

Rossana Tazzioli¹

Per una storia della fisica matematica italiana (1860-1880)

A partire dal 1860, come accadde per la matematica pura, anche la fisica matematica conobbe in Italia un periodo particolarmente fecondo; Betti e Beltrami sono i due protagonisti principali di questa storia. Essi, e alcuni tra i loro allievi (come Cerruti, Somigliana, Dini, Ricci Curbastro, Maggi, Padova e Cesàro) fornirono contributi fondamentali in particolare alle teorie del potenziale e dell'elasticità. Per la teoria dell'elasticità la scienza delle costruzioni rappresentò una forte motivazione; i lavori di Menabrea e Castigliano ne sono un chiaro esempio. Per quanto riguarda la meccanica razionale, a partire dal 1860, vennero pubblicati i trattati di Chelini, Battaglini e il libro di Cremona sulla statica grafica, argomento questo assai studiato in quegli anni soprattutto da ingegneri e architetti. Diversi furono infine i lavori di matematici, e di alcuni fisici, riguardanti questioni teoriche di idrodinamica, elettricità, magnetismo, elettrodinamica, elettromagnetismo e calore.

Mi limiterò in questa sede a trattare due argomenti specifici di fisica matematica: l'elettrodinamica e la teoria dell'elasticità. L'elettrodinamica ha dato vita a discussioni e problemi cruciali nell'ambito della fisica matematica europea per un lungo periodo: Gauss, Weber, Carl e Franz Neumann, Riemann, Clausius, Felici e Betti, per citare solo alcuni nomi, hanno avanzato ipotesi differenti sull'azione elettrodinamica, e certamente le polemiche non mancarono.

Per quanto riguarda la teoria dell'elasticità, essa ha conosciuto in Italia un periodo di grande sviluppo nel corso dell'Ottocento, periodo che avrebbe condotto alla formazione della celebre scuola degli elasticisti italiani. Inoltre, lo studio di questa teoria e la sua estensione agli spazi curvi influenzò la nascita di nuovi strumenti di geometria differenziale, primo fra tutti il calcolo tensoriale.

1. L'elettrodinamica

Enrico Betti fu professore dal 1857 all'Università di Pisa, dove insegnò algebra, analisi e fisica matematica, e diresse a partire dal 1865, salvo brevissime interruzioni, la Scuola Normale Superiore, uno dei centri italiani più prestigiosi nella ricerca in matematica. Betti si dedicò con successo a diversi campi della matematica, dalla teoria delle equazioni algebriche alla topologia, dall'analisi alla fisica matematica; quest'ultimo argomento fu oggetto dei suoi studi per oltre vent'anni, in modo particolare per quanto riguarda le teorie del potenziale e dell'elasticità. I risultati principali di Betti sulla teoria del potenziale sono contenuti in una serie di articoli apparsi sul *Nuovo Cimento* tra il 1863 e il 1864 e in un trattato pubblicato nel 1879 dal titolo *Teorica delle forze newtoniane e sue applicazioni all'elettrostatica e al magnetismo*. Gli articoli e il volume presentano alcune differenze nella trattazione matematica dei problemi, tra le quali salta agli occhi il diverso uso del principio di Dirichlet, mentre le applicazioni al magnetismo sono presenti solo nell'edizione del 1879. In realtà, la *Teorica* si sarebbe dovuta chiudere, nelle intenzioni dell'autore, con un ulteriore capitolo dedicato all'elettrodinamica, che avrebbe completato il quadro delle

¹ Dipartimento di Matematica, Università di Catania

applicazioni della teoria del potenziale. Diverse fonti sembrano indicare l'esistenza di questo capitolo; lo stesso Betti, nell'Introduzione alla *Teorica*, parla di applicazioni della teoria del potenziale al magnetismo e all'elettrodinamica, mentre Tedone auspica, nella Prefazione al secondo volume delle *Opere* di Betti, la prossima pubblicazione di "alcuni Capitoli consacrati all'Elettrodinamica che il Betti aveva redatto, ma che egli, all'ultimo momento, sopprime, perché riteneva potessero eccedere il campo limitato dal titolo dell'opera sua". Questo capitolo sull'elettrodinamica, redatto con cura da Betti e apparentemente pronto per la tipografia, è stato in effetti ritrovato e recentemente pubblicato (Betti 1996).

