli oggetti che lo costituiscono: definiamo con X_1, X_2,...X_n la sequenza di variabili casuali che descrivono per ogni particella la cella in cui si accomoda (evidentemente questa descrizione sarà possibile solo se le particelle sono "distinguibili"). Il numero delle distinte descrizioni di n particelle su g celle è g^n.

Una descrizione meno fine del sistema consiste nell'affermare quante particelle occupano ciascuna cella: definiamo così il vettore di occupazione $\mathbf{n}=(n_1, n_2..n_g)$, con $\sum_{i=1}^{g} n_i=n$. Il numero dei diversi vettori di occupazione, se ogni cella può ospitare qualunque numero di particelle, è dato dal numero delle combinazioni con ripetizione di g celle prese a n a n , cioè $\binom{n+g-1}{n}$. Questa descrizione è possibile anche quando si considerano le particelle come "indistinguibili". Inoltre sarà interessante se le particelle sono considerate equivalenti, il che è vero se sono fisicamente identiche.

Definiamo infine con $\mathbf{p}=(p_0, p_1,...p_n)$, con $\sum_{i=0}^{n} p_i=g$ e $\sum_{i=0}^{n} i\, p_i=n$, la variabile che indica con p_0 il numero di celle vuote, con p_1 il numero di celle con una particella e così via. Bach[2] chiama l'insieme di queste variabili "occupancy numbers". Questa descrizione sarà interessante se le celle sono considerate equivalenti, il che è vero se le celle appartengono allo stesso livello energetico, e l'unico vincolo esterno è dato dalla conservazione dell'energia. Se esiste un numero massimo di occupazione d per ogni cella, $\mathbf{p}$ avrà solo d+1 componenti, i.e.$\mathbf{p}=(p_0, p_1,...p_d)$.

In ogni caso vi sono $W(\mathbf{n}|\mathbf{p})=\frac{g!}{p_0!p_1!..p_d!}$ distinti vettori di occupazione corrispondenti allo stesso **p.** (Questo è chiaro se si considerano le permutazioni tra i numeri di occupazione delle celle, che sono g!, ma che vanno divise per il numero delle celle che hanno lo stesso numero di occupazione).

Questo discorso è puramente formale. Le differenti statistiche emergono attraverso le differenti assunzioni di equiprobabilità sulle descrizioni viste sopra.

La statistica di Boltzmann si ottiene ponendo equiprobabili tutte le descrizioni delle particelle. Il metodo di Boltzmann assegna ad ogni descrizione $X_1, X_2,...X_n$ la stessa probabilità pari a $p=g^{-n}$, per cui la probabilità del vettore di occupazione risulta essere :

$$P_{MB}(\mathbf{n})=\frac{n!}{n_1!\,n_2!...n_g!}\,g^{-n}.$$

Quando nel 1924 Bose[3] si interessò al problema della radiazione del corpo nero considerata come un gas di fotoni, egli scoprì che queste particelle non erano regolate dalla legge di probabilità che abbiamo appena visto. Successivamente Einstein riconobbe che il principio usato da Bose aveva applicazioni più ampie e generalizzò la "statistica di Bose" a un gas ideale le cui molecole (bosoni) obbediscono alla statistica di Bose-Einstein. La legge proposta da Bose è oggi nota come statistica di Bose-Einstein. La statistica di Bose-Einstein si ottiene ponendo equiprobabili i vettori di occupazione, per cui $P_{BE}(\mathbf{n})=\binom{n+g-1}{n}^{-1}$. Questa ipotesi statistica viene giustificata attraverso la nozione di indistinguibilità delle particelle.

Ma vi sono anche particelle, come ad esempio gli elettroni o i protoni, che non seguono nessuna delle due statistiche citate sopra; per queste particelle vale il principio di esclusione di Pauli (in una stessa cella non può stare più di una particella). Nel 1925 E.Fermi sviluppò le conseguenze statistiche del principio di esclusione di Pauli e quindi introdusse una nuova distribuzione di probabilità per spiegare il comportamento di queste particelle (fermioni). Anche per Fermi i vettori di occupazione sono equiprobabili, ma poichè in una stessa cella non può stare più di una particella, il numero dei vettori di occupazione sarà minore che nella statistica di Bose e pari al numero delle combinazioni senza ripetizioni di g oggetti a n a n. L'ipotesi fondamentale della statistica di Fermi-Dirac sarà pertanto: $P_{FD}(\mathbf{n})=\binom{g}{n}^{-1}$.

