

Giulio Peruzzi<sup>1</sup>

## Vortici, Campi e Lanterne Magiche

### Introduzione

A partire dalla seconda metà dell'Ottocento, la nozione di vortice acquista una particolare rilevanza nello sviluppo della fisica. Basti pensare al ruolo svolto da modelli a vortici sia nella fase nascente della teoria dei campi elettromagnetici sia nei primi tentativi di schematizzazione della struttura della materia. Dopo una fase di declino e abbandono dei modelli a vortici, collocabile tra la fine dell'Ottocento e i primi decenni del Novecento, i fisici riscoprono e approfondiscono in forme nuove le potenzialità insite in questi modelli.

Tra gli antesignani dell'applicazione della nozione di vortice all'indagine del mondo naturale si colloca sicuramente Descartes. Per Descartes "l'unica proprietà essenziale della materia è l'estensione e la materia è una condizione necessaria dell'estensione". L'universo cartesiano per esistere fisicamente deve essere un *plenum* e la semplice esistenza di corpi apparentemente separati da una distanza – come la terra e il sole – è una prova dell'esistenza tra loro di un mezzo continuo, un fluido etereo che là dove non appare sotto forma di materia solida compie moti vorticosi in cui "nuotano" i corpi celesti. In forme tra loro diverse sia Leibniz sia Newton, pur criticando alcuni dei caposaldi e degli esiti della metafisica cartesiana, si confrontano con la nozione di vortice quando analizzano i problemi legati alle azioni a distanza e alle azioni per contatto all'interno del più vasto problema del significato del continuo in fisica. A partire però dalla seconda metà del Settecento, il progressivo affermarsi della dottrina dell'azione a distanza, identificata come l'autentica tradizione newtoniana, e i grandi successi teorici e sperimentali conseguiti dai "newtoniani" rispetto ai "cartesiani", portano a guardare con sospetto non solo la metafisica cartesiana ma anche tutti i modelli ad essa riconducibili, ivi compreso quello dei vortici. Questa "messa all'indice" della nozione di vortice da parte dell'ortodossia newtoniana prosegue fino ai primi decenni dell'Ottocento, fino a quando cioè si producono due fondamentali incrinature nel dogma dell'azione a distanza: la prima riguarda l'affermarsi della teoria ondulatoria della luce, con la conseguente riconsiderazione di azioni fisiche mediate da fluidi eterei continui; la seconda riguarda l'approccio britannico ai fenomeni elettromagnetici, al quale concorrono prima di tutto Faraday, W. Thomson (il futuro lord Kelvin) e J. Clerk Maxwell. E non è un caso che tutti e tre questi scienziati affermino con forza la continuità del loro lavoro con quello di Newton contro i presunti veri newtoniani. Scrive Maxwell nel 1873<sup>(1)</sup> nel suo *On Action at a distance* (la citazione del passo di Newton si ritrova anche in uno scritto di W. Thomson del 1872<sup>(2)</sup> sui corpuscoli ultimondani di Le Sage)

Newton era tanto lontano dall'asserire che i corpi agissero realmente gli uni sugli altri a distanza, indipendentemente da una qualunque cosa tra loro interposta, che in una lettera a Bentley, che in questa sede [la *Royal Institution*] è stata già citata da Faraday, dice:

È inconcepibile che la materia bruta e inanimata possa, senza la mediazione di qualcosa di diverso che non sia materiale, operare ed agire su altra materia senza contatto reciproco, come dovrebbe appunto accadere se la gravitazione nel senso di Epicuro fosse essenziale e inerente alla materia stessa... Che la gravità possa essere innata, inerente e essenziale alla materia, così che un corpo possa agire su un altro a distanza e attraverso un vuoto, senza la mediazione di qualcosa grazie a cui e attraverso cui l'azione e la forza possano essere

---

<sup>1</sup> Centro Interdipartimentale di Ricerca in Storia e Filosofia delle Scienze e Dipartimento di fisica "G. Galilei" Università di Padova e-mail: peruzzi@pd.infn.it

trasportate dall'uno all'altro, ebbene tutto ciò è per me un'assurdità così grande che io non credo che un uomo, il quale abbia in materia filosofica una capacità di pensare in modo competente, possa mai cadere in essa.

Svuotata così dei suoi contenuti "ideologici" la nozione di vortice torna ad essere un modello possibile, il cui importante ruolo euristico si palesa prima di tutto nella fase di formulazione della teoria dei campi elettromagnetici di Maxwell.

Una volta riacquistata piena cittadinanza come strumento di analisi dei fenomeni naturali, la nozione di vortice verrà sviluppata sia nell'ambito delle ricerche fisiche sia in quello delle ricerche matematiche, in un periodo, la seconda metà dell'Ottocento, nel quale il ruolo del continuo matematico nella fisica acquista sempre maggiore centralità parallelamente agli sviluppi in ambito matematico. Gli studi sulla gravitazione, l'elasticità, l'idrodinamica, il calore, l'ottica, l'elettricità e il magnetismo ricevono grande impulso dall'impiego di versioni sempre più raffinate delle analogie dinamiche basate sul formalismo lagrangeano e dai contestuali sviluppi delle teorie del potenziale, sottolineando un forte radicamento della fisica del XIX° secolo sul continuo. Non è quindi strano che proprio in stretta connessione con le ricerche fisiche dell'Ottocento, e anzi con un trasferimento di legittimazione dalla fisica alla matematica, si affermino i primi concetti e risultati di topologia. La topologia, che dalla fine dell'Ottocento acquisterà lo status di settore autonomo di ricerca matematica, trova nella nozione di vortice uno dei fondamentali catalizzatori di idee e risultati provenienti da diversi ambiti di ricerca: la matematica, la fisica, la chimica. I rapporti tra topologia e fisica, che segnano la nascita della topologia, e che sembrano perdersi nei primi decenni del XX° secolo, si ristabiliscono successivamente in nuove forme contribuendo in modo sostanziale agli sviluppi della fisica teorica.

Nella prima parte di questo scritto si analizzeranno brevemente le due principali applicazioni dei modelli basati sulla nozione di vortice nell'Ottocento, "vortici e campi" e "vortici e materia", mentre nella seconda si passeranno in rassegna alcuni significativi sviluppi e trasformazioni dei modelli a vortici nella fisica del Novecento, mantenendo ancora la partizione tematica in "vortici e campi" e "vortici e materia". Sullo sfondo della trattazione diacronica stanno le questioni epistemologiche, legate alla nozione di modello nella fisica e alla sua funzione di "cerniera" tra fenomenologia e formalizzazione. Un approfondimento della complessa storia dell'impiego dei modelli a vortici nella fisica può sicuramente fornire ulteriori elementi alla riflessione nell'ambito epistemologico.

### **I Parte - Vortici e fisica nel XIX° secolo**

Abbiamo già elencato alcune ragioni della ripresa Ottocentesca della nozione di vortice. Ad esse va sicuramente aggiunto il manifestarsi di nuovi e profondi rapporti tra geometria e fisica. La contrapposizione nell'ambito delle ricerche fisiche di gran parte del XIX° secolo tra approccio continentale, fondato sull'azione a distanza, e approccio britannico, fondato sull'azione mediata dal campo, si radica anche su una originaria differenza nell'uso della matematica nella fisica, e sullo spazio che in essa devono avere concetti e strumenti geometrici. Una funzione cruciale per riconsiderare i rapporti tra geometria e fisica è sicuramente svolta da Faraday. A questo proposito è particolarmente

significativo il brano seguente tratto dall'introduzione di Maxwell al *Treatise* del 1873.<sup>(3)</sup>

Man mano che procedevo nello studio di Faraday, mi accorgevo che il suo metodo di concepire i fenomeni era anche di tipo matematico, sebbene non si esprimesse nella forma convenzionale dei simboli matematici. E scoprivo anche che questi metodi erano suscettibili di essere espressi nelle usuali forme della matematica e in tal modo confrontabili con quelli dei matematici dichiarati.