Le idee di Betti sull'elettrodinamica erano già state da lui stesso espresse in un precedente articolo del 1868 apparso sul *Nuovo Cimento* e riguardante la questione delle interazioni tra le correnti elettriche. Queste idee si inseriscono nelle problematiche sorte verso la seconda metà dell'Ottocento sulla natura dell'elettricità e sulle leggi dell'elettrodinamica, che vedono contrapporsi teorie sostenute da personalità spesso autorevoli nei campi della fisica e della matematica del periodo.

Riemann formulò una nuova teoria elettrodinamica basandosi sulle ipotesi che la corrente consiste nel moto delle elettricità positiva e negativa, che si muovono nel filo in direzioni opposte, e che le somme dei prodotti delle elettricità positive e negative moltiplicate per una funzione delle coordinate sono trascurabili rispetto alle somme delle sole elettricità positive o delle sole elettricità negative moltiplicate per la stessa funzione. Egli, basandosi sulle idee di Gauss e Weber, suppose inoltre che i fenomeni elettrici si propagano con la velocità della luce e dedusse l'espressione della funzione potenziale P che esprime l'effetto totale del conduttore C sul conduttore C' dal tempo t al tempo t' :

$$P = - \int \int \rho' F(t-r'/r) d$$

dove ρ, ρ' sono cariche poste nei punti (x,y,z) e (x',y',z') che appartengono a C e C' rispettivamente, e $F(t,t') = [(x_t - x'_t)^2 + (y_t - y'_t)^2 + (z_t - z'_t)^2]^{-1/2}$.

Nel 1858 Riemann presentò questo scritto, che sarebbe apparso postumo solo nel 1867, alla Reale Accademia delle Scienze di Gottinga, e tuttavia lo ritirò prima della sua pubblicazione probabilmente perché si accorse di un errore nella permutazione di due integrali, errore che Clausius fece rilevare in articolo del 1868; oppure, e questa è l'opinione di Betti, Riemann non era soddisfatto delle ipotesi sulla corrente che erano "poco in armonia con ciò che si conosce di essa".

In effetti, Betti doveva conoscere a fondo le idee di Riemann grazie ai numerosi contatti personali che iniziarono nel 1858, quando Betti si era recato in Germania con Brioschi e Casorati, contatti che continuarono negli anni successivi durante i periodi trascorsi da Riemann in Italia e a Pisa in particolare. Nel suo articolo sull'elettrodinamica, pubblicato nel 1868, Betti propose di assumere che "la corrente consista in una polarizzazione periodica degli elementi del filo, che è più in armonia con tutti i fatti conosciuti"; cioè, tali elementi dovevano presentare al proprio interno una separazione della propria elettricità positiva e negativa in ogni intervallo di tempo p , il che corrispondeva a considerarli come elementi magnetici dotati di momenti

$m=f(t)ds$, $m'=F(t)ds'$, dove le funzioni $f(t)$ e $F(t)$ sono periodiche di periodo p . Betti ammetteva inoltre, con Riemann, che le azioni elettrodinamiche si propagano nello spazio con velocità uguale a quella della luce e, basandosi su una serie di altre ipotesi che gli permettevano di semplificare l'espressione del potenziale, deduceva dalla teoria dei potenziali magnetici la seguente forma per il potenziale di un circuito sull'altro:

$$P = \int \int dt f(t) F(t-r/c) [\frac{1}{r} - \frac{v}{c^2} \frac{ds}{ds'}] ds ds',$$

ds e ds' sono gli elementi dei due circuiti considerati percorsi da corrente, r la distanza tra i due elementi.

L'idea dell'azione ritardata nelle interazioni elettrodinamiche doveva essere venuta a Betti dalle teorie di Gauss, Riemann, Weber e Neumann, mentre l'introduzione della polarizzazione periodica degli elementi nel filo trova con ogni probabilità la sua origine nell'opera di Mossotti. Questa stessa concezione è riproposta anche nel capitolo inedito sull'elettrodinamica della sua *Teorica*. Mossotti seguiva la tradizione continentale dell'azione a distanza che si opponeva alle idee di Faraday e Maxell dell'azione per contatto. Non è questa la sede per entrare nei dettagli e descrivere i concetti di etere e di elettricità proposti da Mossotti, ma basti dire che questi spiegava la teoria dei dielettrici secondo la natura particellare della polarizzazione, facendo leva sul concetto di azione a distanza. Più in generale, Mossotti credeva che i corpi fossero costituiti da molecole su cui l'etere agiva come un fluido elettrico e, seguendo la tradizione dell'esistenza di un unico fluido elettrico di Franklin, pensava che la differenza tra corpi conduttori e non conduttori risiedesse nella diversa capacità dei corpi di ritenere l'etere intorno alle particelle durante l'azione elettrica.