Pertanto nella trattazione delle tre statistiche si è assunta come ipotesi fondamentale l'equiprobabilità di ogni stato microscopico permesso (le descrizioni $X_1, X_2,...X_n$ per le particelle classiche, i vettori di occupazione con o senza Principio di esclusione per le particelle quantistiche).

Possiamo riassumere le tre strategie probabilistiche in questo modo: per spiegare il differente comportamento delle diverse classi di particelle, sono state introdotte <u>ipotesi non probabilistiche</u> (la distinguibilità delle particelle considerate, la loro indistinguibilità, e l'impossibilità di occupare la stessa cella) che modificano di volta in volta la nozione di stato microscopico, ovvero di descrizione più fine che abbia significato fisico.

A questo punto è possibile mantenere l' assunto fondamentale della Meccanica Statistica, ovvero la equiprobabilità di tutti gli stati microscopici compatibili con i vincoli esterni.

In questa procedura le tre statistiche sono diverse "ab initio", e si maschera il fatto che l'ipotesi fondamentale (l'equiprobabilità) si applica ad oggetti probabilistici profondamente diversi.

La via di Gentile si muove entro questa logica: esclude le particelle classiche perchè distinguibili, e si basa sull'equiprobabilità dei vettori di occupazione ammessi da un principio di esclusione generalizzato.

La via di Brillouin, che richiameremo alla fine, ricava invece le tre statistiche (e le eventuali statistiche intermedie) in modo del tutto unificato e probabilisticamente ineccepibile. Ovviamente i risultati sono molto differenti.

1.1. Sistema fisico concreto

Nel caso di un sistema fisico effettivo, composto di N particelle identiche, si suddividano dunque gli stati di particella singola (celle), il cui numero supponiamo sia G, in k livelli energetici, ciascuno delle quali raggruppi g_i celle , tutte dotate di energia $_i$. Il metodo elementare della Meccanica statistica[4] procede come segue.

Chiamiamo macrostato il vettore $\mathbf{N} = (N_1,...,N_i,..N_k)$, la cui i-ma componente è la somma di tutte le particelle che occupano le celle dell' i-mo livello (ed è pertanto il numero delle particelle dotate di energia $_i$).

Chiamiamo microstato il vettore $\mathbf{n} = (n_1,..,n_j,....,n_G)$, con $\sum_{j=1}^{G} n_j = \sum_{i=1}^{k} N_i = N$.

La relazione fondamentale tra i due vettori è $N_i = \sum_{\text{livello}} n_j$. Mentre un macrostato è una distribuzione di N particelle sull'insieme dei k livelli, un microstato altro non è che una distribuzione delle stesse particelle sull'insieme delle G celle.

Dato che le distribuzioni di cella, subordinate al macrostato, sono sempre distribuzioni uniformi, il metodo elementare procede in modo combinatorio. E' sufficiente conoscere il numero dei "microstati" corrispondenti al macrostato **N**. Quindi l'approccio tipico della meccanica statistica consiste nel calcolare W(**N**), cioè, il numero degli stati microscopici compatibili con ciascun macrostato, e nel porre lnW(**N**) = S, dove S è l'entropia del sistema. Poichè da S è possibile dedurre, in linea di principio, tutta la termodinamica, si realizza così lo scopo della meccanica statistica: ricavare le leggi della termodinamica in termini di proprietà microscopiche trattate "probabilisticamente"[5].

