

Antonino Drago¹

MINKOWSKY, POINCARÉ, LOBACHEVSKIJ:
LA VIA GEOMETRICA ALLA RELATIVITÀ RISTRETTA

1. Introduzione

La nascita della relatività ristretta (=RR) può essere caratterizzata in molte maniere, ma certamente una delle più immediate ed efficaci è proprio quella di ricordare la crisi che essa ha determinato storicamente nel rapporto fisica-matematica (che costituisce un problema ancor più ampio di quello originario per Einstein, quello di conciliare due teorie fisiche radicalmente differenti): il rifiuto del concetto di spazio assoluto, che in fisica teorica era stato introdotto da Newton e che da allora in poi era stato il concetto matematico basilare di quasi ogni teoria fisica.

Se facciamo attenzione alla storia della scienza più vicina alla fisica, la matematica, notiamo che, poco prima anche i suoi fondamenti erano stati sconvolti, in una maniera forse ancora più grande: la nascita delle geometrie non euclidee (Lobachevskij, 1826, in realtà recepita solo dal 1868). La geometria euclidea, ritenuta per millenni un modello di teoria scientifica e che durante lo sviluppo della scienza moderna, era stata il linguaggio stesso della realtà materiale (Galilei, Cartesio, Kant), si era invece dimostrata una teoria matematica come tante altre, senza poter più pretendere un particolare privilegio all'interno della matematica tutta. Infatti prima si dimostrò che le geometrie non euclidee (=GNE) erano non contraddittorie tanto quanto lo può pretendere la geometria euclidea (Beltrami, 1868); poi il programma di Erlangen di Klein (1872) considerò le GNE come semplici sottogruppi del gruppo delle trasformazioni proiettive; infine la sua riformulazione delle antica geometria euclidea come assiomatica rigorosa (Hilbert 1899) mostrò che il suo insieme di assiomi era numeroso e affatto speciale.² Tutto ciò è certamente pertinente alla crisi dello spazio della RR, perché ha svuotato il finallora indiscusso rapporto matematica-fisica dalla parte della matematica, nel mentre che la fisica non riusciva a conciliare tra loro le precedenti teorie, pur costruite sui fatti sperimentali.

Sotto questa luce si può pensare che la crisi della RR fu anche una conseguenza culturale di questo cambiamento traumatico nei fondamenti della geometria, perché questo cambiamento non poteva non modificare il rapporto della geometria con la fisica teorica. E in effetti la RR è famosa per aver sostituito la geometria euclidea con una nuova geometria, quella non euclidea di Minkowsky; i cui concetti caratteristici hanno sconvolto l'intuizione geometrica tradizionale: il tempo è assimilato alle coordinate spaziali, le dimensioni sono quattro, solo una parte dello spazio è accessibile, le curve principali sono delle iperboli, ecc..

Ma, a mia conoscenza, si è studiata poco la nascita della RR prendendo come quadro di riferimento la storia della geometria³ (si considerano piuttosto: la

¹ Gruppo di Storia della Fisica - Dip. Scienze Fisiche - Univ. "Federico II", Napoli; adrago@na.infn.it

² Un ottimo libro di storia della matematica è quello di M. Kline: **Il pensiero matematico dall'antichità ai tempi moderni**, Boringhieri, 1993, o anche la sua sintesi concettuale: **La Matematica. La perdita della certezza**, Mondadori, 1985. Un'ampia storia delle geometrie non euclidee è quella di B.A. Rosenfeld: **A History of Non-Euclidean Geometry**, Springer, Berlin, 1988. A mio giudizio nella storia dei fondamenti della matematica la crisi delle geometrie non euclidee è più importante della crisi delle antinomie e del teorema di Goedel: "Is Goedel's incompleteness theorem a consequence of the two kinds of organization of a scientific theory?", in Z.W.K. Wolkowsky (ed.): **First International Symposium on Goedel's Theorems**, World Scientific, London, 1993, 107-135.

³ Lo ha fatto H. Weyl: **Spazio, tempo, materia** (1918), Boringhieri, Torino, 1950; però in una prospettiva più ristretta di quella seguente. L'articolo di D.

storia dello spazio e del tempo, la storia del concetto di spazio relazionale rispetto a quello assoluto di Newton, la storia del vecchio concetto dell'etere, la storia del concetto di campo elettromagnetico rispetto ai concetti fondamentali della meccanica; lo studia invece di solito la relatività generale, perché essa all'inizio pone esplicitamente il problema della geometria). Allora nel seguito voglio studiare la nascita della RR secondo il cambiamento di rapporto tra fisica teorica e matematica, nella fattispecie la geometria, ponendo il problema della geometria adatta alla RR, in tutta la sua generalità storica.⁴

Nel seguito procederò a ritroso, dai fatti ben noti sulla geometria della RR (spazio di Minkowsky) a quelli meno noti (le quattro geometrie di Poincaré), in modo da recuperare un quadro preciso di risposte al problema di quali geometrie siano ipotizzabili per la RR. Poi collegherò - in una maniera che è precisa in termini fondazionali ma ancora euristica in termini tecnici - queste geometrie a delle variabili matematiche che interpretano i fondamenti della scienza (che sono stati individuati in lavori precedenti); e quindi formulerò un'ipotesi sullo sviluppo concettuale della RR secondo un rapporto chiaro con le possibili geometrie; il che porterà a riscoprire una tradizione meccanica che si accorda con la geometria iperbolica di Lobacevskij e che valorizza una particolare fondazione della RR come molto interessante.

Piuttosto che una "ricostruzione razionale" della storia della RR rispetto ad una astratta razionalità scientifica indipendente dagli stessi scienziati che vi contribuirono, cercherò di ricavare dalla storia della geometria e della RR una visione razionale dei fondamenti della RR per riformulare la teoria in una maniera che sia più coerente con essi.⁵

Prosperi: "On Weyl's Raumproblem", *Riv. Nuovo Cimento*, **11** (1988) 1-19, purtroppo non conosce tutti gli studi sul problema di Helmholtz-Lie dopo quelli di Weyl, ad es. lo studio di Z. Domotor: "Causal models of space-time geometry", *Synthese*, **24** (1972) 5-57; la proposta di J. Anandan. "On the Hypotheses Underlying Physical geometry", *Found. Phys.*, **10** (1980) 601-629; lo studio storico approfondito di R. Torretti: **Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré**, Reidel, Boston, 1978 e il successivo libro: **Relativity and Geometry**, Pergamon, Oxford, 1983. Conosco due recenti lavori che si avvicinano alla mia impostazione: E. Giannetto: "H. Poincaré and the rise of special relativity", *Hadronic J. Suppl.*, **10** (1995) 365-433 e M. Paty: "Physical geometry and special relativity: Einstein and Poincaré", in L. Boi (ed.): **1830-1930. A Century of Geometry**, LNP 402 Springer, Berlin, 1992, 127-149; i loro risultati non sono discordi da quelli seguenti.

⁴ Si noti che v'è differenza tra spazio e geometria; la seconda è una teoria matematica, il primo è solo un suo concetto, che solo ingenuamente può essere confuso con lo spazio contenitore. Si noti inoltre che non è affatto vero che la geometria è sempre cinematica, rispetto a quella teoria dinamica che alla fine deve risultare essere la RR; perché lo spazio potrebbe essere quello delle velocità invece che quello delle posizioni.

⁵ In effetti, la seguente è solo una prima maniera di studiare la nascita della RR all'interno della crisi del tradizionale rapporto fisica-matematica: qui si restringe la matematica alla sola geometria e in questa teoria si indaga quali erano le alternative. La strategia più ampia (e definitiva) sarebbe quella di restare nella matematica in generale e considerare l'alternativa formale del costruttivismo alla matematica "rigorosa" e su questa base studiare le alternative nella geometria e nella RR. Ma ancora non si sa trovare il metodo per decidere quale geometria sia costruttiva o quale parte della teoria dei gruppi sia costruttiva. In attesa di acquisire questi risultati, qui si restringono le alternative formali della matematica a delle alternative semi-intuitive sulla geometria; il che comporterà un metodo semi-formale, qual'è quello esposto nel seguito.

2. La geometria di Minkowsky e la "quarta geometria" di Poincaré

E' a tutti noto che Einstein fondò la RR sulla critica e rifondazione del concetto di simultaneità, cioè sulle misure operative sia di spazio che di tempo; ma non suggerì una conseguente geometria dello spazio. Nel 1907, Minkowsky propose lo spazio-tempo quadridimensionale. Il successo fu pressoché immediato, se appena un anno dopo egli fu invitato a tenere la prolusione ad una assemblea nazionale di scienziati a Colonia.⁶

In realtà è contestabile che quella geometria si chiami di Minkowsky; perché essa era già nota (sia pure senza l'attribuzione del carattere temporale alla quarta coordinata) ed anzi era stata enfazzata dai lavori e dalle divulgazioni di Poincaré; di quello stesso Poincaré che della RR aveva già proposto quasi tutta la teoria quando Einstein scrisse il suo articolo.⁷

Poincaré l'aveva scoperta quando aveva studiato quello che nell'ultimo quarto di secolo era il classico problema sulla teoria geometrica: poiché sono state inventate più geometrie, quante sono quelle più rilevanti (per descrivere il mondo fisico)? Nel 1868 incominciò Helmholtz, con un celebre articolo. Poi in un articolo del 1887 Poincaré ha studiato il medesimo problema usando tre metodi differenti: la geometria proiettiva delle superfici quadratiche, la teoria dei gruppi di Lie, una serie di principi geometrici. Con ognuno dei primi due metodi Poincaré ha ottenuto quattro geometrie: poi la serie di principi, ordinati in modo che ciascuno di essi esclude una particolare geometria fino a lasciare la sola euclidea, ha caratterizzato anche in senso intuitivo-assiomatico queste quattro geometrie.⁸

Nell'introduzione dell'articolo Poincaré ha espresso la sua meraviglia per il fatto che i geometri ignoravano la "quarta geometria". Analoga meraviglia venne ripetuta nel suo famoso libro, che, com'è noto, riporta le conferenze pubbliche che egli aveva tenuto pochi anni prima.⁹ *Quindi Poincaré ha fatto tutto ciò che poteva per sottolineare l'importanza di questa quarta geometria, che aveva la sola disgrazia di essere poco intuitiva* (ad es., in essa una retta può essere perpendicolare a se stessa).