Interessante è la reazione all'articolo di Betti da parte di Clausius. Questi infatti abbracciava l'ipotesi di Carl Neumann, secondo la quale vi sono in ogni punto di un conduttore due quantità uguali di elettricità, positiva e negativa, di cui solo la positiva è mobile mentre quella negativa resta fissa. Clausius provò che la legge di Weber e quella di Riemann sono incompatibili con l'ipotesi di Neumann; entrambe si basano infatti sull'esistenza di due elettricità che si muovono in direzioni opposte e con la stessa velocità all'interno del conduttore. In una lettera del 1869, che si trova a Pisa nel "Fondo Betti", Clausius chiariva a Betti le motivazioni che gli impedivano di aderire alle sue idee sulla natura della corrente elettrica:

Würzburg 25/3/69

Monsieur,

Pardonnez moi que je n'ai pas répondu plus tôt à votre aimable lettre, mais, comme je quitterai Würzburg en quelques jours pour aller à Bonn comme successeur de Plücker, j'étais très-occupé dans ce dernier temps.

La raison qui m'empêche de me ranger à votre avis, quant à la conception d'un courant électrique comme formé d'éléments magnétiques polarisés périodiquement, est justement celle que vous indiquez vous même dans votre lettre, à savoir qu'il est nécessaire dans cette conception de supposer que la

phase du changement périodique est la même dans les deux courants; ce qui me semble difficile à expliquer.

Je vous remercie beaucoup de vos renseignements sur Riemann qui m'ont été très-intéressants.

Veillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma plus haute estime avec laquelle je suis

votre dévoué
R. Clausius

Già un anno prima Clausius (1868) aveva criticato le idee di Betti sulla corrente in un quadro molto generale, che comprendeva un esame critico dei modelli dei fenomeni elettrodinamici basati sull'azione ritardata. L'opposizione di un personaggio autorevole come Clausius alle sue convinzioni circa la natura della corrente probabilmente contribuì a far sì che Betti ritardasse la pubblicazione del capitolo della *Teorica* dedicato all'elettrodinamica. Questo dovette però circolare negli ambienti accademici a lui vicini, come ci testimonia una lettera di Beltrami a Betti del 1890, anche questa contenuta nel "Fondo Betti" a Pisa, in cui Beltrami rileva un errore nella parte iniziale del capitolo sull'elettrodinamica. Eccone una parte significativa, dopo la quale seguono i dettagli tecnici che mostrano l'errore nella dimostrazione di Betti rilevato da Beltrami:

Pavia 28 Giugno 1890

Carissimo Betti

Nel primo § della tua Elettrodinamica (inedita) tu dimostreresti che, salvo in un certo caso d'indeterminazione delle formole, quando ha luogo la scarica fra due conduttori elettrizzati, vi è un passaggio di quantità eguali e contrarie d'elettricità dall'un conduttore all'altro. A dire il vero io ho sempre avuto qualche dubbio sulla dimostrabilità a priori di questo risultato importante: ma avendo avuto occasione in questi giorni di ritornare sulla questione, mi è sembrato di poter chiarire la cosa e di constatare, se non prendo abbaglio, che la dimostrazione effettivamente non reggerebbe. [...]

In ogni caso, i lavori di Betti sull'elettrodinamica rappresentano uno dei rarissimi tentativi italiani di interpretazione dei fenomeni elettrodinamici attraverso un 'opportuno' modello di corrente. Nel suo *Treatise*, Maxwell (1873, II, p. 493) riserva una citazione particolare agli approcci di Betti e Riemann alle teorie elettrodinamiche, e scrive: "In the theories of Riemann and Betti it would appear that the action is supposed to be propagated in a manner somewhat similar to that of light." Ne seguono le parole spesso citate: "But in all of these theories the question naturally occurs: _If something is transmitted from one particle to another at a distance, what is its condition after it has left the one particle and before it has reached the other? If this something is the potential energy of the two particles [...] how we are to conceive this energy as existing in a point of space, coinciding neither with the one particle nor with the other?"