Seguendo i ragionamenti precedenti possiamo calcolare W(**N**) dividendo le particelle in distinguibili e non, e poi queste ultime a seconda che valga o no il principio di esclusione. Se le particelle sono distinguibili, i microstati sono le sequenze **X** subordinate al macrostato **N**. Il loro numero si calcola in due stadi: a) i modi diversi in cui si possono distribuire le N particelle in k classi (livelli), così che nel primo livello ci siano N_1 particelle, nel secondo ce ne siano N_2,nell' i-mo ce ne siano N_i ,.....etc. sarà dato da $\frac{N!}{N_1!..N_k!}$, che è il tipico fattore attribuito alla distinguibilità; b) dato che ogni livello ha g_i celle, il numero di modi in cui le N_i particelle si possono distribuire tra le g_i celle del livello i-mo sarà $g_i^{N_i}$; in definitiva, nel caso classico , si otterrà :

$$W_{MB}(\mathbf{X}|\mathbf{N}) = N! \prod_{i=1}^{k} \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \quad \text{(A1)}$$

Nel caso di particelle indistinguibili, i microstati sono le sequenze **n**, ed è perciò assente il fattore attribuito alla distinguibilità. La sola caratteristica distintiva di una data distribuzione microscopica è il numero di occupazione n_j di ciascuna delle g_i celle dell'i-mo livello, occupato in tutto dalle N_i particelle. Il numero cercato è quindi uguale al numero delle distribuzioni sulle celle compatibili con la distribuzione **N** .

Se le particelle non obbediscono a nessun principio di esclusione, cioè n_j=0,1,..,N_i, si otterrà:

$$W_{BE}(\mathbf{n}|\mathbf{N}) = \prod_{i=1}^{k} \binom{N_i+g_i-1}{N_i} \quad n_j=0,1,..,N_i, \text{(A2)}$$

Se infine le particelle indistinguibili seguono il principio di esclusione di Pauli, cioè n_{ij}=0,1, è facile vedere che si otterrà:

$$W_{FD}(\mathbf{n}|\mathbf{N}) = \prod_{i=1}^{k} \binom{g_i}{N_i} \quad n_j=0,1 \text{(A3)}$$

Avremo allora , utilizzando l'approssimazione di Stirling, e "dimenticando" che i numeri W contano oggetti differenti:

$$\ln W_{MB} = N \ln N + \sum_i [- N_i \ln N_i + N_i \ln g_i] \ ;$$

$$\ln W_{BE} = - \sum_i g_i \ln g_i + \sum_i [- N_i \ln N_i + (N_i + g_i) \ln(g_i + N_i)] \ ;$$

$$\ln W_{FD} = - \sum_i g_i \ln g_i + \sum_i [- N_i \ln N_i + (N_i - g_i) \ln(g_i - N_i)].$$

2. Determinazione della formula generale di distribuzione delle statistiche intermedie.

Nel 1940 compare su Il Nuovo Cimento un articolo di G.Gentile j. dal titolo *Osservazioni sopra le statistiche intermedie* [6]. Il lavoro, nel quale vengono presentate le statistiche quantistiche intermedie tra quella di Bose-Einstein e quella di Fermi-Dirac, nasce in seguito ad una delle tante discussione di Gentile con G. Polvani, suo grande amico fin dai tempi della tesi e con il quale aveva una stretta collaborazione scientifica[7].

Com'è noto, il numero massimo di occupazione per ogni cella dello spazio delle fasi è uno nel caso della statistica di Fermi-Dirac e un numero qualsiasi, anche infinito, per la statistica di Bose-Einstein.

Gentile scrive:

" Einstein, seguendo Bose, ammette che uno stato del sistema delle N molecole del suo gas sia perfettamente definito quando siano dati il numero delle molecole che stanno nel primo stato quantico, il numero di quelle che occupano il secondo stato e così via. Lo stesso fa Fermi: per ambedue quindi non ha importanza che la molecola a stia nel primo stato e la molecola b nel secondo o viceversa; ma semplicemente ha importanza che tanto il primo quanto il secondo stato siano occupati da una sola particella. (Per Boltzmann invece bisognerebbe distinguere il primo dal secondo caso).