Invece Helmholtz, Lie e poi altri giunsero al risultato di sole tre geometrie (euclidea, ellittica e iperbolica) perché in effetti ponevano come ipotesi cruciale quella della inalterabilità delle figure (o, detto fisicamente, dei corpi solidi) per trasporto; una condizione che stabiliva quel legame con la precedente fisica-matematica, che in quel tempo sembrava la garanzia della verità scientifica. Questa ipotesi particolare portava ad escludere le geometrie che, come appunto la

⁶ A. Minkowsky: "Raum und Zeit" (tr. ingl. in A. Lorentz et al. (eds.): **The Principle of Relativity** Dover, New York, 1923, 73-91).

⁷ Una ragione valida per non attribuire questa geometria a Poincaré fu la sua svalutazione del problema di come il fisico sceglie la geometria adatta alla teoria fisica; benché sostenesse che il fisico deve scegliere, tuttavia secondo lui tutte le scelte sarebbero state equivalenti, in quanto le geometrie sarebbero state del tutto traducibili tra di loro. La posizione di Poincaré, classificata come "convenzionalista", fa tuttora discutere i filosofi della scienza; si veda ad es. D. Stump: "Henri Poincaré's philosophy of science", *Stud. Hist. Phil. Sci.*, **20** (1989) 335-363, o anche il mio: "La geometria adeguata alla teoria astronomica: il "convenzionalismo" di Poincaré", in E. Proverbio (ed.): **Atti III Conv. Naz. Storia dell'Astronomia**, Milano, 1998 (in stampa).

⁸ H. Poincaré: "Sur les hypothèses de la Géométrie", (1887) **Oeuvres**, **11**, Gauthier-Villars, Paris, 1956, 76-91. Per un resoconto di questa storia vedasi R. Torretti: op. cit., cap. 3.1. Si noti che il più citato articolo di Lie sullo stesso tema, è successivo a quello di Poincaré; inoltre è giudicato dai commentatori recenti poco chiaro e di fatto limitato dall'utilizzare una ipotesi restrittiva (che sarà indicata nel seguito).

⁹ H. Poincaré: op. cit., p. 82; **La Science et l'Hypothèse**, Flammarion, Paris, 1902, cap. 3.

"quarta geometria", non hanno curvatura costante. (Ricordo che se la curvatura è costante essa è nella seguente relazione con la distanza:

$$ds = \sqrt{dx_i^2 / (1 + 1/2K x_i^2)}$$

dove K è il raggio di curvatura).

Ma si noti che questa ipotesi è preconcetta; infatti essa dipende dalla meccanica newtoniana, nella cui statica è appunto fondamentale la schematizzazione del corpo rigido; mentre invece in dinamica questa idea di corpo rigido che non si deforma non è affatto fondamentale (benché Newton l'abbia sostenuta, riferendo la dinamica dell'urto al concetto di corpo "perfettamente duro"). Inoltre oggi non si vede perché in un tempo di crisi generale dei fondamenti della scienza, nonostante che ad es. Mach avesse già sostenuto che la teoria fondamentale di tutta la fisica teorica era piuttosto la termodinamica (dove appunto non ci sono corpi rigidi), la meccanica newtoniana dovesse essere presa come la teoria fondante tutta la scienza (attraverso la geometria). Infine questa ipotesi è preconcetta anche all'interno della geometria, perché non è detto che questa teoria matematica debba essere fondata sul concetto intuitivo di figura (e non su particolari relazioni tra punti: ad es., trasformazioni, quadrirapporti, lo stare tra).

Una sintesi relativamente recente di questi studi (che dopo Poincaré hanno usato anche i gruppi topologici) ha riconosciuto che troppo a lungo ci si è ristretti a quella particolare ipotesi, benché lo spazio di Minkowsky in RR ci obblighi a parlare di "geometria" anche nel caso di metriche indefinite.¹⁰

Quindi Poincaré ha saputo prendere d'anticipo uno studio che nella sua generalità formale è ancor oggi molto difficile, trovando dei metodi diretti che gli hanno dato una soluzione diversa da quella degli altri matematici del suo tempo: *le geometrie rilevanti sono quattro*. A cento anni dal suo studio, possiamo affermare che questa soluzione ha sicuramente il pregio aver indicato quelle geometrie che oggi risultano essere le più interessanti per la fisica teorica (quelle a curvatura costante, più quella utilizzata in RR da Minkowsky). Inoltre essa corrisponde ampiamente ad una visione complessiva della intera matematica: un recente lavoro sottolinea che si può dare una classificazione simile per l'intero corpo delle matematiche superiori.¹¹

Quindi questa soluzione di Poincaré - le geometrie sono quattro - costituisce una ipotesi interpretativa di come, in quegli anni di trapasso di tutta la scienza, egli abbia considerato i fondamenti della RR, della quale può essere considerato almeno un co-autore. E' quindi una base interpretativa della storia della RR. Inoltre costituisce anche un'importante ipotesi su come rifondare la RR a partire da un corretto rapporto con la pluralità delle geometrie. E' per approfondire queste ipotesi che nel seguito integrerò la visione dello scritto di Poincaré del 1887 sui fondamenti della geometria con ulteriori precisazioni.

3. Due operazioni matematiche di passaggio tra le quattro geometrie

¹⁰ H. Freudenthal: "Lie Groups in the Foundations of Geometry", *Adv. Math.*, **1** (1965), p. 148-156: "... questa soluzione del problema di Helmholtz-Lie potrebbe essere considerata finale, per la sua relativa semplicità, ma essa esclude tutti i tipi di metriche indefinite. Sarebbe desiderabile trovare un ben definito quadro di riferimento in cui trattare le geometrie basate su una metrica indefinita, per esempio quella della relatività ristretta. Ma i tentativi in questo senso non hanno avuto risultati pari a quelli delle metriche definite." (p. 151).

¹¹ R.S. Strichartz: "Realms of Mathematics: Elliptic, Hyperbolic, Parabolic, Sub-Elliptic", *Math. Intelligencer*, **9** (1987) 56-64. Si noti che anche H.S.M. Coxeter: *Non-Euclidean Geometry*, U. Toronto P., 1957 ha per quadro di riferimento proprio le quattro geometrie di Poincaré, alla luce delle geometrie affini e proiettive (pp. 17-19).

Notiamo che il gruppo delle quattro GNE individuato da Poincaré, ha delle proprietà interessanti. Oltre quelle che lui ha sottolineato, ne propongo due che mi sembrano ancor più significative, perché esprimono, mediante operazioni matematiche, le relazioni reciproche di queste geometrie.

Lobacevskij ha proposto per primo l'idea di mettere in relazione le varie geometrie piane mediante il confronto delle corrispondenti leggi di trigonometria. Nella geometria euclidea, ellittica ed iperbolica la legge del seno è data rispettivamente da:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{A} = \frac{\text{sen } \beta}{B}; \quad \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } A/r} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } B/r}; \quad \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } A/k} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } B/k}; \quad (1)$$

dove A e B sono i lati, α e β sono gli angoli corrispondenti, r è una costante reale, $k=ir$ è una costante immaginaria pura.¹² (L'ultima legge può essere scritta anche con i seni iperbolici al posto di quelli ordinari, pur di passare da k ad ir). Nella geometria pseudo-euclidea si può parlare di trigonometria quando si considera immaginaria, come fece per primo Poincaré nel suo articolo sulla relatività, la quarta coordinata; allora la metrica diventa euclidea e viene stabilita la prima delle precedenti tre leggi, ma con grandezze complesse.

Se consideriamo un triangolo ABC nel piano euclideo ed il suo corrispettivo $A'B'C'$ nel piano ellittico, diminuendo le dimensioni del triangolo, cioè i lati A e B , le funzioni seno di A/r e di B/r possono essere approssimate per piccoli valori dell'argomento: $\text{sen } x \approx x$. Lo stesso vale nel piano iperbolico per il seno di A/k e di B/k . Allora è chiaro che per piccole dimensioni dei triangoli la legge del seno in (1) dà sempre A e B nelle tre geometrie. Di conseguenza, possiamo dire che in una regione molto piccola del piano ellittico o iperbolico la geometria è approssimativamente euclidea; o anche, che quella regione è approssimata da quella del "piano" tangente corrispondente (euclideo).

Ma questo passaggio non rappresenta tutte le relazioni tra le geometrie. Ad es. la pseudo-euclidea non sembra avere un unico parametro geometrico, da far tendere a ∞ (o a 0), per ottenere la geometria ellittica; né conosco un parametro di questo tipo per passare dalla geometria ellittica alla geometria iperbolica, o viceversa.