Qualche anno prima di Betti, all'Università di Pisa, il fisico Riccardo Felici aveva compiuto studi approfonditi sulle leggi elettrodinamiche, e i risultati ottenuti sull'induzione elettrodinamica costituiscono il suo maggior contributo scientifico. Parimenti a Betti, anche Felici fu profondamente influenzato da Mossotti, oltre che da Matteucci, nelle sue idee sulle interazioni elettrodinamiche. Il suo approccio, più da fisico sperimentale che da teorico, è comunque piuttosto lontano da quello di Betti. Felici, come scrive Roiti nella sua commemorazione, "escogitava delle esperienze ingegnosissime", e "spinto irresistibilmente dall'indole sua e dall'onesta coscienza a dimostrare ed approfondire col più stretto rigore il nesso logico fra i vari fenomeni che andava descrivendo, si reputava obbligato a non usar punto le notazioni del calcolo come se fossero armi insidiose" (Roiti 1902, p. 286).

In un articolo pubblicato sugli *Annali delle Università Toscane* nel 1852, Felici (1852a, p. 1) si proponeva di "dare le formule per una teoria matematica delle correnti di induzione elettro-dinamica ed elettromagnetica", basandosi "unicamente" sui dati sperimentali e col metodo "che servì ad Ampère per scoprire la formula elementare che esprime le leggi secondo le quali due elementi filiformi di circuiti voltaici vicendevolmente si attirano o si respingono". L'espressione matematica della forza elettromotrice indotta in un elemento di un conduttore data da Felici era la seguente:

$$E = - \frac{2r}{s} \frac{ds}{ds'} - (k/r) \left(\frac{r}{s} \right) \left(\frac{r}{s'} \right) ds ds',$$

con k costante e l'usuale significato dei simboli. L'indeterminatezza nel valore di k è dovuto allo "stato attuale delle esperienze" che ancora non permettono di decidere per k un valore univoco.

Tale legge, che viene citata e ampiamente lodata da Maxwell, non coincide né con quella di Franz Neumann né con quella di Weber. Tutte e tre le formule si dimostrano essere, convenientemente usate, in accordo con i fatti osservati. Le leggi di Neumann e Weber forniscono lo stesso risultato una volta fatte le dovute integrazioni; ma esse riguardano solo il caso dei circuiti filiformi, mentre Felici estende la propria ricerca anche ai conduttori. Quest'ultima estensione sarà portata a termine in una seconda memoria (1852b). "Frattanto, osserva in conclusione Felici, ai Fisici sperimentatori [è] utile l'avere il mezzo di calcolare con tutto il rigore matematico, nelle loro esperienze, e senza adottare la più lieve ipotesi, i fenomeni di induzione elettro-dinamica." (1852b, p. 30)

In più occasioni Felici si pregia di "dedurre dai fatti le leggi generali dell'induzione, senza l'aiuto di ipotesi alcuna" (1855, p. 325) e in questo risiede a suo avviso la sostanziale differenza tra il suo metodo e le procedure impiegate da Neumann, Weber e altri autori, tra i quali possiamo inserire lo stesso Betti. Felici (1855, p. 340) scrive: "Quei lavori sono degnissimi dell'ingegno di quei distinti Fisici e Matematici, ma la natura del nostro lavoro non ci porta a discuterli, perché noi abbiamo enunciato dei risultati sperimentali, algebricamente esprimibili senza ombra di ipotesi."

2. Teoria dell'elasticità

Dal 1860 al 1880 si pongono le basi di quella che sarà la futura scuola italiana di elasticità, sorta nei primi decenni del Novecento. Sono essenzialmente due le motivazioni che stanno alla base delle ricerche in teoria dell'elasticità: una di tipo ingegneristico, dovuta al ruolo essenziale rivestito dalla teoria dell'elasticità nell'ambito della scienza delle costruzioni, e l'altra di carattere 'filosofico naturale'. Quest'ultima era dovuta alla convinzione, vecchia di secoli, che un fluido elastico, l'etere, permeava l'universo e fungeva da *veicolo* materiale per la trasmissione delle forze fisiche. Le particelle di etere, sollecitate dalla forza, trasmettevano mediante il principio di azione e reazione *per contatto* i fenomeni da un punto a un altro dello spazio. In tal modo si superavano le difficoltà sorte intorno al concetto di *azione a distanza* e le deformazioni del mezzo potevano studiarsi mediante l'usuale teoria dell'elasticità.

A questo proposito, osserva Love (1906, p. 30) nell'Introduzione del suo celebre trattato sulla teoria matematica dell'elasticità: "The history of the mathematical theory of Elasticity shows clearly that the development of the theory has not been guided exclusively by considerations of its utility for technical Mechanics. Most of men by whose researches it has been founded and shaped have been more interested in Natural Philosophy than in material progress, in trying to understand the world than in trying to make it more comfortable. From this attitude of mind it may possibly have resulted that the theory has contributed less to the material advance of mankind than it might otherwise have done."