Tutto ciò si può interpretare dicendo che due molecole del nostro gas non sono tra loro distinguibili in alcun modo. La meccanica quantistica, come ha dimostrato Dirac (che con Fermi divide il merito di aver fondato la statistica che porta il loro nome), afferma la necessità di una tale conclusione. Questo è dunque il tratto comune a una qualunque statistica quantistica.

Dove invece Fermi si discosta da Einstein è che Einstein ammette con Bose che in uno stato quantico vi possa stare un numero qualsiasi anche infinito di particelle; mentre Fermi, tenendosi al principio di esclusione di Pauli, ammette che, al più, in uno stato quantico si possa trovare una ed una sola particella."[8]

L'autore pone allora l'ipotesi più generale che in una cella vi possa essere al più un numero finito d di particelle e in questo modo arriva alla formula generale delle statistiche intermedie che contiene come casi particolari la formula corrispondente alla statistica di BE e quella della statistica di FD.

Utilizzando[9] il metodo presentato da Bose nel suo lavoro del 1924 , Gentile, per ogni livello energetico s introduce come variabili gli "occupancy numbers" prima definiti, cioè il numero p_r^s di celle di quel livello occupate 0 volte, una volta,...., r volte, fino a d volte che è il numero massimo di occupazione.

Supponiamo di conoscere per ogni livello energetico $\mathbf{p}^s=(p_0^s, p_1^s,\ldots..p_d^s)$ relativo alle celle del livello s occupate rispettivamente da 0,1,...d particelle. E' ovvio che :

$$\sum_{r=0}^{d} p_r^s = Q_s \quad \text{è il numero di celle di energia } E_s \ (1)$$

$$\sum_{r=0}^{d} r p_r^s = N_s \text{è il numero di particelle di energia } E_s (2)$$

$$\sum_s N_s=\sum_{sr} r\, p_r^s=N \qquad \text{è il numero totale di particelle(3)}$$

con

$$\sum_{sr} r\, p_r^s\, E_s=\sum_s N_s E_s = E \text{ è l'energia totale del sistema (4)}$$

Il numero di vettori di occupazione relativi alle Q_s celle del livello subordinatamente alla distribuzione di $\mathbf{p}^s$ sarà dato da $W_s=\dfrac{Q_s!}{p_0^s!p_1^s!..p_d^s!}$.

Vi sono in totale $W=\prod_s \dfrac{Q_s!}{p_0^s!p_1^s!..p_d^s!}$ diversi **n** dato un $\mathbf{p}=(\mathbf{p}^1,..\mathbf{p}^k)$, relativo ad uno stato macroscopico di $N=\sum_s N_s$ particelle e energia totale $E=\sum_s N_s E_s$.

Seguendo il metodo elementare opportunamente modificato, la condizione di massima entropia è data dalla descrizione **p** per cui è massimo il logaritmo di W. Si determina il massimo di

$$\ln\{\prod_s \frac{Q_s!}{p_0{}^s!p_1{}^s!..p_d{}^s!}\}=\sum_s \ln\{\frac{Q_s!}{p_0{}^s!p_1{}^s!..p_d{}^s!}\}=\sum_s \{\ln Q_s! - \sum_r \ln p_r{}^s!\},$$

tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, tenendo conto dei vincoli (3), (4).

L'"occupancy number vector" **p** che si realizzerà sarà tale che

$$\sum_s (\ln Q_s!)- \sum_{sr}\ln p_r{}^s! +\_\sum_{rs} rp_r{}^s+\_\sum_{sr} rp_r{}^sE_s=\max.$$

Applicando la formula di Stirling per i fattoriali si ottiene:

$$\sum_{sr}\{Q_s\ln Q_s-Q_s -p_r{}^s\ln p_r{}^s+p_r{}^s +\_rp_r{}^s+\_rp_r{}^sE_s=\max.$$

Ponendo uguale a zero la derivata rispetto alla variabile $p_r{}^s$ e cioè $-\ln p_r{}^s +\_r+\_rE_s =0$,

si ottiene come soluzione dell'equazione :

$$p_r{}^s =e^{-(\_\_r+\_rE_s)}=e^{-r(\_+\_rE_s)}= e^{-r\_s}$$

dove si è posto $(\_+\_E_s)= \_s$.