Per esempio, Faraday, con la sua immaginazione, vedeva linee di forza che attraversavano l'intero spazio, dove i matematici vedevano centri di forza che si attiravano a distanza; Faraday vedeva un mezzo dove questi non vedevano altro che distanza; Faraday cercava la sede dei fenomeni nelle azioni reali che si verificano nel mezzo, mentre questi erano appagati dall'averla trovata in una potenza dell'azione a distanza impressa sui fluidi elettrici.

Quando sono riuscito a tradurre in forma matematica quelle che consideravo fossero le idee di Faraday, ho trovato che in generale i risultati dei due metodi coincidevano, poiché gli stessi fenomeni venivano spiegati e le stesse leggi di azione dedotte da entrambi i metodi, ma che i metodi di Faraday assomigliavano a quelli nei quali si inizia con il tutto e si arriva alle sue parti per via analitica, mentre i metodi matematici usuali erano fondati sul principio di iniziare con le parti e costruire l'intero per via sintetica.

Non è un caso che i primi esempi dei legami profondi tra topologia e fisica siano opera prima di tutto di scienziati britannici che utilizzano e sviluppano risultati continentali in un contesto più idoneo al dispiegamento di tutte le loro potenzialità.

### **I.1 - Vortici e campo**

Nei primi due anni passati al *King's College* di Londra, Maxwell dedica gran parte delle sue energie alla stesura del suo secondo lavoro sulla teoria elettromagnetica.<sup>(4)</sup> La differenza sostanziale tra questo lavoro e il precedente<sup>(5)</sup> viene sottolineata subito all'inizio da Maxwell. Con il primo lavoro, egli spiega, era riuscito a trovare il significato geometrico dello "stato elettro-tonico" e a mostrare come dedurre le relazioni matematiche tra lo stato elettro-tonico, il magnetismo, le correnti elettriche e le forze elettromotrici, facendo uso di illustrazioni meccaniche per aiutare l'immaginazione, ma non per dar conto dei fenomeni descritti. "Ora – prosegue Maxwell – mi propongo di esaminare i fenomeni magnetici da un punto di vista meccanico, e determinare quali tensioni in, o moti di, un mezzo siano in grado di produrre i fenomeni meccanici osservati. Se, per mezzo della stessa ipotesi, possiamo collegare i fenomeni dell'attrazione magnetica con i fenomeni elettromagnetici e con quelli delle correnti indotte, avremo trovato una teoria che, anche se non vera, potrà essere dimostrata erronea solo con esperimenti che allarghino grandemente le nostre conoscenze di questa parte della fisica".

La base di questa *teoria fisica* del campo elettromagnetico è un modello che impiega "vortici molecolari", i cui assi di rotazione sono orientati lungo le linee del campo magnetico. L'idea di Maxwell di utilizzare un modello a vortici per esprimere le caratteristiche fisiche di un mezzo atto a trasmettere le azioni

elettromagnetiche proviene – come ci informa una sua lettera a Faraday del 1857 – dai suoi tentativi di estendere l'interpretazione data da W. Thomson all'effetto magneto-ottico in un articolo del 1856.<sup>(6)</sup> Thomson supponeva che questo fenomeno fosse causato dall'accoppiamento tra le vibrazioni dell'etere luminoso e le rotazioni di vortici molecolari in un mezzo materiale, nel quale gli assi di rotazione dei vortici si allineavano alla direzione delle linee di forza del campo magnetico. Ma non c'era solo Thomson all'origine del modello maxwelliano. Verso la fine degli anni Quaranta, John William Rankine (1820-1872), anche lui come Maxwell allievo di Forbes, aveva proposto una nuova teoria della materia per interpretare le proprietà termodinamiche dei gas in chiave anti-atomistica. Nella teoria di Rankine, citata da Thomson nel suo articolo del 1856, le molecole erano interpretate come piccoli nuclei di atmosfere eteree rotanti nello spazio con velocità proporzionale alla temperatura.

Nelle prime due parti del suo articolo Maxwell illustra il suo modello e come esso possa essere applicato per ottenere le equazioni fondamentali del campo elettromagnetico. Lo spazio è considerato come un fluido nel quale ruotano "innumerevoli vortici", i cui assi di rotazione coincidono con la direzione delle forze magnetiche in ogni punto del campo. In assenza di vortici la pressione è uguale in tutte le direzioni; mentre in presenza di vortici le forze centrifughe, causate dalla rotazione di questi, fanno sì che ogni vortice si contragga longitudinalmente ed eserciti radialmente una certa pressione dipendente dalla velocità. Faraday, in un articolo del 1852,<sup>(7)</sup> dal quale Maxwell riprende il titolo per questo suo lavoro, aveva già proposto una descrizione qualitativa dei fenomeni magnetici ed elettromagnetici ipotizzando un accorciamento longitudinale delle linee di forza e una repulsione reciproca laterale. La prima deduzione dal modello è quindi promettente.

Il passo successivo, per Maxwell, è considerare la velocità angolare di ogni vortice proporzionale all'intensità locale del campo magnetico. In questo modo egli ottiene che le espressioni delle forze agenti tra magneti, correnti elettriche e diamagneti siano identiche a quelle delle teorie esistenti. Prima di affrontare il problema dell'induzione elettromagnetica è però necessario – egli osserva – “descrivere il meccanismo tramite il quale queste rotazioni possono essere fatte coesistere, ed essere distribuite secondo le leggi note delle linee di forza magnetiche”. In altre parole bisogna rispondere alla domanda: come fanno due vortici adiacenti a ruotare liberamente nello stesso senso, visto che le loro superfici si muovono in direzione opposta? L'ipotesi introdotta da Maxwell è di “concepire la materia rotante come sostanza di certe celle, separate tra loro da pareti (*cell-walls*) formate da particelle molto più piccole delle dimensioni delle celle. Queste particelle costituenti le pareti di separazione tra i vortici, da Maxwell identificate con la “materia dell'elettricità”, svolgono una funzione simile a quella delle palline d'acciaio negli attuali cuscinetti a sfere: rotolando sulle superfici dei vortici comunicano la rotazione da una “cella” all'altra.

In questo quadro l'elettricità acquista connotati completamente diversi da quelli usuali: invece di essere un fluido confinato nei conduttori essa è disseminata ovunque, libera di muoversi nei conduttori (anche se soggetta a una resistenza) e bloccata nei dielettrici (ivi compreso lo spazio, il dielettrico primordiale).

In tal modo Maxwell riesce ad includere nel modello meccanico la spiegazione delle azioni magnetiche e induttive delle correnti, e inoltre ottiene un'interpretazione fisica della funzione elettrotonica che aveva introdotto nel precedente articolo. La funzione elettrotonica svolge, infatti, nel caso delle forze elettromotrici un ruolo simile a quello che Newton aveva attribuito all'impulso nell'espressione della forza. Per Newton, data una particella di massa  $m$ , se si conosce la sua velocità  $v$  in funzione del tempo si può ricavare la forza dall'equazione  $F = (d / dt) mv$ , che esprime la forza come derivata rispetto al tempo dell'impulso  $mv$ . Per Maxwell la funzione elettrotonica  $A$  può essere interpretata alla stregua di un *momento* del sistema di vortici, definito punto per punto, e quindi la forza elettromotrice  $E$  non è altro che la derivata parziale rispetto al tempo della funzione elettrotonica.