2.1 Scienza delle costruzioni

Uno dei contributi italiani più importanti alla scienza delle costruzioni è il celebre principio di Menabrea enunciato da questi nel 1858 in un articolo apparso sui *Comptes Rendus* dell'Accademia delle Scienze di Parigi. Menabrea, che ebbe come maestri Plana e Bidone, si laureò nel 1831 all'Accademia Militare di Torino e dal 1846 al 1859 fu professore di scienza delle costruzioni presso la locale Università. Il principio di Menabrea era già stato espresso in una forma più imprecisa e restrittiva da Mossotti, Pagani, Cournot e Dorna. Quest'ultimo insegnava meccanica all'Accademia Militare di Torino ed era dunque collega di Menabrea, con cui aveva stretti rapporti scientifici.

Il principio, così come venne dato da Menabrea, ha la seguente forma: "Quando un corpo elastico è in equilibrio sotto l'azione di forze esterne, il lavoro dovuto all'effetto delle tensioni e delle pressioni dei vincoli che uniscono i vari punti del sistema è minimo." La sua prima dimostrazione è in verità poco rigorosa e suscitò vivaci critiche. Una di queste fu avanzata dal Luogotenente Emilio Sabbia, il quale nel 1869 pubblicò un opuscolo che, seppure non del tutto pertinente, era davvero molto feroce. Una dimostrazione rigorosa del suo principio fu pubblicata da Menabrea solo nel 1875; tuttavia, già un paio di anni prima, nel 1873, Castigliano nella sua tesi di laurea discussa a Torino, lo aveva preceduto, e tra i due nacque un'aspra polemica che coinvolse anche altri studiosi. Genocchi, che era stato maestro di Castigliano a Torino, pare che abbia trasmesso a questi tutta la sua avversione per il poco rigore nella dimostrazione di Menabrea. L'intervento di Cremona fu comunque decisivo e mise termine alla diatriba; egli espresse il

seguito imparziale giudizio sul volume secondo (1875) degli *Atti della R. Accademia dei Lincei*: "Il Signor Castigliano ha l'onore di aver fatto un buon lavoro; nessuno può togliere al nostro collega Menabrea il merito di aver enunciato un principio generale" (p. lxvi).

Nella sua dissertazione Castigliano, prendeva le mosse da una concezione molecolare della teoria dell'elasticità, mentre nel 1875, in una memoria pubblicata negli Atti dell'Accademia di Torino, deduceva il principio di Menabrea a partire dalla concezione continuista di Green attraverso il potenziale elastico. Interessanti sono a questo proposito i contributi di Crotti, che si ricollegano ai risultati di Castigliano e in più punti ne chiariscono il senso.

2.2 Filosofia naturale

Un autore che emblematicamente rappresenta l'approccio filosofico naturale allo studio della teoria dell'elasticità è Eugenio Beltrami. Questi, nei suoi lavori sulla fisica matematica, cercò più volte di dare una risposta alle problematiche di quegli anni sulla propagazione dei fenomeni fisici utilizzando principalmente strumenti di geometria differenziale, di cui era un cultore. Beltrami tentò in più occasioni di fornire un'interpretazione meccanica della trasmissione dei fenomeni elettrici, magnetici ed elettromagnetici assumendo che lo spazio fosse dotato di curvatura costante, positiva o negativa. I metodi matematici indispensabili allo studio degli spazi non euclidei erano stati introdotti da Riemann nella sua lezione di abilitazione, tenuta nel 1854, e lo stesso Beltrami aveva fornito fin dal 1868 notevoli contributi allo studio della geometria non euclidea, introducendo tra l'altro un 'modello euclideo' per il piano iperbolico di Lobacevskij-Bolyai.

Numerosi sono i contributi di Beltrami alla teoria matematica dell'elasticità; tra l'altro, egli dedusse le equazioni dell'equilibrio di un corpo elastico isotropo in uno spazio con curvatura costante (1882) e, nel tentativo di fornire una spiegazione meccanica delle linee di forza elettriche e magnetiche, determinò le tensioni dell'etere che permettono la propagazione delle onde elettromagnetiche (1884a, 1884b, 1886). In questo contesto, Beltrami stabilì le condizioni necessarie e sufficienti perché sei funzioni date costituiscano le componenti di una *possibile* deformazione (1889); per un corpo elastico e isotropo, le componenti di tensione devono soddisfare certe condizioni, che sono oggi denominate *equazioni di Beltrami*, e che lo stesso Beltrami dedusse in un lavoro successivo (1892).