$p_r{}^s$ può essere scritto in funzione anche di Q_s, tenendo conto che $p_0{}^s+p_1{}^s+..+p_d{}^s=Q_s$. Infatti, ponendo per semplificare $e^{-\_s} =q=q_s$ si può scrivere :

$$Q_s=\sum_{r=0}^{d} e^{-r\_s}=\sum_{r=0}^{d} q^r=\frac{1-q^{d+1}}{1-q}$$, per cui $p_r{}^s$ può essere riscritto come

$$p_r{}^s= Q_s\frac{1-q}{1-q^{d+1}}\ q^r \text{ con } r=0,1,..,d \text{ e cioè } p_r{}^s= Q_s\frac{1- e^{-g_s}}{1- e^{-(d+1)g_s}}\ e^{-r\_s}$$

Dalla conoscenza del **p** più probabile si risale al macrostato più probabile che risulta essere:

$$N_s=\sum_r rp_r{}^s=Q_s\frac{1-q}{1-q^{d+1}}\ \sum_r rq^r = Q_s\frac{1-q}{1-q^{d+1}}\ q\frac{-(d+1)q^d(1-q) +1-q^{d+1}}{(1-q)^2} \qquad 1)$$

in quanto $\sum_0^d rq^r=\sum_1^d rq^r= q\sum_1^d rq^{r-1}=q\frac{d}{dq}\sum_0^d q^r = q\frac{d}{dq}\frac{1-q^{d+1}}{1-q} = q\frac{-(d+1)q^d(1-q) +1-q^{d+1}}{(1-q)^2}$,

dove q dipende da s.

Sviluppando il numeratore in questo modo:

$-(d+1)\, q^{d}(1-q) + 1-q^{d+1} = -(d+1)q^{d} + (d+1)q^{d+1} + 1-q^{d+1} = 1-(d+1)q^{d} + dq^{d+1}.,$

si ottiene alla fine:

$$N_s = Q_s \frac{q-(d+1)q^{d+1} + dq^{d+2}}{(1-q)\,(1-q^{d+1})}$$

che è proprio la distribuzione come compare nell'articolo sul Nuovo Cimento[10] e sui Rendiconti R. Istituto Lombardo[11] e cioè:

$$N_s = Q_s \frac{e^{-g_s} + de^{-(d+2)g_s} - (d+1)\, e^{-(d+1)g_s}}{(1-e^{-g_s})\,(1-e^{-(d+1)g_s})} \quad 2)$$

Semplificando invece direttamente la 1) si ottiene come distribuzione delle statistiche intermedie la formulazione :

$$N_s = Q_s\left\{\frac{q}{1-q} - (d+1)\frac{q^{d+1}}{1-q^{d+1}}\right\} = Q_s\left\{\frac{e^{-g_s}}{1-e^{-g_s}} - (d+1)\frac{e^{-(d+1)g_s}}{1-e^{-(d+1)g_s}}\right\} =$$

$$= Q_s\left\{\frac{1}{e^{(a+bE_s)} - 1} - (d+1)\frac{1}{e^{(d+1)(a+bE_s)} - 1}\right\} \quad 2')$$

come appare nell'articolo *Le statistiche intermedie e le proprietà dell'Elio liquido* [12], ripresa poi da P. Caldirola[13] .

Questa per d=1(gas di Fermi) si riduce alla formula di Fermi-Dirac.

Infatti

$N_s = Q_s\left\{\frac{q}{1-q} - (d+1)\frac{q^{d+1}}{1-q^{d+1}}\right\}$ per d=1 diventa

$$N_s = Q_s\left\{\frac{q}{1-q} - 2\frac{q^2}{1-q^2}\right\} = Q_s\left\{\frac{q(1+q)-2qq}{1-q^2}\right\} = Q_s\left\{\frac{q}{1+q}\right\}$$ e cioè:

$$N_s = \frac{Q_s}{e^{(a+bE_s)} + 1}$$

Per d=∞ la formula coincide con la formula di Bose-Einstein: $N_s = Q_s\left\{\frac{1}{e^{(a+bE_s)} - 1}\right\}$

Per un valore sufficientemente grande di E la 2') si trasforma nella legge classica di Maxwell-Boltzmann, caso che, scrive Gentile[14], corrisponde perciò ad alte temperature.