Esiste però un modo diverso, ma altrettanto interessante, di passare da una geometria all'altra; esso è stato suggerito ancora una volta da Lobacevskij. Egli scoprì che la trigonometria sferica euclidea ha le stesse formule della trigonometria sferica iperbolica, purché il raggio di curvatura passi da reale ad immaginario; e viceversa. In realtà dalla (1) vediamo che questo passaggio (coniugazione) vale soprattutto tra geometria iperbolica e geometria ellittica (e nel caso particolare di $r=i$, quella euclidea). In più, anche la euclidea passa alla pseudoeuclidea se sull'ultima coordinata della espressione quadratica della distanza cambiamo di segno, cioè se passiamo ai suoi valori immaginari.¹³

¹² I. Adler: *A New Look at Geometry*, John Day, New York, 1966, pp. 250-52; B.A. Rosenfeld: op. cit., Springer, Berlin, 1988, pp. 223-227.

¹³ Si può confermare la validità di queste operazioni di passaggio applicandole agli assoluti delle quattro geometrie; o alle loro metriche (indicate da H.S.M. Coxeter: op. cit., p. 12, pp. 254-5; I. Adler: op. cit., pp. 97-100). Vedasi A. Drago e G. Sorrentino: "Caratterizzazione delle geometrie secondo quattro tipi fondamentali", *Atti Fond. G. Ronchi*, 53 (1998) 609-626. Si noti che in quella teoria dei gruppi delle trasformazioni, con la quale oggi si caratterizzano le diverse geometrie, le due operazioni di cui sopra danno luogo a problemi molto difficili. Questo fatto conferma il grande intuito di Poincaré nel trattare elementarmente dei problemi che ancora oggi non si sanno studiare con sicurezza. Le due opzioni suggeriscono l'idea che qui stiamo studiando una incommensurabilità di teorie; la quale ammette una mutua traducibilità, appunto quella data dalle due opzioni suddette; ma questa traducibilità è solo

Per riassumere quello che abbiamo ottenuto, disponiamo le quattro geometrie secondo lo schema seguente e indichiamo le operazioni matematiche che effettuano i passaggi dall'una all'altra; otteniamo un risultato interessante, perché indica una precisa struttura di relazioni tra queste geometrie:

TAB. 1 LE RELAZIONI MATEMATICHE TRA LE QUATTRO GEOMETRIE

	$r=ik$	
	Geometria EUCLIDEA	Geometria PSEUDOEUCLIDEA
passaggio al limite	Geometria ELLITTICA	Geometria IPERBOLICA

Da destra a sinistra si passa mediante l'operazione di rendere complessi i reali (e viceversa da sinistra a destra) su una opportuna coordinata; da sotto a sopra si passa mediante un passaggio al limite, al solito su un opportuno parametro o coordinata. Ciò fa supporre che i rapporti tra le quattro geometrie rappresentino una loro importante caratterizzazione, di tipo fondamentale.

4. Dalle quattro geometrie di Poincaré alle due opzioni fondamentali

Questa maniera di caratterizzare le quattro geometrie può essere vista come la rappresentazione implicita delle quattro coppie di scelte su quelle due opzioni che ho suggerito essere nei fondamenti di una teoria scientifica¹⁴ (un'opzione sul tipo di *matematica*, che è o costruttiva, basata sul solo infinito potenziale (=IP), o è genericamente classica, basata anche sull'infinito in atto (=IA); e una opzione sul tipo di *logica*, che è o classica, in modo da organizzare tutta la teoria come insieme di teoremi che sono dedotti rigorosamente da pochi principi (=OA); oppure è non classica, in modo da organizzare la teoria con dei principi metodologici che euristicamente ci portano a scoprire un nuovo metodo scientifico per risolvere un problema universale (=OP).

parziale, così come sostengono giustamente i propositori del concetto di incommensurabilità, Feyerabend e Kuhn. Si noti che le due operazioni che fanno passare da una geometria ad un'altra sono le tipiche operazioni con le quali le due teorie fisiche moderne ritornano alla meccanica classica. Per questi passaggi tra le teorie fisiche, chiamati di solito principi di corrispondenza, valgono le considerazioni precedenti sui passaggi tra geometrie; se ne sono accorti quelli che hanno studiato approfonditamente questi "principi". Cfr. E.L. Hill: "Classical Mechanics as a Limiting Form of Quantum Mechanics", in G. Maxwell and P.K. Feyerabend (eds.): **Mind, Matter and Motion**, U. Minnesota P., 1966, 430-448.

¹⁴ Collegamenti tra concetti intuitivi e scelte fondazionali sono stati trovati per la prima volta in fisica teorica da N.R. Hanson: "Newton's First Law", in R.G. Colodny (ed.): **Beyond the Edge of Certainty**, Elsevier, 1970, pp. 6-27; e poi da me sviluppati a partire da quei concetti di spazio, geometrizzazione, dissoluzione, cosmo, finitezza, che costituiscono le categorie interpretative con le quali Koyré ha interpretato la nascita della scienza moderna: "Interpretazione delle frasi caratteristiche di Koyré e loro estensione alla storia della fisica dell'ottocento", in C. Vinti (ed.): **Alexandre Koyré. L'avventura intellettuale**, ESI, Napoli, 1994, 657-691. Le due opzioni sono illustrate nella mia presentazione sintetica della storia della scienza: **Le due opzioni**, La Meridiana, Molfetta, BA, 1991; e in "The modern fulfilment of Leibniz' program for a *Scientia generalis*", in H. Breger (ed.): **VI Int. Kongress: Leibniz und Europa**, Hannover, 1994, 185-195.

E' chiaro che queste scelte fondazionali sono sì matematiche, ma sono anche filosofiche; quindi il loro legame con le operazioni matematiche che fanno passare tra le varie geometrie non può essere derivato con dei teoremi (di un'eventuale metateoria matematizzata). Tanto più che, quando parliamo di una particolare geometria tra le quattro geometrie, in realtà noi stiamo intendendo *un particolare tipo* di teoria geometrica, il quale riunisce tutte quelle geometrie che condividono le stesse scelte fondazionali (In questo senso generale, la quarta geometria ad es. può rappresentare il tipo di tutte le geometrie che hanno metrica indefinita). Allora il legame indicato può essere sostenuto solo con argomenti di plausibilità. Il che può nuocere alla ricerca di un rigore assoluto, ma favorisce la rapidità della indagine. Qui sta il carattere semi-formale (o semi-intuitivo) della seguente caratterizzazione delle quattro geometrie.

E' interessante il fatto che nell'articolo del 1887 Poincaré ha voluto caratterizzare le quattro GNE anche sinteticamente, con una serie di principi *ad excludendum*. Se diamo credito a Poincaré di aver intuito con essi la struttura fondazionale delle quattro geometrie in generale, possiamo allora studiare i fondamenti di queste geometrie anche mediante i concetti intuitivi che egli usa nei suoi principi.

Dopo aver esposto dei principi del tutto generali, Poincaré scrive l'assioma che porta alla prima esclusione, quella della "quarta geometria", o pseudoeuclidea, o geometria dello spazio-tempo di Minkowsky (ricordo che in esso c'è il cono luce, sulle cui rette i punti hanno distanza nulla nella metrica pseudoeuclidea).

"Facciamo ancora le due ipotesi seguenti:

D: La distanza di due punti non può essere nulla se non quando i due punti coincidono.

E: Quando due rette si intersecano, si può far ruotare una di esse intorno al punto di intersezione in modo da farla coincidere con l'altra.

Queste due ipotesi sono legate necessariamente l'una all'altra; basta ammettere una di esse per essere obbligati ad ammettere l'altra ed escludere la geometria dell'iperboloide ad una falda [= la geometria pseudoeuclidea].

Introduciamo ancora l'ipotesi seguente:

F: Due rette non possono intersecarsi che in un punto e la geometria sferica [= ellittica] si troverà esclusa a sua volta.

Non resta che introdurre il *postulatum* di Euclide:

G: La somma degli angoli interni di un triangolo è una costante.

Possiamo notare che questo *postulatum* ci dispensa dalle ipotesi *D*, *E* ed *F*, che ne sono delle conseguenze necessarie.¹⁵

Nei principi di Poincaré si può vedere la illustrazione delle variazioni radicali di significato che subiscono quegli enti geometrici (punto, retta, distanza, rotazione) che di solito vengono posti a fondamento della geometria euclidea. Inoltre ci possiamo vedere una rappresentazione implicita delle scelte fondamentali. Al principio *D* corrisponde una distanza che non è effettiva in termini geometrici, quindi la scelta di *IA*; mentre al principio *F* corrisponde la esclusione di rette finite, cioè la esclusione di *IP*. Invece ai principi *E* e *G* corrispondono le scelte sul tipo di organizzazione: *OP* ad *E*, (dato che ci sono zone dello spazio essenzialmente differenti); *OA* a *G* (perché, dando una caratteristica comune ad una figura basilare come il triangolo per ogni zona dello spazio, esso può costituire un assioma per tutte le proposizioni di quella geometria). Otteniamo così una corrispondenza parziale, ancorché suggestiva tra concetti geometrici e scelte sulle opzioni.

Uno studio precedente¹⁶ ha discusso più precisamente i precedenti punti; ne riassumo i risultati:

¹⁵ H. Poincaré: "Sur les hypothèses...", op. cit., pp. 89-90.

¹⁶ "Didattica delle geometrie non euclidee e delle variazioni radicali di significato dei loro enti", in A. Morelli (ed.): *Atti Conv. Mathesis*, (Caserta) 1997 (in stampa). Vedasi anche il mio "La geometria adeguata...", op. cit..