Betti scrisse sulla teoria dell'elasticità una serie di articoli pubblicati nel *Nuovo Cimento* negli anni 1872-73. Il suo contributo più importante riguarda il teorema di reciprocità, il quale afferma che, dati due sistemi di forze che agiscono su uno stesso corpo elastico, il lavoro eseguito dalle forze del primo sistema rispetto agli spostamenti relativi al secondo sistema, eguaglia il lavoro del secondo rispetto agli spostamenti del primo. Dal teorema di reciprocità, Betti deduceva alcune funzioni, che giocavano lo stesso ruolo della funzione di Green nella teoria del potenziale, e che gli consentivano di descrivere la rotazione e la dilatazione di un corpo elastico e isotropo in equilibrio mediante le forze che agivano sul corpo stesso.

Il teorema di reciprocità contiene in sé tutta la teoria lineare della statica elastica, come è stato rilevato dalla moderna teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali. Esso, che un anno più tardi sarebbe stato esteso al caso dinamico da Rayleigh (1873), è un caso particolare di un più generale principio della meccanica, che si è dimostrato valido nei più diversi campi della fisica e della fisica matematica. "Anche limitatamente alla sola teoria dei solidi elastici - osservava Colonnetti (1916, p. 237) - la reciprocità che esso stabilisce tra due diverse deformazioni di un medesimo corpo trova utile applicazione nei casi più svariati; si può anzi dire che non v'è problema in tutta la scienza delle costruzioni a cui questo elegantissimo tra i principii della fisica matematica non possa essere applicato con qualche vantaggio."

Una forma semplificata del teorema di reciprocità di Betti era già stata formulata da Maxwell (1864) nel suo articolo sulle figure reciproche: dati due punti A e B di un sistema elastico, e due direzioni a e b passanti per questi punti, lo spostamento che il punto A subisce nella direzione a sotto l'azione di una forza unitaria applicata a punto B nella direzione b , è uguale allo spostamento che subirebbe il punto B nella direzione b per effetto di una forza unitaria che agisse in A nella direzione a . Questo teorema sarebbe stato ripreso da Cremona nel suo bel trattato sulla statica grafica pubblicato nel 1872.

Il teorema di reciprocità di Betti, nonostante il suo ruolo fondamentale nella scienza delle costruzioni, oltre che nella teoria matematica dell'elasticità, non ebbe, almeno inizialmente, grande fortuna. Esso fu pressoché ignorato dai francesi (non compare infatti nei classici libri di Poincaré (1892), Mathieu (1890) e Duhem (1891, 1906)) e non viene neppure citato nei libri elementari di scienza delle costruzioni di Ibbetson (1887), Williamson (1894), Müller-Breslau (1886) e Weyrauch (1884). Il teorema di Betti è invece presente nei trattati italiani sulla teoria dell'elasticità di Marcolongo (1904, 1901/2), Burali-Forti e Marcolongo (1913) dove ne viene data la formulazione vettoriale, e nel trattato di Maggi (1917) dove si dimostrano anche le sue estreme conseguenze nell'ambito teoria delle distorsioni di Volterra.

3. Conclusioni

Per quanto riguarda l'influenza di Beltrami e Betti sullo sviluppo della fisica matematica in Italia, ebbene le differenze sono davvero notevoli. Infatti, mentre Beltrami cambiò spesso Università e insegnamento, e dunque non ebbe la possibilità di creare una vera e propria scuola, Betti insegnò sempre alla Scuola Normale di Pisa dove ebbe numerosi allievi. Beltrami ispirò comunque alcuni ricercatori che solo parzialmente avevano seguito le sue lezioni all'università, ma che tuttavia proseguirono e svilupparono le sue idee, come Cesàro, Padova e Somigliana (cf. Tazzioli 1993).

La teoria dell'elasticità, l'elettrostatica, ma anche l'elettrodinamica, il magnetismo e l'elettromagnetismo, sono campi connessi alla teoria del potenziale. Nei lavori di Betti la teoria del potenziale interviene pesantemente nelle sue ricerche sulla fisica matematica ed egli impiegò spesso funzioni analoghe alla funzione di Green per risolvere questioni di elasticità e teoria del calore. Questo stesso approccio fu seguito da alcuni suoi allievi all'Università di Pisa, tra i quali Dini, che in un articolo del 1876

affrontò il cosiddetto problema di Dirichlet generalizzato: trovare una funzione u tale che $u = f$, in un dominio regolare tridimensionale R ; e $u = v$ sul contorno di R (u è supposta continua insieme alle sue derivate prime e seconde e f , v sono funzioni continue). Dini dedusse l'appropriata funzione di Green mediante la quale espresse la soluzione del problema. In un altro articolo, Dini trovò in modo simile l'opportuna funzione di Green atta a risolvere il problema di Neumann generalizzato: trovare una funzione u tale che $u = f$ in R ; e $u / v = v$ sul contorno di R , dove v è la normale interna a R .