Come dice P. Caldirola[15] " Questo procedimento presenta in realtà delle difficoltà matematiche, perchè quando d __N i numeri p_r, con $r > \frac{N}{2}$, assumono solo i valori 0 e 1 rendendo dubbia la possibilità di fare un uso corretto della formula di Stirling (ln n! = n (ln n-1)) e di considerare i numeri p_r come variabili differenziabili. Dette difficoltà si possono, almeno in buona parte, eliminare conducendo i calcoli secondo i metodi generali e rigorosi sviluppati da v.Mises[16], che evitano l'uso di derivazioni e della formula di Stirling."

Caldirola inoltre è piuttosto critico sull'ipotesi di equiprobabilità dei vettori di occupazione. Solo che il suo commento rivela una grande confusione di termini probabilistici, che merita senz'altro un'analisi più accurata. Infatti egli scrive[17]."Questa ipotesi (che tutte le serie di numeri (...n_s...) che soddisfano alle $_s n_s$=N, $_s n_s E_s$=E, sono egualmente probabili), che è in sostanza equivalente a quella ammessa nel metodo di Bose, equivale in pratica a supporre che la probabilità che una particella vada in un determinato stato quantico sia indipendente dal numero di particelle che già si trovano in detto stato. Essa è certamente verificata nei casi estremi, considerati da Pauli."

Questo è indubbiamente sbagliato. Egli confonde la probabilità che una cella sia occupata una volta (anzichè 0, 2,..) con la probabilità che una particella occupi una certa cella (e non un'altra delle g possibili. Prosegue incredibilmente: "Infatti per d=1 non si trovano su uno stato quantico altre particelle oltre quella considerata; per d=_ ogni particella trova sempre su ogni livello un numero infinitamente grande di posti liberi" In realtà il metodo di Brillouin mostra che i fermioni sono correlati negativamente, da cui segue il principio di esclusione, mentre i bosoni sono correlati positivamente, da cui seguono i fenomeni di "bunching", l'emissione stimolata, ... E' curioso come Caldirola[18] si avveda della correlazione nel caso delle statistiche intermedie: "Nel caso di una statistica intermedia si hanno invece in ogni cella un numero finito d di posti che possono essere occupati dalle particelle; oltre all'ipotesi della equiprobabilità, ammessa da Gentile, si può supporre che la probabilità che una particella vada in una determinata cella sia proporzionale anche al numero di posti liberi che in una detta cella ancora esistono." Ma allora il caso FD (d=1)?

Il ragionamento di Caldirola riapre in direzione di Brillouin, lo studioso che per primo tentò di unificare la formulazione per le tre statistiche. E' ancora curioso notare che lo stesso Gentile[19] abbia considerato il metodo di Brioullin come inadeguato per i suoi scopi.

3. Confronto con la formulazione di Brillouin.

Nel 1927 Brillouin [20] tentò di dare una formulazione unitaria ai tre approcci; chiamando genericamente con A i termini costanti , il cui ruolo del resto è nullo quando si cerca la distribuzione più probabile, egli fornisce la seguente espressione per le tre statistiche :

$$\ln W = A - \sum_i N_s \ln N_s + \begin{cases} \sum_i (N_s - g_s)\ln(g_s - N_s) & \text{Fermi-Dirac} \\ \sum_i N_s \ln g_s & \text{Maxwell-Boltzmann} \\ \sum_i (N_s + g_s)\ln(g_s + N_s) & \text{Bose-Einstein} \end{cases} \qquad 1)$$

La sua ipotesi base è quella di considerare tutte le particelle, classiche o no, distinguibili ma non indipendenti, di modo che la probabilità di mettere una particella in una cella già occupata dipenda dal numero di particelle che già la occupano. Riassumiamo qui brevemente il metodo, già esposto diffusamente altrove[21].