Sembra proprio che l'articolo di Maxwell si dovesse concludere con queste due prime parti. Ma durante l'estate del 1861, mentre si trova a Glenlair, Maxwell elabora ulteriormente il suo modello a vortici introducendo l'idea che la sostanza ruotante nelle celle possiede proprietà elastiche "simili a quelle dei corpi solidi anche se di grado diverso". "La teoria ondulatoria della luce – scrive Maxwell all'inizio della III parte – ci richiede di ammettere questo genere di elasticità nel mezzo luminifero, per poter render conto delle vibrazioni trasverse. Non dobbiamo quindi essere sorpresi se il mezzo magneto-elettrico possiede le stesse proprietà".

La descrizione dell'elettricità ricavata dal suo modello gli permette di considerare i fenomeni di polarizzazione dei dielettrici come un caso particolare dei fenomeni di conduzione. "È un fatto sperimentalmente noto – scrive Maxwell – che la tensione elettrica è la stessa cosa osservata sia nell'elettricità statica sia nella corrente, cosicché una forza elettromotrice prodotta dal magnetismo può essere utilizzata per caricare una bottiglia di Leida". Quando una differenza di tensione è applicata a parti diverse di un corpo si hanno due possibili effetti. Se il corpo è conduttore, la "materia dell'elettricità" si muove rotolando tra le superfici dei vortici dando luogo alla corrente elettrica: le forze tangenziali impresse dalla materia delle celle sono le forze elettromotrici e la pressione che le particelle esercitano le une sulle altre corrisponde al potenziale dell'elettricità. Se il corpo è un isolante, la differenza di tensione viene immagazzinata nel mezzo elastico sotto forma di energia potenziale tramite le deformazioni dei vortici molecolari. Queste deformazioni inducono uno *spostamento* delle particelle formanti la "materia dell'elettricità" dalle loro posizioni di equilibrio, per cui una parte della molecola si carica positivamente e l'altra negativamente. A differenza però di quanto avviene in un conduttore, l'elettricità rimane legata alle molecole e non passa da una molecola all'altra. L'effetto di quest'azione sull'intero dielettrico produce uno spostamento generale dell'elettricità in una certa direzione. "Questo spostamento – scrive Maxwell – non equivale a una corrente, poiché raggiunto un certo valore si mantiene costante, ma è l'inizio di una corrente, e le sue variazioni danno luogo a correnti nella direzione positiva o negativa, a seconda che lo spostamento aumenti o diminuisca".

Maxwell quindi conclude che la distinzione tra conduzione e induzione elettrica statica è del tutto analoga alla distinzione che nella materia viene fatta tra processi viscosi e processi elastici: il conduttore è assimilabile a una membrana porosa che oppone una maggiore o minore resistenza al passaggio di

un fluido, mentre un dielettrico si comporta come una membrana elastica che è impermeabile al fluido ma ne trasmette la pressione da una parte all'altra.

In questo modo Maxwell ottiene due fondamentali risultati. Il primo riguarda il fatto che una corrente variabile in un conduttore induce nel mezzo circostante (sia questo un materiale isolante o semplicemente lo spazio) piccoli cambiamenti nelle posizioni delle particelle elettriche, cioè l'effetto della corrente variabile è quello di suscitare delle piccole correnti nel mezzo associate allo *spostamento* delle particelle. Questo permette a Maxwell di completare le sue equazioni tenendo presenti gli effetti di quelle che ancora oggi sono chiamate *correnti di spostamento*. Ma vi è anche un secondo risultato. Visto che il mezzo è elastico, è possibile determinare la velocità con la quale il disturbo elettromagnetico si propaga attraverso di esso. Sulla base dei calcoli fatti utilizzando il suo modello, Maxwell è portato a concludere:

“La velocità del movimento ondulatorio trasverso nel nostro mezzo ipotetico, calcolata dagli esperimenti elettromagnetici di Kohlrausch e Weber, concorda in modo così perfetto con la velocità della luce calcolata dagli esperimenti ottici di Fizeau, che ci sarebbe difficile non inferire che *la luce consista nei moti ondulatori trasversi dello stesso mezzo che è la causa dei fenomeni elettrici e magnetici.*”

Il corsivo di Maxwell, al di là di quel cautelativo “ci sarebbe difficile non...”, sottolinea il suo entusiasmo per un risultato che probabilmente ancora pochi mesi prima non pensava di poter ottenere. Sono così delineati i fondamenti di quella che nel lavoro successivo egli chiamerà *la teoria elettromagnetica della luce*. E Maxwell ne dà immediatamente notizia ai suoi due principali ispiratori: Faraday e Thomson.

La funzione cruciale svolta dal modello a vortici nella formulazione del sistema completo delle equazioni per il campo elettromagnetico risalta chiaramente da questo breve excursus. D'altra parte è bene osservare anche che alcune delle difficoltà, che si manifesteranno nell'interpretazione data da Maxwell delle sue equazioni, sono legate all'eccessiva fiducia da lui riposta nel modello a vortici. Saranno proprio anche queste difficoltà interpretative che decreteranno l'abbandono del modello verso la fine dell'Ottocento.

## **I.2 - Vortici e materia**

Nel 1858 Herman von Helmholtz pubblica un articolo in cui si occupa delle equazioni idrodinamiche di un fluido in presenza di vortici.<sup>(8)</sup> Una teoria matematica del moto dei fluidi era stata elaborata, a partire dai contributi di Leonhard Euler e Joseph Louis Lagrange, tra il Settecento e i primi decenni dell'Ottocento. Il sistema di equazioni differenziali che la esprimevano, però, era stato risolto solo nel caso di moti irrotazionali. Nell'articolo del 1858 Helmholtz riesce ad ottenere alcuni fondamentali, e per l'epoca sorprendenti, risultati nel caso di moti vorticosi, grazie all'individuazione di nuove grandezze per la descrizione del problema e all'uso originale di concetti e strumenti matematici, in parte mutuati da Riemann (teoria delle funzioni abeliane) e in parte da Green e, in generale, dal filone delle teorie del potenziale.

Il fluido considerato da Helmholtz è omogeneo, incompribile e con viscosità uguale a zero. Ad ogni punto del fluido si può pensare associato una grandezza

(oggi diremmo un vettore) che rappresenta la *vorticità*, con direzione perpendicolare al piano di rotazione. Si possono allora considerare nel fluido le curve ideali che hanno come tangenti, punto per punto, le vorticità: Helmholtz le chiama *linee o filamenti di vortice*. Infine ad ogni curva chiusa idealmente disegnata nel fluido è associato quello che Helmholtz chiama un *tubo di vortice*, formato dalle linee di vortice che la attraversano, la cui superficie laterale è individuata dalle linee di vortice passanti per i punti della curva chiusa. La prima conclusione di Helmholtz è che date le caratteristiche del fluido in ogni sezione del tubo di vortice il prodotto dell'area della sezione per la velocità media di rotazione ha un valore costante (a questa costante Helmholtz dà il nome di *intensità o forza del tubo di vortice*). Tre sono i risultati generali che Helmholtz ricava su questa base. Il primo è che i tubi di vortice non possono iniziare o finire dentro il fluido: essi devono chiudersi su sé stessi (formando anelli) o avere gli estremi sulla superficie libera del fluido (e, nel caso di un fluido distribuito su un volume infinito, essi devono chiudersi su sé stessi o essere infiniti). Il secondo è che parti di fluido esterne al tubo di vortice non lo attraversano e parti di fluido interne al tubo di vortice non ne escono. Infine, l'intensità del tubo di vortice rimane costante durante il suo moto (ivi comprese eventuali deformazioni continue, cioè senza tagli, del tubo di vortice).