Ricci Curbastro, che fu uno studente di Betti, oltre che di Padova, studiò il problema di Dirichlet generalizzato in un articolo del 1885. Qui, egli dimostrò che "l'esistenza della soluzione u non poteva essere provata *a priori*" e pose allora delle condizioni su u e sulle sue derivate, soddisfatte le quali si era certi dell'esistenza della soluzione.

Anche Cerruti seguì, almeno parzialmente, le ricerche di Betti. Laureatosi a Torino nel 1873 con una tesi dal titolo *Sistemi elastici articolati*, Cerruti, come Castigliano, fu studente di Menabrea e Dorna, e ne subì l'influenza. Nel 1873, egli divenne assistente di idraulica presso la Scuola di Applicazione degli Ingegneri a Roma, e nel 1877 fu nominato professore straordinario all'Università di Roma e ordinario nel 1881. Cerruti (1880, 1882) estese la procedura di Betti dal campo statico a quello dei fenomeni variabili col tempo; inoltre, a partire dalle idee di Betti, egli elaborò un metodo per l'integrazione delle equazioni dell'elasticità che avrebbe dato l'avvio a tutta una serie di ricerche strettamente italiane, che attualmente si designano con il nome di Betti-Cerruti. Cerruti pervenne alle formule risolutive commettendo tuttavia una svista che inquinò tutti i suoi risultati; tra questi l'espressione matematica del principio di Huygens che Cerruti avrebbe potuto stabilire due anni prima di Kirchhoff, e che è oggi nota come formula di Kirchhoff.

La geometria differenziale giocava in questi studi un ruolo essenziale: essa era divenuta lo strumento privilegiato per indagare sulle questioni più urgenti della fisica matematica. I nuovi inaspettati sviluppi della geometria differenziale e l'esigenza di esprimere le equazioni fondamentali della fisica in maniera indipendente dal sistema di riferimento condussero, tra l'altro, Ricci Curbastro a elaborare il calcolo tensoriale.

Bibliografia

- Beltrami, E. *Opere matematiche* (a cura della Facoltà di Scienze della R. Università di Roma) 4 voll., Milano, Hoepli, 1902-1920.
1882 Sulle equazioni generali dell'elasticità, in *Opere* III, 383-407.
1883b Sulla teoria del potenziale, in *Opere* IV, 33-44.
1884a Sull'uso delle coordinate curvilinee nelle teorie del potenziale e dell'elasticità, in *Opere* IV, 136-179.
1884b Sulla rappresentazione delle forze newtoniane per mezzo di forze elastiche, in *Opere* IV, 95-103.
1886 Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell, in *Opere* IV, 190-223.
1889 Note fisico-matematiche, in *Opere* IV, 320-329.