1) Le due operazioni che ho presentato nel precedente par. debbono essere considerate una concretizzazione matematica delle due opzioni; d'altronde è molto intuitivo che l'operazione matematica che può far passare da IP a IA è il limite; mentre quella che può far passare matematicamente da OA (realismo platonico) alla OP (euristica di un metodo ancora da trovare) è il passaggio ai numeri immaginari; e viceversa.

2) Pertanto ogni particolare geometria viene a corrispondere ad una particolare coppia di scelte sulle due opzioni, e viceversa (il che conferma ancora una volta la capacità delle due opzioni di rappresentare i fondamenti della scienza, in questo caso della teoria scientifica storicamente più antica e più importante per il rapporto fisica-matematica, cioè per una grande parte della scienza e della storia scienza).

3) Ci sono due enti geometrici intuitivi - retta e raggio di curvatura R - le cui VRS caratterizzano le quattro geometrie. Il tutto è riassunto nella tabella seguente.

TAB. 2 CORRISPONDENZA TRA LE QUATTRO GEOMETRIE, LE DUE OPZIONI E DUE ENTI GEOMETRICI FONDAMENTALI

	ORGANIZZAZIONE E ARISTOTELICA (logica classica)	ORGANIZZAZIONE PROBLEMATICA (logica non classica)
INFINITO IN ATTO (mat. Classica)	GEOM. EUCLIDEA ($R=$ e retta infinita)	GEOM. PSEUDOEUCLEIDA (R cost. e retta anche infinita)
INFINITO POTENZIALE (mat. Costruttiva)	GEOM. ELLITTICA ($R=a$ e retta periodica)	GEOM. IPERBOLICA ($R=ia$ e retta illimitata)
	$a \quad - \quad ia$	

Questi risultati ci danno una precisa struttura che caratterizza i fondamenti (sia matematici che intuitivi) delle quattro geometrie.

Si può supporre che Poincaré abbia implicitamente intuito questo quadro fondazionale.¹⁷ Infatti è da notare che, quando ha anticipato gran parte dei contenuti fisici ed epistemologici della RR,¹⁸ egli senza esitazione ha introdotto per primo quello spazio che poi è stato chiamato di Minkowsky. Quindi nella pratica egli aveva sostanzialmente quell'atteggiamento che verrà sviluppato nel seguito, anche se sul momento ha razionalizzato un diverso atteggiamento.

¹⁷ In effetti è ben noto che egli era a favore dell'IP, tanto da essere considerato un semi-intuizionista. Inoltre Poincaré ha espresso, anche con più chiarezza di Einstein, la opzione tra OP e OA, quando ha caratterizzato tutte le teorie fisiche classiche come o teorie a forze centrali o come teorie di principio (G. Esposito: "Teorie di principi" e "teorie costruttive" in Einstein: una reinterpretazione", P. Tucci (ed.): *Atti XVI Conv. Naz. Storia della Fisica*, (Como), Milano, 1997, 425-456). Inoltre ha sottolineato la stessa opzione anche in matematica a proposito della sua polemica sul principio d'induzione (si veda il mio: "Poincaré vs. Peano and Hilbert about the mathematical principle of induction", in J.-L. Greffe, G. Heinzmann, K. Lorenz (eds.): *Henri Poincaré. Science et Philosophie*, Blanchard, Paris, Springer, Berlino, 1996, 513-527).

¹⁸ H. Poincaré: "Sur la dynamique de l'électron", *Rend. Circ. Palermo*, 21 (1906) 129-176.

Ma la sua enfasi sulla traducibilità di ogni geometria in un'altra geometria lo ha portato a svalutare quel pluralismo di fondazioni che pure lui per primo aveva sottolineato e precisato e che qui è rappresentato dalla tabella 1. Perciò d'ora in poi svilupperò una analisi che non dipenderà più da quanto ha scritto Poincaré e che invece è basata solo sul quadro fondazionale della Tabella 2. Esso rappresenta come piuttosto Poincaré avrebbe potuto ragionare in una visione più radicale dei fondamenti della fisica; se cioè avesse accettato la incommensurabilità tra le geometrie (e tra le teorie scientifiche).

5. Le scelte fondamentali della relatività ristretta.

Quindi con ragionamenti semi-formali siamo giunti alla conclusione che al tempo di Einstein le geometrie da tener presenti erano le quattro su indicate e che esse implicitamente suggerivano una corrispondenza con le due opzioni fondamentali.

Riprendiamo ora il problema di quale collegamento sia conveniente tra la RR ed una geometria tra le quattro suddette. Ricordando che le scelte sulle due opzioni rappresentano quanto di più fondamentale ci sia in una teoria scientifica, allora quel collegamento dovrà avvenire tra la RR e quella geometria che ha le stesse scelte fondamentali della RR.¹⁹ A conferma di ciò, notiamo che la meccanica di Newton è IA&OA;²⁰ ed essa aveva come geometria quella euclidea; che, secondo la tabella precedente è anch'essa IA&OA, cioè le stesse scelte fondamentali.

Passiamo ora a studiare le scelte fondamentali della RR. Siccome questa teoria si distacca radicalmente dalla meccanica newtoniana, è ragionevole pensare che essa compia scelte fondamentali differenti da IA e OA (e che quindi la sua geometria è una delle tre GNE della Tab. 2).²¹

¹⁹ Con ciò mi distanzio da quelli che (v. ad es. Anandan: op. cit.) sostengono che è solo il gruppo di simmetria della teoria fisica che determina quale sia la sua geometria; ma nello stesso tempo non condivido il parere opposto di coloro (i più) che lasciano piena libertà di collegamento.

²⁰ A. Drago: "Una caratterizzazione del paradigma Newtoniano", in F. Bevilacqua (ed.): *Atti VIII Congr. Naz. St. Fisica*, Napoli, 1987, 95-106; "A Characterization of Newtonian Paradigm", in P.B. Scheurer, G. Debrock (eds.): *Newton's Scientific and Philosophical Legacy*, Kluwer Acad. P., 1988, 239-252.

²¹ Dato che lo si è potuto fare per le teorie classiche (v. il mio: "Interpretazione...", op.cit.), si può cercare di collegare i concetti basilari con cui i fisici hanno intuito i fondamenti della RR, cioè l'aspetto soggettivo della teoria, con le scelte fondamentali. Nelle teorie classiche quei concetti base erano stati suggeriti dalle categorie interpretative di Koyré. Ma le due frasi caratteristiche di Koyré -"dissoluzione del cosmo e geometrizzazione dello spazio" -, certamente hanno poco senso nella RR. In questa teoria non si rifiuta l'intero "cosmo finito", perché anzi si introduce un limite finito alle velocità. Forse c'è "la geometrizzazione dello spazio"? La RR casomai geometrizza il tempo, per ottenere lo spazio-tempo a quattro dimensioni (casomai, si può sostenere che è la relatività generale, con la "materia che geometrizza lo spazio", che estende la frase di Koyré).

D'altra parte le due frasi caratteristiche alternative, quelle delle teorie alternative dell'800 ("evanescenza della forza-causa e discretizzazione della materia"), non hanno appigli nei concetti fondamentali: qui non c'è "discretizzazione", né c'è "materia"; casomai ha un senso storico la sola "evanescenza della forza-causa", che in RR viene subordinata al concetto dinamico fondamentale, che è il tensore quadrimpulso. Però questo fatto è troppo limitato per deciderci i fondamenti di una intera teoria.

Incominciamo dalla scelta sulla organizzazione della teoria. E' molto chiaro quale scelta di organizzazione venga rifiutata dalla relatività ristretta: la scelta dell'OA. Una prima ragione è che, come è ben noto, viene rifiutato lo spazio assoluto, quel concetto soggettivo che per secoli aveva materializzato la OA. Inoltre la RR gli sostituisce un nuovo concetto di spazio, che non ha nulla di quella autoevidenza che Aristotele chiedeva per i principi di una teoria scientifica OA; anzi, è un concetto difficile, perché è quadridimensionale e unifica le coordinate spaziali col tempo.

Una seconda ragione è che la teoria non ha dei principi dai quali dedurre tutto l'insieme delle leggi. Invero, in RR si parla di due principi. Il primo è il principio della insuperabilità della velocità della luce; ma questo non è un principio per ottenere deduzioni; è chiaramente un principio metodologico, col quale capire come riorganizzare lo spazio e la teoria. Einstein ha scritto che lo ha concepito in analogia ad un principio simile, l'impossibilità del moto perpetuo nella termodinamica; e sappiamo bene che nella teoria termodinamica questo principio ha il carattere di principio metodologico, perché inizia una teoria OP.²² Inoltre il secondo principio è quello di invarianza in forma delle leggi fisiche per cambiamenti di sistemi di riferimento inerziali. Ma questo è ancora una volta un principio metodologico: non ha nessuna autoevidenza o certezza. Per di più Einstein non deduce da questi principi, perché essi sarebbero "incompatibili"; il suo problema è allora come "conciliarli".