Nel suo articolo Helmholtz utilizza ripetutamente analogie tra idrodinamica ed elettromagnetismo, dalle quali tra l'altro ricava alcuni esempi che gli permettono di concludere che lo studio del moto di un fluido in presenza di vortici è, in molti casi, equivalente all'applicazione della teoria del potenziale in regioni molteplicemente connesse (esiste cioè un potenziale del campo di velocità definito localmente, a differenza del caso irrotazionale in cui il potenziale è definito globalmente). Sono proprio i risultati di queste analogie idrodinamico-elettromagnetiche che verranno ripresi da Maxwell alla fine degli anni 1860 nei suoi studi di argomento geometrico-topologico<sup>(9)</sup> e nel *Treatise*.<sup>(3)</sup> Ma non è solo nell'elettromagnetismo che i risultati di Helmholtz vengono applicati e ulteriormente sviluppati. Nell'ambito della fisica, infatti, questo lavoro esercita una decisiva influenza sull'avvio della cosiddetta teoria dell'atomo-vortice di W. Thomson, mentre nell'ambito della matematica, o sarebbe meglio dire della fisica matematica, influenza fortemente sia le ricerche condotte da Tait, e successivamente da Maxwell e W. Thomson, sui quaternioni e sui vettori, sia i lavori che approfondiscono i rapporti tra nozioni topologiche e scienze della natura.

Tait, subito dopo la lettura dell'originale articolo di Helmholtz del 1858, ne intraprende la riformulazione nel linguaggio dei quaternioni, introdotto da William Rowland Hamilton. Il calcolo sui quaternioni, dal quale scaturirà il moderno calcolo vettoriale, permette di cogliere in modo più immediato il contenuto fisico delle formule helmholtziane – un fatto che, tra l'altro, stimolerà la campagna avviata in seguito da Tait per la diffusione dell'uso dei quaternioni in tutti i settori della fisica. Tait, colpito in particolare dai teoremi generali relativi alle proprietà di invarianza del *Wirbelbewegung* (“moto vorticoso”) di Helmholtz decide non solo di tradurre l'articolo di Helmholtz ma di darne anche una dimostrazione pratica in una serie di esperimenti con gli anelli di fumo.

La “stupenda esposizione pratica di anelli di fumo” fatta da Tait è lo stimolo decisivo alla ripresa dei risultati helmholtziani da parte di W. Thomson da cui

scaturisce la teoria dell'atomo-vortice. Nell'incipit dell'articolo di Thomson *On vortex-atom* del 1867<sup>(10)</sup> si legge infatti:

Dopo aver saputo dell'ammirevole scoperta di Helmholtz della legge relativa al moto vorticoso in un liquido perfetto [...] l'autore ha affermato che inevitabilmente questa scoperta suggerisce l'idea che gli anelli di Helmholtz siano i veri e soli atomi. Infatti l'unico pretesto che sembra giustificare la mostruosa assunzione di pezzi di materia infinitamente duri e infinitamente rigidi, la cui esistenza viene affermata in termini di ipotesi verosimile da alcuni dei maggiori chimici moderni nelle loro sconsiderate proposizioni introduttive, è quello su cui insistette Lucrezio e che fu adottato da Newton – e cioè quello secondo cui tale ipotesi sembra essere necessaria per rendere ragione dell'inalterabilità delle qualità distinguibili nei differenti tipi di materia.

Ma, prosegue Thomson, il *Wirbelbewegung* di Helmholtz ha, come i presunti atomi lucreziani, la stessa caratteristica di inalterabilità, una caratteristica "infinitamente perenne" che "solo un atto di potenza creatrice può generare o distruggere". Siccome poi qualunque concatenamento di anelli o nodo sugli anelli si mantiene invariato nel tempo, essi offrono una possibile spiegazione della varietà dei diversi atomi (diversi possibili concatenamenti di più anelli o nodi negli anelli) che individuano i diversi elementi chimici. Inoltre tramite essi si può dar conto delle proprietà spettroscopiche nei termini dei moti oscillatori degli anelli concatenati o annodati. Infine, sottolinea W. Thomson, se si accetta "l'ipotesi secondo cui tutti i corpi sono costituiti da atomi-vortice immersi in un liquido perfettamente omogeneo" si ha come risultato "quello di diminuire di una unità il numero delle assunzioni che sono indispensabili se si vuole dare una spiegazione delle proprietà della materia": non si devono introdurre ad hoc forze specifiche appartenenti all'atomo stesso. "È probabile – conclude infatti l'autore – che le belle ricerche di D. Bernoulli, Herapath, Joule, Krönig, Clausius e Maxwell sulle varie proprietà termodinamiche dei gas abbiano un carattere tale che, ora, tutte le assunzioni positive che quegli studiosi sono stati obbligati a fare a proposito delle forze reciproche tra due atomi e dell'energia cinetica acquistata da ciascun atomo o da ciascuna molecola, possano esser soddisfatte dai vortici anulari, senza dover ricorrere ad alcun'altra proprietà della materia sul cui moto esse si basano che non siano l'inerzia e l'icomprimibilità dello spazio occupato".

In tal modo, come rilevato anche da Maxwell in un articolo del 1875,<sup>(11)</sup> la teoria dell'atomo-vortice rappresentava un fondamentale punto di riferimento per una teoria della materia che "salva l'evidenza sperimentale" senza introdurre nuove ipotesi per ogni aspetto della dinamica degli atomi. Da questa teoria infatti, afferma Maxwell, si dovrebbero poter derivare le leggi generali del moto a partire da un unico oggetto primordiale, il mezzo etereo universale, preservando, e anzi consolidando, l'unità della teoria dinamica dei fenomeni fisici. E l'interesse di Maxwell per gli anelli di Helmholtz e il modello dell'atomo vortice di W. Thomson è ulteriormente attestato da due strumenti da lui costruiti. Il primo, con funzioni puramente dimostrative, è uno "zootropio" (o "ruota della vita"), uno dei primi dispositivi derivati dalle *lanterne magiche* che permette di ottenere disegni animati. Lo zootropio è una delle varianti dei dischi di Plateau e von Stampfer, e viene ideato dall'inglese William George Horner negli anni 1830, utilizzando un cilindro vuoto munito, sulla parte superiore, di fessure a distanze costanti. All'interno del cilindro, nella parte sottostante la zona fessurata, sono riprodotte le immagini che rappresentano elementi statici successivi del



movimento di una figura. Mettendo in rotazione il cilindro e guardando attraverso le fenditure si ottiene l'animazione della figura, resa in tal modo osservabile da più spettatori contemporaneamente. Maxwell nel 1868 introduce nelle fessure lenti concave migliorandone l'effetto visivo e utilizza il dispositivo così modificato per illustrare vari fenomeni fisici, tra i quali il moto di tre anelli di Helmholtz coassiali. Il secondo dispositivo costruito da Maxwell è invece uno strumento che avrebbe dovuto mettere in evidenza l'esistenza dei vortici molecolari misurandone l'azione giromagnetica su un elettromagnete.