Brillouin suppone che :

a) ciascuna cella vuota abbia una capacità uguale a 1;
b) ciascuna particella abbia un volume uguale ad a ;
c) se una cella contiene n_j particelle, la sua capacità diventi $(1-n_j a)$.

Relativamente alla **b)** i fermioni (a=1) hanno un volume positivo, le particelle classiche (a=o) non hanno volume e i bosoni (a= -1) hanno un volume negativo.

Traducendo in un modello probabilistico corretto, ponendo il parametro libero che caratterizza la correlazione tra le accomodazioni delle particelle c=-a, la probabilità della sequenza che descrive le N particelle si ricava in modo ricorsivo nel modo seguente:

1) la probabilità che la m+1-ma particella occupi la cella j, dato che le prime m sono collocate nel microstato $\mathbf{m}=(m_1,\ldots,m_g)$, $\sum m_j=m$, è data da

$$\Pr(X_{m+1}=j\,|\,\mathbf{m}) = \frac{1+cm_j}{g+cm} \quad j=1,..,g$$

che per c>0 induce correlazioni positive tra le accomodazioni, per c=0 correlazioni nulle (indipendenza), e per $-1\leq c<0$, della forma $-c=\frac{1}{d}$, correlazioni negative.

E' chiaro che in questo modo è facile calcolare la probabilità di qualsiasi sequenza completa (lunga N), e quindi quella di qualunque vettore di occupazione **n**.

Allo stesso modo è possibile calcolare la la probabilità che la m+1-ma particella occupi il livello s, dato che le prime m sono collocate nel macrostato $\mathbf{M}=(M_1,\ldots,M_k)$. Essa è data da :

$$\Pr(X_{m+1}=s\,|\,\mathbf{m}) = \frac{g_s+cM_j}{g+cM} \quad s=1,..,k$$

In tal modo si può facilmente calcolare la probabilità di ogni macrostato **N**, che risulta essere:

$$\Pr_c(\mathbf{N}) = \frac{n!}{(g/c)^{[n]}} \prod_s \frac{(g_s/c)^{[N_s]}}{N_s!}$$

dove $x^{[n]}=x(x+1)..(x+n-1)$ è il simbolo di Pochammer, che è definito anche per $x<0$, basta che $|x|>n-1$. La trattazione pertanto è completamente unificata.

Nel limite $g_S,N_S>>1$, applicando l'approssimazione di Stirling, otteniamo:

$$\ln\{Pr_C(\mathbf{N})\} = \sum_S\left(\frac{g_S}{c} + N_S\right)\ln\left\{\frac{g_S+cN_S}{g+cn}\right\}-\sum_S\frac{g_S}{c}\ \ln\left\{\frac{g_S}{g}\right\}-\sum_S N_S\ln\left\{\frac{N_S}{n}\right\}$$

che comprende i tre casi "fisici" della (1), e li estende a tutti i valori ammessi di c. Il macrostato più probabile, dati i vincoli $\sum_S N_S=N$ e $\sum_S N_{S-S}=E$, è dato da:

$$N_S(c) = \frac{g_S}{e^{\{bes - n\}} - c}$$

I casi noti con $c=0$ e $c=\pm1$ sono immediati. Il caso delle statistiche intermedie "*a la Gentile*"

è quello con $-c=\frac{1}{d}$, per cui la versione di Brilluoin di tali situazioni è:

$$N_S\left(-\frac{1}{d}\right) = \frac{dg_S}{d\,e^{\{bes - n\}} + 1}$$

Mentre le statistiche intermedie non esistono a livello fisico, i metodi di Brillouin per valori di c diversi da 0 e ±1 sono applicati in contesti non fisici , ad esempio l'economia[22].