Di fatto la teoria è chiaramente OP, perché è centrata su un problema, che è il problema universale di come comprendere una medesima legge fisica, pur stando in sistemi di riferimento differenti, ma equivalenti; e i due suddetti principi indicano solamente l'inizio di quel metodo che ci permetterà di risolvere quel problema. Una controprova di questa conclusione è che 90 anni di sforzi per realizzare una assiomatica della relatività ristretta sono stati finora inconclusivi (A partire da gruppi di ipotesi, - come ad es. l'isotropia e l'omogeneità dello spazio, oppure la legge di propagazione dell'onda elettromagnetica -, si è riusciti

Dobbiamo concludere che *ambidue le coppie delle frasi alla Koyré, che nella fisica di prima del 1900 traducevano in maniera soggettiva le scelte effettive di varie teorie, non sono più adeguate al caso della RR*. Questo è il segno evidente che nella RR la traduzione dei fondamenti della teoria in concetti surrogatori non è avvenuto più secondo le idee intuitive delle teorie classiche. Infatti la letteratura sul concetto di spazio che la RR ha generato (a quattro dimensioni! Con il tempo equiparato alle coordinate spaziali!) è vastissima: il nuovo concetto di spazio quadridimensionale ha chiarito a tutti che il vecchio concetto newtoniano era irreversibilmente alle spalle e che si entrava in una concezione dello spazio del tutto nuova e con ulteriori VRS. E infatti la RR ha certamente realizzato una rivoluzione di tipo soggettivo anche negli altri concetti fondamentali (che di solito vengono utilizzati al posto dei veri, ma incogniti, fondamenti della fisica; che cioè surrogano le scelte fondamentali): il concetto di spazio, di lunghezza (che si accorcia), di massa (che aumenta) e di energia (che diventa equivalente alla massa). Cioè, la RR ha generato VRS di quasi tutti i concetti basilari classici.

Allora, se si cercasse di sviluppare alla Koyré una storia della RR, si dovrebbero trovare delle categorie interpretative di tipo soggettivo che siano del tutto nuove. E' infatti su questo obiettivo che si cimentano tutti i libri di divulgazione della relatività: tradurre la teoria in pochi concetti intuibili soggettivamente.

²² A. Drago: " Thermodynamics vs. Mechanics: A new look and a new teaching", in M.P. Giaquinta et alii (eds.): **Proc. Taormina Conference on Thermodynamics**, Acc. Pel. Pericolanti, Messina, 1992, 311-329.

ad ottenere il gruppo di Lorentz, ma sempre a meno o di una costante da determinare nel segno o di un parametro da specificare).²³

Einstein stesso ci dà tre prove ulteriori che la scelta della sua teoria è OP. La prima è il fatto che Einstein pone all'inizio del suo scritto del 1905 una discussione, basata su regoli e orologi, rivolta a recuperare il concetto di simultaneità e, al suo seguito, la nuova versione di tutti i vecchi concetti della fisica. Questa è una tipica discussione metodologica, nient'affatto un'assiomatica.

La seconda prova è data da quanto egli dice nei suoi scritti epistemologici. Egli ha suggerito che ci sono due tipi di teorie, quelle 'costruttive' (ad es. la meccanica statistica), che cioè partono da ipotesi a priori sulla costituzione della realtà (che così viene scomposta nei suoi elementi e poi ricomposta); e le teorie 'di principio', che cioè sono basate su un principio fenomenologico generale, ad es. la termodinamica, che ha il principio dell'impossibilità del moto perpetuo. E' chiaro che questa distinzione è una approssimazione di quella suddetta tra teorie OA e teorie OP; lo provano gli esempi dati da Einstein (anche se le sue parole definitorie sono ingannevoli).²⁴ Inoltre Einstein stesso dice che la RR è una 'teoria di principio' e non una teoria 'costruttiva'.²⁵

La terza prova la si trova ancora una volta nell'articolo del 1905. Einstein ha espresso i suoi problemi con frasi doppiamente negate, che non sono equivalenti alle affermazioni successive, cioè con le frasi tipiche della OP.²⁶

Concludiamo che *chiaramente la RR compie la scelta OP.*

Passiamo ora a studiare quale scelta della matematica viene compiuta dalla RR. Einstein non discute mai del tipo di matematica (benché in quegli stessi anni egli usasse tecniche matematiche discrete per trattare la meccanica statistica e l'effetto fotoelettrico). Comunque quella che egli usa per fondare la RR è di tipo solamente algebrico, non ha gradi di raffinatezza tali da includere implicitamente l'IA.²⁷

Inoltre la RR Einstein non è altro che il cambiamento del gruppo di invarianza delle equazioni fondamentali della dinamica: dal gruppo delle trasformazioni di Galilei a quello di Lorentz. Anzi, come è stato notato in ritardo, il gruppo è posto a fondamento della teoria.²⁸ Un lavoro precedente ha mostrato che in fisica classica i gruppi di simmetria costituiscono la tipica tecnica delle

²³ H. Mehlberg: "Relativity and the Atom", in G. Maxwell, P.K. Feyerabend (eds.): **Mind, Matter and Motion**, Minnesota U.P., 1966, 449-491, p. 452; M. Strauss: "Einstein's theories and the critics of Newton", *Synthèse*, **18** (1969) 251-284; **Modern Physics and its Philosophy**, Reidel, 1972, cap. 3.

²⁴ G. Esposito: op. cit.. Si potrebbe aggiungere che la RR è una teoria di 'principio' perché non dice nulla sulla natura della luce, che pure ne costituisce il fenomeno base (P.W. Bridgman: **A sophisticated primer in Relativity**, 1962).

²⁵ A. Einstein: **Idee ed Opinioni**, Schwartz, 1957, p. 17.

²⁶ Una analisi delle doppie negazioni nel lavoro originale di Einstein è stata presentata prima nel mio: "The option of the kind of organization of a theory in Einstein's special relativity", com. **4th Int. Conf. History of General Relativity**, Berlin, 1995, sia G. Esposito: op. cit.. Questo tipo di frasi è caratteristico delle logiche non classiche. Se nella RR la presenza della logica non classica non è stata rimarcata è perché le frasi non riguardano direttamente lo stato del sistema, così com'è nella meccanica quantistica.

²⁷ D'altronde il calcolo differenziale non ha alcun ruolo nella derivazione del gruppo di Lorentz; anche nel caso della invarianza delle equazioni di Maxwell si tratta di considerare delle derivate del primo ordine, che sono del tutto sostituibili con differenze finite. In effetti questo gruppo non è compatto ($v=c$ non è ammissibile fisicamente); quindi l'uso dei gruppi continui di Lie non è facile.

²⁸ Tra i vari, il già citato Weyl e E.P. Wigner: "Invariance in Physical Theory", *Proc. Am. Philos. Soc.*, **93** (1949) 521-526.

teorie OP&IP.²⁹ Allora questo è un altro argomento per dire che la RR, che si basa sulla teoria dei gruppi in maniera essenziale, avendo già la scelta OP, sceglie anche IP.³⁰

Quindi possiamo concludere che in totale la RR sceglie OP e IP.³¹

6. Le scelte possibili della geometria per la RR

Per essere più convincenti, per ora consideriamo solo la scelta OP. Chiediamoci: se la RR è una teoria OP, qual'è allora il suo principio metodologico? Chiaramente il principio $v < c$; anche storicamente esso è stato lo spunto iniziale della riflessione di Einstein. Esso ci dice che c è il limite massimo dei possibili valori della velocità di un corpo materiale e questo limite deve essere considerato universale per ogni sistema di riferimento. All'interno del rapporto fisica-matematica è del tutto naturale che questa costante universale sia espressa da una caratteristica fondamentale della geometria della nuova teoria.

I casi sono due. O questa costante va ad individuare una geometria in cui lo spazio è diviso da una regione limite, indicata da $v = c$; e questa è la geometria di Minkowsky; che è OP e IA. Oppure, dagli studi sulle altre due GNE sappiamo che una loro costante universale è il raggio di curvatura (non infinito). Allora c può essere collegato a questa grandezza fondamentale della geometria (che le fa da unità di misura delle sue distanze). E allora i casi possibili sono ancora due: o il raggio è finito e reale (geometria ellittica), ma allora i raggi luminosi, percorrendo dei circoli massimi, tornerebbero da dietro; il che è impossibile fisicamente (si ricordi inoltre che questa geometria è OA, il che non si accorda con l'OP della RR). Oppure il raggio di curvatura è finito, ma immaginario e la geometria è quella iperbolica; giusto la soluzione che apparve subito possibile con l'articolo di Sommerfeld del 1909.³²

Quindi l'aver seguito il principio metodologico $v < c$ ci ha porta ad una affermazione molto ragionevole, che include la soluzione usuale: delle quattro geometrie suddette solo due appaiono possibili per la RR, quella di Minkowsky, considerata usualmente, più quella iperbolica.

Storicamente la RR è stata associata da Minkowsky alla geometria pseudoeuclidea, la quale abbiamo visto essere caratterizzata dalle scelte OP&IA. Di fatto, così come ha sottolineato Poincaré, in questa geometria la distanza è

²⁹ A. Drago: "Una caratterizzazione del contrasto tra simmetrie ed equazioni differenziali", in A. Rossi (ed.): *Atti XIV e XV Congr. Naz. St. Fisica*, Conte, Lecce, 1996, 15-25.

³⁰ Solo dopo alcuni decenni qualcuno ha cercato di riformulare la RR con i soli numeri razionali (senza riuscirci completamente; E.L. Hill: "Discrete Theory of Discrete Momentum Space and Discrete Space-Time", *Phys. Rev.*, **100** (1955) 1780-3). La formulazione della RR in matematica costruttiva è oggi un problema aperto.