L'articolo-manifesto di W. Thomson contribuisce in modo determinante a dare impulso a una serie di ricerche dominate dal nesso tra topologia e scienze della natura, che coinvolgono prima di tutto fisici, matematici e chimici. A contribuirvi, pur con motivazioni in parte diverse, sono prima di tutto Maxwell, stimolato dai suoi interessi sia nei fenomeni elettromagnetici sia nella teoria cinetica dei gas, W. Thomson, motivato dalla sua teoria sulla struttura della materia, e Tait. Quest'ultimo, in

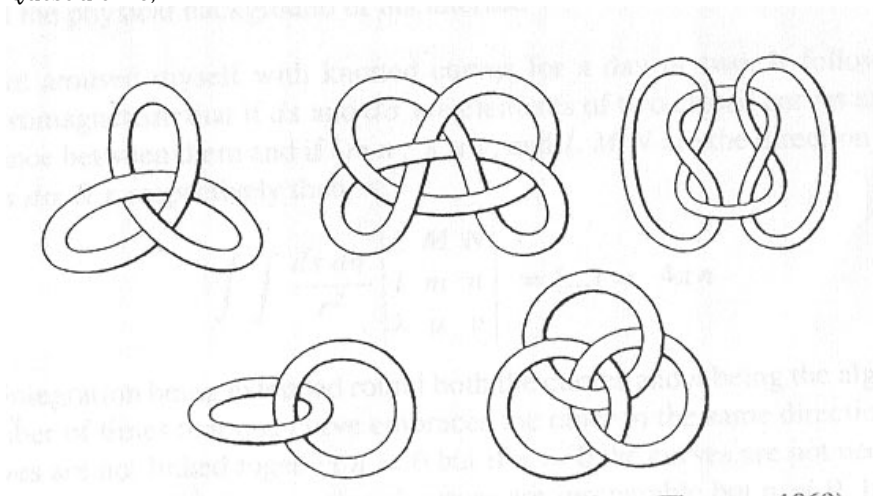


Fig. 1 Nodi e intrecci, possibili candidati per atomi e molecole, ripresi dall'articolo del 1869 di W. Thomson<sup>(12)</sup>

particolare, sulla spinta del modello dell'atomo-vortice, si impegnerà per vari anni nella *classificazione dei nodi*, alla ricerca di una conferma dell'ipotesi di W. Thomson di una relazione tra le classi di configurazione topologicamente equivalente dei nodi, da un lato, e, dall'altro, le tipologie degli atomi che individuano i diversi elementi chimici e i loro composti. Proprio nel corso di questa opera di classificazione, Tait enuncia alcune congetture, ancora oggi note come "congetture di Tait", la cui dimostrazione, come vedremo, sarà raggiunta solo negli anni Ottanta del XX° secolo. Nel lavoro di Tait confluiscono sia risultati particolari, come quello della differenziazione tra intreccio "sopra" e "sotto" che si trova in una lettera a lui diretta da Maxwell che riappare nella trattazione dei "gruppi di intreccio" (*braid groups*) del XX° secolo, sia risultati generali come quelli legati alla classificazione avviata da Riemann delle superfici molteplicemente connesse, o quelli ottenuti negli stessi anni nello sviluppo della

cosiddetta *teoria dei grafi* che prende le mosse dai lavori di chimici come F. A. Kekulé e A. Crum Brown proseguendo nei lavori di matematici come W. K. Clifford, A. Cayley, J.J. Sylvester e G. Pólya. Il lavoro di classificazione dei nodi inaugurato da Tait fa emergere una delle prime difficoltà della teoria dell'atomo-vortice: l'enorme numero di configurazioni non equivalenti trovate rispetto alla varietà degli elementi chimici noti (con dieci intrecci si hanno 165 nodi diversi, con tredici più di diecimila). Ma, pur evidenziando uno dei limiti del modello, le ricerche in questo ambito costituiscono il primo esempio dell'interesse per le possibili implicazioni fisiche di quel settore della matematica che, conosciuto come *geometria della posizione* nei lavori pionieristici di Leibniz, Euler, Vandermonde, Gauss e Riemann, era stato ribattezzato nel 1847 da Johan Benedict Listing *topologia*.

Nonostante i problemi incontrati dalla teoria dell'atomo vortice – al problema del numero delle configurazioni topologiche inequivalenti si aggiungeva il problema delle effettive condizioni per la stabilità degli anelli di Helmholtz – l'idea di concepire la materia come un opportuno stato di moto di un fluido etereo primordiale prosegue fino ai primi anni del Novecento. Tra le tappe significative, nell'ambito della ricerca fisica, vale la pena ricordarne almeno tre. La prima è quella segnata dal trattato sul moto dei vortici anulari del 1883 con il quale J. J. Thomson vince l'*Adams Prize*.<sup>(13)</sup> In esso il futuro scopritore dell'elettrone enfatizza, con parole simili a quelle di W. Thomson e Maxwell, la semplicità concettuale del modello a vortici rispetto ai modelli atomistici: "accettate le leggi idrodinamiche non si richiede l'introduzione di forze tra particelle per spiegare il comportamento degli aggregati, come invece richiesto nella teoria cinetica dei gas". E non può essere negata la funzione euristica svolta dal modello a vortici nelle ricerche che condurranno J.J. Thomson alla scoperta dell'elettrone, scoperta che per altro verso svolgerà un ruolo decisivo nel provvisorio abbandono del modello dei vortici come ausilio per l'indagine fisica a livello atomico. La seconda tappa riguarda le ricerche di FitzGerald nel corso degli anni 1880, nelle quali l'etere è schematizzato in guisa di filamenti infiniti di vortice, mentre la materia è pensata come costituita da anelli di Helmholtz-Thomson. Infine, come terza tappa significativa in questo contesto, ricordiamo i lavori di Larmor tra il 1893 e il 1897 in cui l'autore tenta, in linea con gli approcci di FitzGerald, una sintesi tra elettromagnetismo di Maxwell e teoria degli atomi vortice utilizzando per l'etere primordiale modelli alla Mc Cullagh e girostatico di W. Thomson.

## II Parte – Vortici e fisica nel XX° secolo

Con la scoperta dell'elettrone e i successivi sviluppi della relatività e della meccanica quantistica le idee kelviniane vengono essenzialmente accantonate. La geometria e la fisica, pur continuando ad avere punti di contatto (basti pensare alla teoria della relatività generale nella quale la forza gravitazionale è interpretata come curvatura locale dello spazio-tempo), si sviluppano su cammini in larga parte indipendenti. Solo in tempi recenti le interazioni tra geometria e fisica, confinate nell'ambito delle teorie non quantistiche, s'intensificano e coinvolgono la meccanica quantistica (sia a livello microscopico che mesoscopico) nella quale si evidenziano significative relazioni con la topologia. In questo senso la geometria torna ad essere implicata nella fisica come descrizione di proprietà globali e non solo locali, offrendo tra l'altro risposte a quesiti riguardanti alcune proprietà fondamentali delle particelle elementari, come la quantizzazione della

carica e l'esistenza di due sole statistiche (nello spazio fisico a tre dimensioni spaziali e una temporale), quella bosonica e quella fermionica.

### II.1 - Vortici, teoria dei campi e topologia

A partire dalla fine del XIX° secolo, grazie anche ai decisivi contributi di Poincaré, la topologia si afferma definitivamente come settore autonomo della ricerca matematica. In questo ambito il problema della classificazione dei nodi e la dimostrazione delle varie congetture, in particolare quelle di Tait, diventano per vari anni questioni eminentemente matematiche. Uno dei primi successi della moderna topologia nell'ambito della classificazione dei nodi viene ottenuto da J.W. Alexander alla fine degli anni 1920. Utilizzando strumenti di topologia classica, tra cui il cosiddetto *winding number*, Alexander introduce nel 1928 un invariante per un nodo  $n$  consistente in un polinomio  $P_n$  a coefficienti interi (oggi noto come "polinomio di Alexander"). Il polinomio di Alexander, pur non fornendo una prova delle congetture di Tait, è uno strumento utile nella classificazione dei nodi, infatti nodi che hanno diverso polinomio di Alexander sono diversi. Un semplice esempio del polinomio di Alexander è quello relativo a un nodo a trifoglio (o a tre lobi)  $n$ ,

$$P_n(t) = t - 1 + t^{-1}.$$

Uno dei principali limiti del polinomio di Alexander è la sua incapacità di distinguere tra un nodo e la sua immagine speculare. In ogni caso per quasi sessanta anni il polinomio di Alexander è rimasto l'unico invariante dei nodi di questo genere. Solo nel 1984, infatti, Vaughan Jones riesce a costruire un nuovo polinomio, da allora noto come "polinomio di Jones", che rappresenta un invariante per la classificazione dei nodi. Schematicamente le caratteristiche salienti del polinomio di Jones, frutto di intense indagini degli ultimi anni, sono le seguenti: (1) a differenza del polinomio di Alexander esso distingue tra due nodi uno immagine speculare dell'altro; (2) è il primo di una famiglia di polinomi invarianti collegati ai gruppi di Lie; (3) può essere usato per dimostrare le congetture di Tait; (4) non è legato a strumenti di topologia classica del tipo *winding numbers*; (5) attraverso la corrispondenza tra nodi (o concatenamenti di anelli) e intrecci (*braid*) può essere messo in relazione con strutture algebriche implicate in diversi settori della fisica.