- 1892 Osservazioni alla nota del Prof. Morera, in *Opere* IV, 510-512.
- Betti, E., *Opere matematiche* (a cura dell'Accademia dei Lincei) 2 voll., Milano, Hoepli, 1903-1913.
- 1863 Teorica delle forze che agiscono secondo la legge di Newton e sua applicazione alla elettricità statica, in *Opere* II, 45-153.
- 1868 Sopra la elettrodinamica, in *Opere* II, 242-245.
- 1872-73 Teoria della elasticità, in *Opere* II, 291-378.
- 1879 *Teorica delle forze newtoniane e sue applicazioni all'elettrostatica e al magnetismo*, Pisa, Nistri.
- 1996 Capitolo inedito della Teorica delle forze newtoniane (a cura di L. Dell'Aglio), in *Miscellanea di opere difficilmente reperibili, rarità bibliografiche ...*, Quaderni di Capestrano, n. 3.
- Burali-Forti, C. e Marcolongo, R.
- 1913 *Analyse vectorielle générale*, II. *Applications è la mécanique et à la physique*, Pavie, Mattei.
- Castigliano, A.
- 1873 *Dissertazione presentata alla R. Scuola di Applicazione per gli Ingegneri in Torino per ottenere il diploma di laurea in ingegneria*, Torino.
- 1875 Nuova teoria intorno all'equilibrio dei sistemi elastici, *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino* **11**, 127-286.
- Cerruti, V.
- 1880 Sulle vibrazioni dei corpi elastici isotropi, *Memorie della R. Accademia dei Lincei* (3) **8**, 361-389.
- 1882 Ricerche intorno all'equilibrio dei corpi elastici isotropi, *Memorie della R. Accademia dei Lincei* (3) **13**, 81-123.
- Clausius, R.
- 1868 Ueber die von Gauss angeregte neue Auffassung der elektrodynamischen Erscheinungen, *Annalen der Physik und Chemie* **135**, 606-621.
- Colonnetti, G.
- 1916 *Principii di statica dei solidi elastici*, Pisa, Spoerri.
- Dini, U., *Opere* (a cura dell'.M.I.) 5 voll., Roma, Cremonese, 1953-59.
- 1871-72 Sulla integrazione della equazione $\Delta u = 0$, in *Opere* II, 264-310.
- 1876 Su una funzione analoga a quella di Green, in *Opere* II, 311-322.
- Duhem, P.
- 1891 *Hydrodynamique, élasticité, acoustique*, Paris, Hermann.
- 1906 *Recherches sur l'élasticité*, Paris, Gauthier-Villars.
- Felici, R.
- 1852a Sulla teoria matematica dell'induzione elettrodinamica, *Annali della Università Toscana*, **3**, II, 1-30.
- 1852b Sulla teoria matematica dell'induzione elettrodinamica, *Annali della Università Toscana*, **3**, II, 31-68.
- 1855 Ricerche sulle leggi generali della induzione elettro-dinamica, *Il Nuovo Cimento* (2) **1**, p. 325.
- Ibbetson, W. J.
- 1887 *An elementary treatise on the mathematical theory of perfectly elastic solids*, London, Macmillan.
- Love, A. E. H., M. A.

- 1906 *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Cambridge, University Press.
- Maggi, G. A.
1917 *Dinamica dei sistemi*, Pisa, Spoerri.
- Marcolongo, R.
1901/2 *Lezioni di fisica matematica 1901/2*, Litografate.
- 1904 *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici*, Milano, Hoepli.
- Mathieu, E.
1890 *Théorie de l'élasticité des corps solides*, 2 voll., Paris, Gauthier-Villars.
- Maxwell, J. C.
1864 On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames, *Philosophical magazine* **27**, 294-299.
- 1873 *A treatise on electricity and magnetism*, 2 voll., Oxford, Clarendon Press; le citazioni si riferiscono alla III ed. 1891.
- Menabrea, L. F.
1858 Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques, *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie de Sciences de Paris* **46**, 1056-1060.
- 1875 Sulla determinazione delle tensioni e delle pressioni ne' sistemi elastici, *Atti della R. Accademia dei Lincei* (2) **2**, 201-220.
- Müller-Breslau, H.
1886 *Eléments de statique graphique*, I, Paris, Bandry.
- Poincaré, H.
1892 *Leçons sur la théorie de l'élasticité*, Paris, Carré.
- Ricci Curbastro, G., *Opere* (a cura dell'U. M. I.) 2 voll., Roma, Cremonese, 1956-1957.
- 1885 Sulla integrazione della equazione $\Delta U = f$, in *Opere* I, 172-176.
- Riemann, B., *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass* (a cura di H. Weber) Leipzig, Teubner, 1876; II ed. 1892; ripubbl. New York, Springer, 1991.
- 1858 *Ein Beitrag zur Elektrodynamik*, in *Werke* 288-293, pubb. 1867.
- Roiti, A.
1902 Commemorazione di Riccardo Felici, *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* (5) **11**, 285-295.
- Sabbia, E.
1869 *Errore del principio di elasticità formulato da L. Federico Menabrea. Cenno critico di E. S.*, Torino.
- Strutt, J. W. (Lord Rayleigh)
1873 Some general theorems relating to vibrations, *Proceedings of the London mathematical Society* **4**, 357-368.
- Tazzioli, R.
1993 Ether and theory of elasticity in Beltrami's work, *Archive for history of exact sciences* **46**, 1-37
- Williamson, B.
1894 *Introduction to the mathematical theory of the stress and strain of elastic solids*, London, Longmans, Green.
- Weyrauch, J. J.
1884 *Theorie elastischer Körper*, Leipzig, Teubner.