³¹ Riconosciute queste scelte, IP e OP, si possono suggerire facilmente le frasi, caratteristiche per la RR, che sono simili a quelle delle teorie alternative classiche, che sono IP ed OP: 1) "Evanescenza dello spazio assoluto" (oppure: "Evanescenza della materia in energia") che esprime soggettivamente il rifiuto rispettivamente dell'IA e dell'OA. 2) "Algebrizzazione dell'osservatore" (o "dei sistemi di riferimento") che traduce le scelte positive di IP (come scelta della matematica ridotta rispetto all'analisi infinitesimale) e di OP (come scelta di una organizzazione che il fisico; o più oggettivamente, il sistema di riferimento, dà alla realtà sperimentale). Assieme esse sottolineano bene il distacco della RR dalla meccanica classica e la sua novità. Esse traducono bene anche l'introduzione dei gruppi, la tecnica matematica che riguarda le trasformazioni tra sistemi di riferimento.

³² A. Sommerfeld: "Ueber die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten in der Relativtheorie", *Phys. Zeitfr.*, **10**, (1909), 826-829.

nulla per punti che non coincidono (quelli del cono luce): un fatto che non corrisponde ad alcuna operatività geometrica (se non a quella indiretta dell'interpretazione spazio-temporale); e quindi rappresenta una concezione idealista, giusto la sua scelta di IA. Inoltre, dal punto di vista fisico la geometria di Minkowsky compie un'operazione di distorsione: pone sullo stesso livello matematico formale lo spazio e il tempo (così come quantità di moto ed energia; e così via), benché questi concetti siano fisicamente del tutto differenti, anche nelle dimensioni (che pure sono a fondamento della fisica teorica e non sono state modificate dalla critica relativistica della meccanica newtoniana). Quindi il rapporto tra teoria fisica e geometria non è fedele, in ambedue i sensi. Non sorprende allora che in questa geometria gli eventi reali sono stati rappresentati da Minkowsky come immagini di un mondo "assoluto".³³

Notiamo ora che in questa geometria c'è la medesima scelta IA della teoria newtoniana; possiamo sospettare che questo legame fondazionale abbia permesso una continuità con la tradizione fondazionale di Newton. Infatti in essa erano primari i concetti di spazio e tempo (assoluti) e questi restano primari anche nella geometria di Minkowsky e anzi vengono omogeneizzati tra loro.

Come conseguenza storica si comprende allora l'atteggiamento sorprendente di Einstein; egli non dà rilevanza alla sua introduzione in RR di una matematica solo algebrica, attraverso quei gruppi di invarianza - solo una volta dice "gruppo"³⁴ - che sicuramente non rientrano nella matematica con IA di Newton. Anche gli scienziati contemporanei, che si riferiscono alla geometria di Minkowsky, che è con l'IA, non hanno fatto attenzione - al contrario della scelta OP che ha suscitato meraviglie e infinite discussioni -, alla scelta IP della RR e alla introduzione del gruppo di invarianza, come fondazione della teoria.

Come conseguenza teorica, si noti che in passato questa continuità ha indirizzato la ricerca a studiare tutta la teoria all'interno dello spazio-tempo. Il che ha portato a generalizzare la geometria euclidea e quella pseudoeuclidea nella geometria affine, dove la geometria euclidea e quella di Minkowsky sono facilmente traducibili tra loro mediante il cambiamento di una coordinata in immaginaria. Abbiamo già visto questa traducibilità matematica nelle tabelle 1 e 2; ma essa riguarda solo uno dei quattro passaggi matematici possibili tra le quattro geometrie; i quali comunque non danno nessuna continuità concettuale tra le due teorie.

7. La geometria iperbolica è la geometria più appropriata alla relatività ristretta

Ma se si considera l'altra possibile teoria geometrica, quella iperbolica, il porre lo spazio e il tempo come primari deve essere considerato come una deviazione del vero rapporto matematica e fisica. Il quale deve essere fondato sulla grandezza velocità; la quale è veramente fondamentale per la RR, sia perché la prima novità della RR è la insuperabilità di una velocità, quella della

³³ P. Galison: "Minkowsky's Space-Time: From Visual Thinking to the Absolute World", *Hist. St. Phys. Sci.*, **10** (1979) 85-121. Ne consegue anche un tempo concepito come esteso da - a + , sub specie aeternitatis, secondo un atteggiamento tipicamente idealista. E idealistico è il considerare l'orologio come un qualsiasi altro strumento di misura, quando esso invece simula una grandezza fisica (il tempo) mediante la variazione di un'altra particolare grandezza, questa sì reale; cioè misura una non-grandezza fisica.

³⁴ Nell'ultimo periodo che chiude la parte cinematica del suo scritto del 1905. In questo senso interpreto la critica di P.W. Bridgman ("Le teorie di Einstein e il punto di vista operativo", in A. Schilpp (ed.): **Albert Einstein, scienziato filosofo**, Boringhieri, Torino, 1955, 281-301) secondo cui la RR è una teoria pre-einsteiniana, per non aver portato a fondo la critica ai concetti fondazionali.

luce; sia perché la velocità, potendo essere ora considerata una grandezza adimensionale (v/c), costituisce il naturale collegamento tra fisica e matematica (così come abbiamo visto all'inizio del paragrafo precedente). Infatti per questo motivo in RR andiamo sempre a misurare, così come fa Einstein, le distanze spaziali percorse (con i regoli) assieme ai tempi di percorrenza (con gli orologi) cioè le due grandezze definenti la velocità.

Ponendo a fondamento della RR la velocità, risulta la versione di Sommerfeld della RR; ed essa è associata alla geometria iperbolica di Lobacevskij; la quale ha le scelte OP&IP, cioè le stesse scelte che caratterizzano la RR in generale, così come doveva essere per un buon legame tra matematica e fisica.

Come conseguenza teorica molto importante, notiamo che dal punto di vista fondazionale, per la RR la geometria iperbolica è addirittura più importante di quella pseudoeuclidea, al contrario di quanto si è comunemente pensato dal tempo di Minkowsky. È un fatto storico che lo stesso Lobacevskij, quando ha inventato la sua geometria, pensò subito ad una meccanica differente da quella newtoniana; e alcuni la svilupparono tentativamente.³⁵

Riepilogando: approfondendo il punto di vista di Poincaré e chiarendo quali sono i fondamenti della scienza e della geometria in particolare, abbiamo ottenuto un preciso legame tra RR e geometria; il che ci dà una ricostruzione storica della nascita di questo rapporto (Lobacevskij, Kotelnikov, Poincaré, Sommerfeld); questa ricostruzione è sostanzialmente nuova - benché sia stata anticipata e rivendicata dai russi.

Adesso possiamo notare che tutta la complicazione della usuale geometria della RR dipende dal fatto di voler a tutti i costi rappresentare il suo spazio come spazio delle posizioni; ma le sole posizioni sono insufficienti a rappresentare quella grandezza, la velocità, con cui avviene la novità essenziale della RR (v/c). Per rappresentare subito la velocità occorre concepire lo spazio aggiungendogli il tempo come quarta coordinata; ed allora occorre utilizzare la poco usuale metrica pseudoeuclidea, la quale non è affatto facile da trattare

Ma se interpretiamo, così come ha fatto Poincaré nel suo articolo fondatore della relatività,³⁶ il segno meno della metrica pseudoeuclidea come un i^2 , e quindi passiamo allo spazio complesso (la cui matematica diventerà abituale con la nascita della meccanica quantistica), facciamo diventare la metrica di nuovo euclidea:

ponendo $dx_4=icdt$, allora $ds^2+i^2c^2dt^2=0$, ovvero $dx_1^2=0$.

Allora la velocità di un punto (calcolata, per comodità, nel caso di una sola coordinata spaziale) è data da

$$v = \frac{dx}{dt} = ci \frac{dx}{d(ict)} = ci \frac{dx_1}{dx_4} = ci \tan \theta = c \tanh \theta$$

dove θ è l'angolo del rapporto incrementale e $\theta = i$ nello spazio di Minkowsky è l'angolo di rotazione rispetto all'asse coordinato. Si noti che ora lo spazio delle velocità è quello di Lobacevskij.³⁷

Ne seguono le formule usuali.³⁸ In particolare la formula della addizione delle velocità diventa una semplice addizione degli angoli della tangente iperbolica. Il che va molto bene per definire quel gruppo di invarianza che deve essere posto a fondamento della teoria; infatti così esso è un gruppo semplicemente additivo nel

³⁵ Kotelnikov, de Tilly, Ball, Killing. Ne danno notizia V. Kagan: **Lobatchevskii**, MIR, Moscou, 1970, pp. 379-380 e B. Rosenfeld: op. cit., 272-3. N.I: Lobacevskij parla del suo progetto di nuova meccanica nella "Prefazione" di: **Nuovi Principi della Geometria**, (1835-38), Boringhieri, 1964.

³⁶ H. Poincaré: "Sur la dynamique...", op. cit..

³⁷ Si veda ad es. B. Rosenfeld: op. cit., pp. 270-272.

³⁸ Si veda ad es. il W. Pauli: **Relatività**, Boringhieri, 1960, cap. 3.

parametro di definizione. In questo spazio iperbolico si possono esprimere anche le rotazioni del gruppo di Lorentz con la sola trigonometria.³⁹

Si noti che allora la matematica relativistica è la trigonometria; che è proprio quella matematica che dà un collegamento diretto tra le tre geometrie (euclidea, ellittica e iperbolica), un fatto che abbiamo già notato nel par. 3. Col che abbiamo verificato che la matematica della relatività ristretta in realtà non ha bisogno di più dell'IP.

8. Il recupero di una tradizione teorica meccanica preparatoria della RR

In questo modo risalta bene un fatto di grande importanza storica: la RR riduce la meccanica newtoniana ad una teoria tra le altre, non più il prototipo di tutte le teorie fisiche; proprio come la nascita delle GNE aveva fatto con la tradizione della geometria euclidea.