A partire dalla seconda metà degli anni 1980, E. Witten utilizzando in particolare le caratteristiche (2) e (5) del polinomio di Jones ha dato origine ad un nuovo e promettente filone di ricerca, quello delle "teorie topologiche dei campi". Le teorie topologiche dei campi – che nella loro versione mediante l'integrale dei cammini di Feynman fanno uso della lagrangeana di Chern-Simon e sono quindi note come teorie di Chern-Simon – partono dalla corrispondenza tra invarianti di intreccio e invarianti di concatenamento (o nodo). Un intreccio può essere interpretato fisicamente come il grafo spazio temporale del moto di  $N$  punti (nella Fig. 2 abbiamo  $N = 3$ ) che si muovono in un piano (l'asse verticale rappresenta allora la variabile temporale). Costruendo una teoria quantistica dei campi sugli intrecci in 2+1 dimensioni (due dimensioni spaziali e una temporale), Witten ottiene che i valori di aspettazione su un intreccio sono collegati al polinomio di Jones dell'intreccio stesso. Le teorie che si ottengono sono "chirali" (distinguono cioè la destra dalla sinistra, un oggetto dalla sua immagine speculare), in analogia con la teoria di Lee e Yang che spiega la rottura di parità. Il fatto che lo spazio-tempo sia 2+1 dimensionale, invece che 3+1 dimensionale come quello fisico, non inficia l'applicabilità delle teorie topologiche in particolari situazioni

fisicamente rilevanti come vedremo nel prossimo paragrafo. A distanza di più di un secolo viene così riscoperto in forme nuove il nesso tra risultati topologici della teoria dei nodi e teorie di campo.

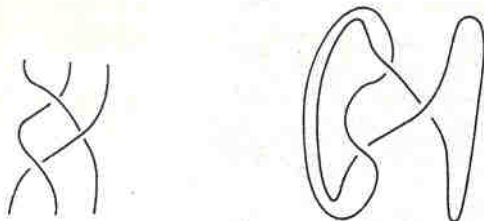


Fig. 2 Illustrazione di un intreccio (a sinistra) corrispondente al concatenamento di due anelli (a destra)

Ma le teorie di Jones-Witten non costituiscono, nel corso del XX° secolo, il primo esempio dell'applicazione di concetti e strumenti topologici alla meccanica quantistica. Negli esempi che citeremo emerge ancor più chiaramente la ripresa del modello dei vortici come strumento euristico per l'indagine fisica del Novecento. Come è noto<sup>(14)</sup>, P. Dirac aveva proposto nel 1938,<sup>(15)</sup> una teoria classica dell'elettrone con la speranza che una sua quantizzazione potesse risolvere i problemi legati all'insorgenza degli infiniti nell'elettrodinamica quantistica. La speranza di Dirac non si realizza, mentre l'elettrodinamica quantistica risolve in parte i suoi problemi con l'introduzione di tecniche consistenti di rinormalizzazione, lasciando però aperta la questione della deduzione delle costanti fondamentali della teoria a partire da principi primi. Ecco allora che Dirac, tra il 1951 e il 1953, torna sulla questione di una formulazione adeguata della teoria dell'elettrone classico pubblicando tre articoli dal titolo *A new classical theory of electrons*.<sup>(16)</sup> "I problemi cui va incontro l'attuale elettrodinamica quantistica – scrive Dirac all'inizio del suo articolo del 1951, parafrasando un'analogia affermata contenuta nell'articolo del 1938 – dovrebbero essere prima di tutto attribuiti, a mio avviso, non a un difetto dei principi generali di quantizzazione, ma al nostro impiego di una teoria classica sbagliata". Eliminando la nozione di elettrone come particella discreta dalla teoria classica (pre-quantistica), Dirac propone un modello classico che ammette solo distribuzioni continue di carica. Il filo conduttore della proposta di Dirac ricalca in larga parte quello seguito dagli scienziati Ottocenteschi attualizzandolo nella prospettiva della meccanica quantistica: si parte da un fluido, si ammette in esso l'esistenza di vorticità (l'analogo classico degli elettroni secondo il modello di Dirac), e si scrivono le equazioni generali del moto del fluido, tentando infine, senza successo, di ottenere i valori della carica elettrica e della massa dell'elettrone dalla quantizzazione del modello. Idee simili a quelle utilizzate da Dirac vengono applicate da T.H.R. Skyrme tra il 1953 e il 1955 allo studio di modelli di descrizione del nucleo atomico. Skyrme, ricorrendo a un "fluido mesonico", introduce un modello a goccia in cui i nucleoni non sono altro che particolari tipi di moto vorticoso (il *Wirbelbewegung* di Helmholtz e W. Thomson).

L'idea di Dirac degli anni Cinquanta di ottenere una giustificazione dei valori delle costanti fondamentali dell'elettrodinamica quantistica a partire da un'indagine delle proprietà topologiche dei sistemi fisici può essere messa in

relazione, almeno in parte, con quella da lui utilizzata nel suo lavoro del 1931 e in quello del 1948 sui "monopoli magnetici".<sup>(17)</sup> Nell'articolo del '31, che vale la pena notare contiene la prima significativa applicazione di idee topologiche alla meccanica quantistica, viene data una prima giustificazione teorica alla quantizzazione della carica elettrica, cioè al dato sperimentale che le cariche elettriche in natura appaiono sempre come multipli interi della carica dell'elettrone. Le linee essenziali della dimostrazione offerta da Dirac possono essere riassunte nel modo seguente. Le equazioni di Maxwell che descrivono il comportamento dei campi elettrici e magnetici nel vuoto manifestano una "simmetria" per lo scambio di  $\mathbf{E}$  e  $-\mathbf{c} \nabla \times \mathbf{A}$ , la cosiddetta "dualità".<sup>(18)</sup> Perché la dualità continui a valere anche in presenza di sorgenti è necessario ammettere l'esistenza, accanto alle cariche elettriche, anche delle cariche magnetiche, i cosiddetti monopoli magnetici. Con l'intento di approfondire il significato della dualità e le ragioni della sua apparente violazione in natura, Dirac elabora una teoria quantistica di una particella di carica  $q$  che si muove nel campo generato da un ipotetico monopolo magnetico  $g$ . Ne ricava che la topologia dello spazio intorno al monopolo  $g$  influenza la funzione d'onda della particella, e questo conduce alla quantizzazione della carica  $q$ . La discretezza di  $q$ , infatti, può essere direttamente messa in relazione con la discretezza del *winding number* topologico

$$q = n h c / g$$

con  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ ,  $h$  costante di Planck e  $c$  velocità della luce.