NOTE

[1] Dipartimento di Fisica, Università di Genova

[2] A.Bach et Al., *Bose-Einstein Statistics derived from the Statistics of classical particles,* Lett.Nuovo Cimento, 43 (4),195-198

[3] S.Bose, *Plancks gesetz und lichtquantenhypothese*, Zts. Phys, 26,1924

[4] D.ter Haar, Elements of Statistical Mechanics, Rinehart &Comp.Inc., NewYork 1958

[5] Le virgolette sono giustificate dal fatto che la probabilità è solo "combinatoria", e l'entropia è data in termini di W(**N**). Notare che in senso stretto il permine "probabilità" non compare in tutta la trattazione.

[6] G.Gentile j., *Osservazioni sopra le statistiche intermedie*, Il Nuovo Cimento, a.XVII, 10, dicembre 1940.

[7] "Ma, in via puramente teorica, non si potrebbe pensare che si possano dare statistiche in cui il numero massimo di occupazione di uno stato quantico sia un numero qualunque intero e positivo d?....Questa fu la domanda che mi fu rivolta un giorno dal Prof. Polvani. " G.Gentile j., *Le statistiche intermedie e le proprietà dell'elio liquido,* Rendiconti Seminario Matematico e Fisico di Milano, vol. XV, 1941, pag.101

Si veda anche la Commemorazione letta il 23 Aprile 1942 al R. Istituto Lombardo da G. Polvani , pubblicata su Il Nuovo Cimento,a. XXI, n.1, febbraio 1943, pag.157.

[8] *Le statistiche intermedie e le proprietà dell'elio liquido* pp.100-101.

[9]Scrive Gentile: "Però quando si affronti questo problema calcolando direttamente il numero dei modi in cui, relativamente ad una determinata configurazione, è possibile ripartire le N_S particelle di energia E_S sulle Q_S celle a disposizione, si va incontro ad un problema di calcolo combinatorio molto complicato - mentre per le due statistiche tipiche basta conoscere semplicemente il numero delle combinazioni, semplici, o con ripetizione, di Q_S elementi della classe N_S. Il metodo più rapido per trattare il problema è invece quello originale di Bose." *Osservazioni sopra le statistiche intermedie* ,pp.493 - 494.

[10] vedi pag.495

[11] G. Gentile,*Osservazione sopra le statistiche intermedie,* Rendiconti R Istituto Lombardo, classe di Scienze, vol.LXXIV, I, 1940-41, pag.135

[12] vedi *Le statistiche intermedie e le proprietà dell'Elio liquido*, pag.102.

[13] P.Caldirola, *Osservazioni sulle statistiche intermedie*, Ricerca Scientifica, a.XII, n.10, ottobre 1941, pag.1020.

[14] vedi *Le statistiche intermedie e le proprietà dell'Elio liquido*, pag.102.

[15] P.Caldirola, *Osservazioni sulle statistiche intermedie*, pag.1021

[16] R.V.Mises,*Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik*, I B, Leipzig, 1931, pag.409

[17] P. Caldirola, *Osservazioni sulle statistiche intermedie* pag.1022

[18] Sempre su *Osservazioni sulle statistiche intermedie*, pag.1022.

[19] Scrive Gentile in una nota all'inizio del suo articolo *Osservazioni sopra le statistiche intermedie* :" Il metodo usato da Brillouin non si presta per trattare (per lo meno sino al punto in cui è stato sviluppato) l'ipotesi più generale qui considerata", pag 493.

[20] L.Brillouin, *Comparaison des différentes statistiques appliquées aux problèmes de Quanta*, Ann.de Phis., VII, 1927, pp. 315-331.

[21] U.Garibaldi,M.A.Penco,:*Le statistiche di Brillouin come processi stocastici scambiabili*, Atti dell'XI Congresso di Soria della Fisica, 1990, pp. 225-235

[22] Si veda ad esempio:D. Costantini and U. Garibaldi: *A Purely Probabilistic Representation for the Dynamics of a Gas of Particles*, Found. of Phys., Vol. 30, N. 1, January 2000.

U.Garibaldi and M.A.Penco: *Ehrenfest's urn model generalized: an exact approach for market partecipation models*, Statistica Applicata, in stampa