Allora possiamo volgere lo sguardo all'indietro e ora che abbiamo precisato la geometria più appropriata alla RR, possiamo ripercorrere la storia della meccanica alla luce delle due scelte IP e OP (cioè di quanto di più fondamentale questa teoria esprime) allo scopo di ricercare se ci sia stata una differente tradizione teorica che implicitamente abbia preparato la RR, facendo fiducia che già nel passato i fisici teorici abbiano intuito delle alternative alla meccanica newtoniana e che queste alternative siano state fondate sulle due scelte IP e OP della RR.

In effetti queste due scelte ci portano a scoprire una fisica alternativa a quella newtoniana. L. Carnot è il primo a teorizzare con precisione, a proposito della teoria meccanica, la opzione tra le due organizzazioni possibili della teoria, scegliendo poi quella OP.⁴⁰ Inoltre nella sua teoria meccanica le equazioni differenziali sono volutamente evitate e piuttosto L. Carnot è il primo ad introdurre formalmente i gruppi di invarianza nella fisica teorica, facendone la tecnica matematica basilare della sua teoria (50 anni prima di Galois e 125 anni prima di E. Noether). Più precisamente la sua equazione fondamentale è:

$$m_i U_i u_i = 0$$

dove m_i è la massa della i -esima particella componente del sistema in considerazione, U_i è la velocità perduta, cioè la differenza tra la velocità iniziale e quella finale e infine u_i è un moto geometrico (definito come moto invertibile), aggiunto al sistema per facilitare la soluzione dei problemi; nel caso che questo moto sia uniforme ed unico per ogni particella esso è proprio un cambiamento di sistema di riferimento inerziale.

Il tutto è dentro una matematica al più trigonometrica. Tutto ciò (salvo l'equazione) è proprio così come è nella RR. Infine i fenomeni di urto sono fondamentali per tutta la teoria (essi sono teorizzati da L. Carnot attraverso la formula suddetta, che è una generalizzazione del principio dei lavori virtuali;

³⁹ La copiosa letteratura in proposito può essere iniziata con la lettura di V. Majernik: "Representation of relativistic quantities by trigonometric functions", *Am. J. Phys.*, **54** (1986) 536-538; H. Yamasaki: "Extension of trigonometric and hyperbolic functions to vectorial arguments and its application to the representation of rotations of Lorentz transformations", *Found. Phys.*, **13** (1983) 1139-1154.

⁴⁰ L. Carnot: *Essai sur les machines en général*, Defay, Dijon, 1783, p. 104-105 (ed. critica it. a cura di S.D. Manno e A. Drago, CUEN, 1994); *Principes fondamentales de l'équilibre et du mouvement*, Deterville, Paris, 1803, p. XI-XVII. Si noti che L. Carnot ha rifondato anche la geometria e la analisi infinitesimale secondo una OP.

questa generalizzazione è differente da quella compiuta da Lagrange, così usata oggi, la quale è chiaramente basata su scelte diverse: IA e OP).⁴¹

Essa è iniziata sin dalla nascita della meccanica, con il programma lanciato da Leibniz per una "riforma della dinamica"; la quale per prima cosa voleva abolire lo spazio assoluto e il tempo assoluto per sostituirvi i concetti relativi, definiti per la prima volta da Leibniz in maniera precisa; e voleva basare la teoria sulla relatività del moto e sul concetto di energia invece che su quello di forza. Proprio ciò che più di duecento anni dopo ha dovuto riscoprire traumaticamente Einstein.⁴² Questo programma include i tentativi di teoria meccanica di Huygens, di Leibniz e di D'Alembert; e infine si completa con la meccanica di L. Carnot.⁴³ Di fatto tutte queste teorie sono chiaramente IP e OP.

Seguendo questa tradizione allora, pur di passare al gruppo di trasformazioni di Lorentz (passaggio che è suggerito dalla teoria dell'elettromagnetismo che è successiva a quella di L. Carnot) la fondazione della RR appare come la reale prosecuzione di una tradizione storica, invece che come opposizione e drastica rottura con tutta la storia della fisica precedente, come è avvenuto con Einstein.

Una prima prova di questa continuità è il fatto che in questa tradizione teorica possiamo trovare la geometria appropriata alla RR; essa non è quella euclidea (in accordo con quanto dicevamo in precedenza sul vero rapporto fisica-geometria). Infatti nell'800 de Tilly ha trovato che il principio cardine di questa tradizione, il principio dei lavori virtuali, è indipendente dal quinto postulato della geometria euclidea e quindi è compatibile anche con la geometria iperbolica.⁴⁴

In effetti anche la meccanica di L. Carnot lo è. Infatti nei fenomeni di urto, quelli che vengono posti alla base di questa meccanica, i vettori quantità di moto e velocità insistono in un dato punto comune; in tal caso la loro proiezione sugli assi ortogonali è la stessa nelle due geometrie che formano quella assoluta (mentre invece le differenze ci sono quando i vettori sono a distanza).⁴⁵ Poiché nell'equazione di L. Carnot si considerano solo (dei prodotti scalari tra) vettori applicati nello stesso punto, concludiamo che il gruppo delle trasformazioni di questa teoria è, come per il principio dei lavori virtuali, quello della geometria assoluta. Si noti che questo gruppo è più generale del gruppo euclideo, che, come

⁴¹ Purtroppo è andato perduto uno scritto di Lobacevskij sul principio dei lavori virtuali. con il quale egli partecipò ad un concorso della Accademia delle Scienze di Parigi (concorso vinto poi da Oersted con il resoconto delle sue famose esperienze). Data la impostazione teorica di Lobacevskij (rifondare la geometria - e l'analisi - sul finitismo, in uno spazio indipendente dal quinto postulato), si può ben ipotizzare che il suo studio di quel principio abbia voluto esprimere una formulazione alternativa della meccanica newtoniana.

⁴² Qualcuno (A. Chalmers: "Galilean Relativity and Galileo's Relativity", in S. French and H. Kamminga (eds.): **Correspondence, Invariance and Heuristic**, Kluwer Acad. P., 1993, 189-205) ha già notato che l'attribuzione delle trasformazioni relativistiche classiche a Galilei è impropria. Un altro (H.R. Brown: "Correspondence, Invariance and Heuristic in the Emergence of Special Relativity", in S. French and H. Kamminga (eds.): op. cit., 227-260) ha inventato la "favola" di Keinstein, il quale nel 1705 aveva fondato relativisticamente la meccanica classica. In realtà questo Keinstein è esistito davvero e non è altri che Leibniz: pur inventore riconosciuto dell'analisi e anticipatore della logica matematica moderna, egli è stato l'innominato della storia della meccanica.

⁴³ Sul legame L. Carnot-Leibniz-d'Alembert si veda A. Drago e A. La Sala: "La meccanica di Leibniz ricostruita come coerente alternativa alla meccanica di Newton", in P. Tucci (ed.): **Atti XVI Conv. Naz. Storia Fisica e dell'Astronomia**, Milano, 1997, 383-402.

⁴⁴ J.-M. de Tilly: **Études de Mécanique Abstraite**, Mémoires Acad. Roy. Belgique, 1870, pp. 79ss.

⁴⁵ I. Adler: op. cit., pp. 253-257.

quello pseudoeuclideo (geometria di Minkowsky), è un sottogruppo di quello affine; il quale a sua volta, assieme a quello iperbolico e quello ellittico sono restrizioni di quello proiettivo. Quindi è un errore pensare che la gerarchia dei gruppi corrispondenti alle geometrie ponga la geometria pseudoeuclidea come la più generale delle GNE; invece la iperbolica è più generale sia di quella euclidea che di quella pseudoeuclidea (cioè della geometria dello spazio-tempo di Minkowsky).

Quindi, andando oltre la sola conoscenza della tradizione della sola meccanica di Newton, riconosciamo che non è vero che la meccanica classica non può non avere il gruppo di trasformazione euclideo; già nell'800 la tradizione teorica meccanica di cui sopra, in particolare la meccanica di L. Carnot, poteva essere considerata come la più generale fondazione della meccanica, perché il suo gruppo di trasformazioni era il più generale (il che conferma quanto si diceva all'inizio del par. 7).⁴⁶

Una seconda prova di questa continuità teorica è il fatto, che come è ben noto, il principio di corrispondenza riporta la RR ad una teoria meccanica che è della sola interazione a contatto;⁴⁷ giusto quella interazione che presiede la tradizione teorica meccanica di Leibniz-L. Carnot. Inoltre in RR la accelerazione, ignorata da L. Carnot, non è invariante né corrisponde alla derivata della velocità; infine la forza newtoniana, notoriamente criticata in modo magistrale da L. Carnot,⁴⁸ non è un invariante; piuttosto sono fondamentali le grandezze quantità di moto ed energia, proprio quelle che sono basilari nella meccanica di L. Carnot.