Nella sezione introduttiva all'articolo del '31 Dirac scriveva:

Il continuo progresso della fisica richiede per la sua formulazione teorica una matematica sempre più avanzata. Questo è assolutamente naturale e prevedibile. Ciò che invece non era stato previsto dagli scienziati del secolo scorso era la particolare forma che avrebbe preso la linea di avanzamento della matematica, ci si aspettava cioè che la matematica sarebbe diventata sempre più complicata, ma si sarebbe sempre fondata su una permanente base di assiomi e definizioni, mentre in realtà gli sviluppi della fisica moderna hanno richiesto una matematica che sposta continuamente i suoi fondamenti e diventa sempre più astratta. Le geometrie non euclidee e l'algebra non commutativa, considerate un tempo alla stregua di fantasie della mente e passatempo per i logici, vengono oggi considerate strumenti necessari per la descrizione di fatti generali del mondo fisico. Sembra probabile che questo processo di crescente astrazione continuerà in futuro e che si dovrà associare l'avanzamento della fisica ad una continua modificazione e generalizzazione degli assiomi alla base della matematica piuttosto che ad uno sviluppo logico di un qualunque schema matematico con fondamenti fissati una volta per tutte.

Esistono oggi fondamentali problemi di fisica teorica che aspettano di essere risolti, per esempio: la formulazione relativistica della meccanica quantistica e la natura dei nuclei atomici (che saranno seguiti da problemi ancora più difficili come quello della vita). La soluzione di questi problemi richiederà probabilmente una revisione ancora più drastica dei nostri concetti fondamentali rispetto a quella fatta in precedenza. È assai probabile che questi cambiamenti saranno così grandi da porre al di là delle capacità dell'intelligenza umana la possibilità di ricavare le nuove idee necessarie dai tentativi diretti di formulare in termini matematici i dati sperimentali. Il fisico teorico in futuro dovrà perciò procedere in maniera più indiretta. Il più potente metodo di avanzamento che può oggi essere suggerito è quello dell'impiego di tutte le risorse della matematica pura nel

tentativo di perfezionare e generalizzare il formalismo matematico che costituisce la base della fisica teorica, e *dopo* ogni successo ottenuto in questa direzione, tentare di interpretare le nuove acquisizioni matematiche nei termini di entità fisiche (per mezzo di un processo simile al Principio di Identificazione di Eddington).

Queste riflessioni profetiche di Dirac trovano conferma in generale negli sviluppi della fisica teorica del XX° secolo, risultando in particolare quanto mai appropriate alla luce delle successive ricerche sui monopoli magnetici (messi in relazione entro certi limiti con la nozione di vortice) e sulla dualità. Non è certo il caso di entrare nel merito di sviluppi della fisica teorica, come le teorie di gauge non abeliane, le teorie di campo non lineare e le loro soluzioni di tipo solitonico, la supersimmetria o le teorie di stringa. Quello che qui preme sottolineare è che, conformemente a quanto affermato da Dirac nel brano appena citato, risultati di grande generalità ottenuti mediante l'utilizzo di parti sempre più astratte della matematica, tra cui la topologia e la geometria differenziale, vengono "interpretati in termini di entità fisiche" facendo spesso ricorso a modelli basati sulla nozione di vortice. È certamente vero, come scrive Dirac, che nell'Ottocento il ruolo della matematica nella fisica era interpretato in modo assai diverso da oggi, ma è altrettanto vero che là dove i fisici dell'Ottocento si spingevano ad utilizzare strumenti matematici radicalmente nuovi per cercare di descrivere i fenomeni fisici questa diversità appare attenuata. Non è un caso che uno degli esempi illustrati da Helmholtz nel suo articolo del 1858 fosse relativo alla descrizione della dinamica di un monopolio magnetico in presenza di un campo generato da una corrente elettrica.

In questo senso il nesso tra topologia e fisica, che trae origine dal riemergere del modello a vortici dell'Ottocento nella fisica del Novecento, rivela tutte le sue potenzialità nell'affrontare teoricamente questioni profonde offrendo prospettive inaspettate alle ricerche pionieristiche avviate dagli scienziati del XIX° secolo.

## **II.2 - Vortici e materia**

Negli ultimi anni, come abbiamo già avuto modo di osservare, grande impulso hanno avuto le ricerche nella fisica in due dimensioni spaziali e una temporale (spazi 2+1 dimensionali). Uno degli obiettivi di queste ricerche è quello di connettere alcune nuove evidenze sperimentali emerse in fisica della materia (effetto Hall quantistico intero e frazionario, superconduttività ad alta temperatura critica) con alcuni modelli teorici (teorie di Chern-Simon) sviluppatasi a partire dalle teorie quantistiche dei campi.

In questo ambito emergono, tra l'altro, alcune idee che permettono di gettare nuova luce sul significato della bipartizione delle particelle elementari in natura tra fermioni e bosoni, connettendolo alle strutture topologiche dello spazio delle configurazioni. Non è paradossale che questa più profonda comprensione del comportamento statistico degli enti quantistici, passi attraverso l'assunzione che possano esistere, in particolari condizioni, (quasi)particelle, cioè eccitazioni collettive di un sistema complesso, con comportamenti statistici "intermedi" tra quello bosonico e fermionico (i cosiddetti "anyon").<sup>(19)</sup>

Il prototipo di come gli anyoni possano "realizzarsi" in natura è l'effetto Aharonov-Bohm (AB), osservabile quando particelle cariche si muovono intorno

ad un solenoide percorso da corrente (quindi contenente un flusso di campo magnetico) senza poter penetrare in esso (l'analogo bidimensionale si ottiene proiettando lo spazio su un piano perpendicolare all'asse del solenoide). Siccome il campo magnetico è nullo nella regione in cui si muovono le cariche, il flusso magnetico non ha su di esse alcun effetto classico (tipo forza di Lorentz). Tuttavia quantisticamente appare nelle funzioni d'onda una fase (misurabile in esperienze di diffrazione) indotta dal potenziale vettore **A**. Questa fase (topologica) dipende dalla carica, dal flusso di campo magnetico nel solenoide e dal numero  $n$  di giri percorsi dalla carica intorno alla regione proibita.

L'effetto AB è paradigmatico per capire cosa possa succedere quando si considera una teoria quantistica su spazi non semplicemente connessi ed è diventato un modello euristico di riferimento per interpretare la fisica dei sistemi fisici (approssimativamente) 2+1 dimensionali, quella cioè essenzialmente appropriata per descrivere sistemi fisici in cui gli stati di moto in direzione perpendicolare a determinati piani sono quantizzati e, quando la temperatura tende allo zero assoluto, l'energia necessaria a eccitarli non è disponibile (come nel caso dei materiali utilizzati per osservare l'effetto Hall quantistico o la superconduttività ad alta temperatura critica).

Sulla base euristica dell'effetto AB possiamo immaginare un bosone (confinato in uno spazio di dimensione  $d=2$ ) di carica  $e$ , accoppiato fortemente con un solenoide di sezione infinitesima ("appuntato" sullo spazio  $d=2$ ), contenente un flusso  $\Phi$ . Se calcoliamo la fase relativa al cammino di scambio di due di questi composti carica-flusso, otteniamo una extra fase ( $\theta = e^{i2\pi \Phi / \Phi_0}$ , dove  $\Phi_0 = hc/e$  è il quanto di flusso), generata dall'accoppiamento elettromagnetico, in analogia con l'effetto AB.

Siccome possiamo immaginare che  $\theta$  assuma qualunque valore, il composto carica-flusso può assumere una fase di scambio qualunque (una qualunque statistica), cioè è un anyone. Questo modello puramente artificiale permette però di concludere che, se in natura si verifica un accoppiamento carica flusso in un insieme di particelle usuali, l'effetto ottenuto è quello di alterare la statistica quantistica delle particelle. Gli anyoni possono allora essere rappresentati come particelle usuali cui sono associati campi elettromagnetici fittizi, che ne alterano la statistica.

Le teorie di gauge abeliane con termini di Chern-Simon nell'azione (forze di gauge a lungo raggio) costituiscono i modelli fenomenologici di riferimento in questo tipo di situazioni. Il termine di Chern-Simon agisce come una interazione topologica che induce  $\theta$  statistiche, per cui una regione di spazio bidimensionale "infilzata" da un flusso di campo magnetico è automaticamente portatrice di carica elettrica proporzionale al flusso magnetico e, viceversa, una particella carica, in una teoria di Chern-Simon, è automaticamente portatrice di flusso magnetico proporzionale alla sua carica. Gli anyoni possono allora essere pensati come fermioni o bosoni (o altri anyoni) interagenti con un opportuno campo di Chern-Simon.

Esistono fenomeni naturali in cui, realizzandosi un accoppiamento tra cariche e flussi, le statistiche frazionarie (e quindi gli anyoni) possono giocare un ruolo fisicamente rilevante? Consideriamo un vortice unitario in un fluido di particelle (per es. un gas di elettroni). Il vortice si comporta allo stesso modo di un quanto

di flusso: esso genera una fase e<sup>12</sup> quando una particella compie un giro intorno al vortice. La carica in questo caso è il numero di particelle, mentre il flusso è la vorticità. Se il vortice induce un cambiamento locale nella densità del fluido, esso possiede anche carica (numero di particelle), e interagirà con altri vortici allo stesso modo in cui una particella elettricamente carica interagisce con un flusso magnetico localizzato. Per ottenere, da questo modello, un anyone dobbiamo considerare “frazioni” di vortice o di carica e accoppiare queste cariche e flussi.

Le quasi particelle dell'effetto Hall quantistico frazionario (EHQF) si comportano proprio come vortici in un fluido di elettroni confinato in uno spazio a  $d=2$ . Esse hanno un ben definito numero frazionario di particelle (la misura della conducibilità Hall equivale ad una misura spettroscopica di questa carica), e quindi obbediscono ad una statistica frazionaria.

Si può quindi così riassumere gli ingredienti del modello: le quasiparticelle (in spazi a  $d=2$ ) devono essere *vortici*, con un ben definito *numero frazionario di particelle*. Questa seconda richiesta implica che il fluido, in cui si trovano i vortici, deve essere *incomprimibile*, altrimenti il numero di particelle associate al vortice non sarebbe ben definito. L'incomprimibilità, nel caso dell'EHQF, si manifesta come presenza di un salto (*gap*) finito nel passaggio da uno stato fondamentale uniforme ai livelli di eccitazione per la densità di particelle.

L'EHQF è attualmente il solo esempio in cui si ha una convincente evidenza dell'esistenza fisica degli anyoni. Esistono oggi tentativi di interpretare la superconduttività ad alte temperature critiche a partire dall'EHQF e dalle statistiche frazionarie, ma le risposte sperimentali in questo senso sono ancora controverse e gli sviluppi teorici (numerosi) ancora in corso.

### Conclusioni

Le idee contenute nei pionieristici lavori di Kelvin, Maxwell, Tait e altri scienziati del XIX° secolo, lungi dall'essere solo un capitolo chiuso della ricerca fisica, vengono oggi interpretate sotto una nuova luce.

Vortici e stringhe appaiono oggi in molti modelli, sia in fisica delle particelle elementari sia in fisica della materia, e speculazioni intorno alla possibilità di una loro “creazione” nei primi istanti della nascita dell'universo – simili a quelle degli scienziati dell'Ottocento, ma svuotate del loro contenuto teologico – costituiscono argomento di indagine della moderna cosmologia.

Emerge chiaramente, dal succinto excursus presentato, il fatto che i modelli in fisica hanno una pluralità referenziale e interpretativa che permette spesso la loro applicabilità fruttuosa in contesti teorici anche radicalmente mutati. E in questo senso il rapporto tra topologia e fisica, sottolineato dal riaffiorare a più riprese del modello dei vortici nel corso del Novecento, assume una particolare emblematicità.

Mi preme, infine, ringraziare Rossana Tazzioli per avermi segnalato, in occasione del convegno, l'articolo di M. Epple<sup>(20)</sup> che, incentrato sullo studio delle origini della topologia nell'Ottocento, costituisce una trattazione complementare a quanto qui esposto



**Note e riferimenti bibliografici**

1. J. Clerk Maxwell, On Action at a Distance, *Roy. Inst. Proc.* **7** (1873) 44-54.
2. W. Thomson, On ultramundane corpuscles of Le Sage, *Edinb. Roy. Soc. Proc.* **7** (1872) 577-589.
3. J. Clerk Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Clarendon Press, Oxford, 1873 (ristampa della terza edizione: Dover, New York, 1962).
4. J. Clerk Maxwell, On the physical lines of force, *Phil. Mag.* **21**(1861), 161-175, 281-291, 338-348 (I e II parte); *Phil. Mag.* **23**(1862), 12-24, 85-95 (III e IV parte)
5. J. Clerk Maxwell, On Faraday's Lines of Force, *Trans. Cambridge Phil. Soc.* **10** (1864, datato 11 febbraio 1856 un estratto compare sul *Phil. Mag.* **11** (1856), 404-405), 27-83.
6. W. Thomson, Dynamical illustrations of the magnetic and the helicoidal rotatory effects of transparent bodies on polarized light, *Proc. Roy. Soc. (London)* **8** (1856), 150-158.
7. M. Faraday, On the physical lines of magnetic force, in *Experimental Researches in Electricity*, Taylor and Francis, London, 1839-1855, vol. 3 (1855) 438-443.
8. H. von Helmholtz, Uber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche der Wirbelbewegung entsprechen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **58** (1858), 25-55, (tradotto da Tait sul *Phil. Mag.* **33** (1867) 485-512, col titolo *On integrals of hydrodynamical equations which express vortex-motion*).
9. J. Clerk Maxwell, Draft on continuity and topology (circa 1868), in P. M. Harman, *The scientific letters and papers of James Clerk Maxwell*, Cambridge University Press, vol. 2, 1995, 439-442.
10. W. Thomson, On vortex-atom, *Edinb. Roy. Soc. Proc.* **6** (1867) 94-105.
11. J. Clerk Maxwell, Atom, in: *Encyclopedia Britannica*, IX edizione, vol 3, 1875.
12. W. Thomson, On vortex motion, *Edinb. Roy. Soc. Trans.* **25** (1869), 217-260.
13. J.J. Thomson, *A Treatise on the Motion of Vortex Rings*, Macmillan, London, 1883.
14. G. Peruzzi, La questione dell'“elettrone classico” tra Ottocento e Novecento, in: Atti del XVI° Congresso Nazionale di Storia della Fisica e dell'Astronomia (P. Tucci, ed.), Como, 1997.
15. P. Dirac, Classical theory of radiating electrons, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A167** (1938), 148-169.
16. P. Dirac, A new classical theory of electrons, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A209** (1951), 291-296 (parte prima); **A212** (1952), 330-339 (parte seconda); **A223** (1953), 438-445 (parte terza).
17. P. Dirac, Quantised singularities in the electromagnetic field, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A33** (1931), 60-72; The theory of magnetic monopoles, *Phys. Rev.* **74** (1948), 817-830.
18. La simmetria di “dualità” è stata recentemente indagata a scale di energia molto più alte di quelle implicate dell'elettromagnetismo classico nel contesto della cosiddetta “teoria M”. Per una introduzione si veda: E. Witten, Duality, spacetime and quantum mechanics, *Physics Today* (maggio 1997), 28-33.
19. G. Peruzzi, I modelli nella Fisica. Un esempio: gli “anyon”, in: Atti del Congresso *Logica e filosofia della scienza: problemi e prospettive*, Edizioni ETS, Pisa, 1994.

20. M. Epple, Topology, Matter, and Space, I: Topological Notions in 19<sup>th</sup>-Century Natural Philosophy, *Arch. Hist. Exact Sci.* **52** (1998) 297-392.