Ne concludiamo che nella fisica classica c'era una teoria meccanica che ben prima di Mach e di Einstein aveva già espresso con pienezza una fondazione relativistica della teoria mediante molti di quei concetti basilari che in questo secolo sono rinati con la RR; per di più essa aveva un gruppo di invarianza più ampio di quello euclideo. Ma è stata oscurata per quasi 200 anni.⁴⁹

9. Riformulazione IP e OP della RR secondo Lévy-Leblond

Adesso che conosciamo le scelte fondamentali della RR e la sua geometria più appropriata, possiamo trovare delle riformulazioni della RR che la sviluppino nella maniera più coerente e lineare. Qui indico una riformulazione della RR secondo le due scelte IP e OP, la quale esiste già nella letteratura; il suo autore l'ha presentata come "didattica", solo perché egli non sapeva qualificarla in termini fondazionali.⁵⁰

⁴⁶ Questa formulazione della meccanica è rimasta sconosciuta a Kotelnikov e a de Tilly, come pure agli studiosi successivi della RR nello spazio iperbolico: V. Varicak: **Darstellung der Relativitätstheorie in dreidimensionalen Lobatschewskische Raume**, Zagreb, 1924; N.A. Cernikov: **Lectures on Lobachevskian Geometry and the Theory of Relativity**, (in russo) Novosibirsk, Nauka, 1965; V. Dubrovskii et al. (eds.): **The Relativistic World**, MIR, Moscow, 1984. Solo de Tilly fa attenzione alla meccanica dell'urto, riconoscendola come assoluta (p. 96), ma la attribuisce a D'Alembert, che noi sappiamo che non la esprimeva correttamente; v. T. Hankins: **Jean d'Alembert. Science and Enlightenment**, Claredon, 1970..

⁴⁷ H. Goldstein: **Classical Mechanics**, Addison Wesley, New York, 1980, p. 332.

⁴⁸ L. Brunschvig: **La Connaissance Humaine et la Causalité Physique**, Alcan, Paris, 1922, pp. 250-1; M. Jammer: **Concept of Force**, Harvard, 1957, p. 215. Per le considerazioni sui concetti relativistici si veda P. French: **Special Relativity**, Norton & Co., New York, 1968.

⁴⁹ La prima opera che ne ha trattato diffusamente è quella autorevole di C.C. Gillispie: **Lazare Carnot Savant**, Princeton U.P., Princeton, 1971.

⁵⁰ J.-M. Lévy-Leblond: "What is so "special" about "Relativity"", in A. Jenner (ed.): **Group Theoretical Method**, Springer LNP no. 50, Berlin, 1976, 617-627.

Questa teoria è OP perché all'inizio pone un problema cruciale e universale: quello di come estendere il gruppo di invarianza euclidea, ma mantenendo le classiche conservazioni, quelle dell'energia e della quantità di moto (che sono tipiche della meccanica di L. Carnot). Questo problema, così come avviene sempre in una OP, può venire espresso con una frase doppiamente negata: "E' impossibile che le conservazioni classiche vengano cambiate dall'estendere la teoria meccanica." (il che non significa "restino uguali", perché, perché la verifica sperimentale completa di ciò è impossibile). Il problema viene risolto introducendo (come "variabili ausiliarie", direbbe L. Carnot⁵¹) i sistemi di riferimento. Dati due di essi, allora si ha

$$\begin{aligned} E(v_k) - E(v_l') &= 0 & p(v_k) - p(v_l') &= 0 \\ E(v_k + u) - E(v_l' + u) &= 0 & p(v_k + u) - p(v_l' + u) &= 0 \end{aligned}$$

con u la velocità del sistema di riferimento in moto. E' chiaro che però, nel passaggio alla RR dovremo modificare le definizioni di energia e quantità di moto.

Supponiamo inoltre che, come avviene quasi sempre in fisica teorica, le due funzioni siano analitiche. Ma allora avremmo infiniti invarianti, tanti quanti sono i termini dello sviluppo in serie di Taylor; a meno che non leghiamo tra loro le derivate della serie. La maniera più semplice è quella di imporre

$$\frac{dE}{dv} = kp \quad \frac{dp}{dv} = kE$$

e così restare con solo due invarianti, così come è nel caso della meccanica classica. Ma allora derivando una seconda volta le relazioni precedenti danno luogo a una equazione differenziale del second'ordine, le cui soluzioni sono:

$$E = E_o \cosh(kv) \quad p = p_o \sinh(kv).$$

Fu il principio dell'impossibilità del moto perpetuo, il principio tipico di gran parte delle teorie fisiche OP, che suggerì ad Einstein che c è una velocità limite. Con essa possiamo cambiare le notazioni così: $k=1/c$, $E_o=m_o c^2$ e soprattutto $v=c$; arriviamo allora alla relazione $v=ctangh$, con la rapidità.

E' chiaro che queste formule, essendo formule solo nelle velocità, danno luogo allo spazio della geometria iperbolica, cioè quella geometria che sappiamo essere IP e OP.

Che questa formulazione sia IP appare evidente dal formalismo matematico elementare (salvo le equazioni differenziali, che però possono essere considerate senza problemi come equazioni alle differenze finite). Anzi, il campo dei numeri definiti dalla conservazione classica dell'energia è quello euclideo (gli irrazionali sono al più radici quadrate); che è lo stesso campo definito dalle formule del gruppo di Lorentz. In questo campo è possibile, come in ogni campo, definire sia le operazioni di derivazione che lo sviluppo in serie di Taylor. La precedente soluzione dell'equazione differenziale aggiunge il campo degli esponenziali, che è sempre un campo molto ridotto rispetto a quello dei reali classici; in particolare è costruttivo. Quindi il tutto è sicuramente dentro la matematica costruttiva, quella che sceglie l'IP; così come doveva essere.

Anche la formulazione di W.C. Davidon: "Consequences of the inertial equivalence of energy", *Found. Phys.*, 5 (1975) 525-541, si presterebbe allo stesso scopo, ma è meno diretta. J. Ehlers: "Relations between Galilei-invariant and Lorentzinvariant theories of collisions", in D. Mayr and G. Suessmann (eds.): **Space, Time and Mechanics**, Reidel, 1983, 21-37, espone una rifondazione della RR in continuità con la teoria classica dell'urto, però in uno spazio affine, che qui costituisce una ipotesi restrittiva rispetto allo spazio iperbolico.

⁵¹ L. Carnot: "Note" in *Réflexions sur la métaphysique de l'analyse infinitésimale*, Courcier, Paris, 1813, pp. 217-252.

10. Ulteriore verifica: riformulazione "minima" della RR

Compriamo ora una ulteriore verifica, a livello più generale, quello delle quattro geometrie e delle operazioni per la loro traduzione.

Notiamo che la riformulazione di Lévy Leblond è interpretabile mediante la tabella 1 (o anche la 2): dovendosi passare dalle scelte IA&OA a quelle IP&OP si tratta di compiere un passaggio al limite e un passaggio agli immaginari. In effetti in quella riformulazione noi ritroviamo il passaggio al limite nello sviluppo in serie di Taylor e la relativa restrizione; mentre il passaggio agli immaginari avviene nella soluzione dell'equazione differenziale che dà le funzioni iperboliche.

Avendo compreso quale sia la tecnica che sta alla base della precedente riformulazione, allora possiamo applicarla in una maniera ancor più diretta e semplice, per ottenere una nuova riformulazione. Essendo OP essa è euristica, cioè, nel linguaggio corrente, "didattica"; il lettore quindi la troverà suggestiva solo nella misura in cui darà importanza all'OP di una teoria. Inoltre essa risulta essere la più ridotta possibile (ad es. essa considera solo una grandezza fisica), tanto da essere qualificabile come "minimale".

Lo spazio newtoniano è essenzialmente lo spazio delle traiettorie. Delle due operazioni per passare da IA&OA ad IP&OP, utilizziamo prima quella del passaggio al limite. Appliciamolo su queste traiettorie; ci dà la velocità, la grandezza cruciale della RR. Per semplicità mi limito alla velocità unilineare.

La definizione di velocità nello spazio orario presenta una funzione trigonometrica:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{dt} = v \tan$$

Questo ci va molto bene perché sappiamo che la trigonometria è una teoria matematica molto importante in RR e nelle GNE, (ad es., c'è una coincidenza tra la trigonometria sferica euclidea, IA&OA, e quella iperbolica, IP&OP, salvo il passaggio all'immaginario). Se in più imponiamo il principio della insuperabilità della velocità della luce (il che può essere introdotto con l'indicazione già sfruttata nella formulazione precedente) possiamo scriverla così, in funzione della velocità c :

$$\frac{\bar{v}}{c} = \frac{1}{c} \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{v}{c} \tan$$

Da questa formula classica passiamo alla RR quando compiamo la seconda operazione, il passaggio all'immaginario. Per cui otteniamo:

$$\frac{\bar{v}}{c} = \frac{1}{c} \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{v}{c} \tan i = \frac{v}{c} \tanh$$

Si tratta ora di interpretare l'angolo i . Un articolo di Levy Leblond⁵² precisa le tre maniere di definire la velocità quando il sistema di riferimento è in moto e la velocità della luce abbia c come limite. Allora i risulta essere la rapidità.

Adesso è facile trovare che la composizione delle velocità di due sistemi di riferimento è espressa dalla \tanh della somma delle rapidità. Il che ci dà il gruppo additivo delle trasformazioni della teoria, il gruppo di Lorentz. Dopodiché è facile ricavare le trasformazioni di ogni altra grandezza.

Con ciò abbiamo verificato che la struttura della tab. 1 (e della tab. 2) effettivamente indica i percorsi mentali fondamentali che sono possibili nel passaggio dalla meccanica newtoniana alla RR.

Un'ulteriore prova può venire dalla maniera con cui Einstein stesso è passato dalla meccanica newtoniana a quella relativistica.⁵³ Esaminando il suo scritto si

⁵² J.-M. Lévy-Leblond: "Speed(s)", *Am. J. Phys.*, **48** (1980) 345-347.

⁵³ A. Einstein: "Zur elektrodynamik bewegter körper", *Ann. der Phys.*, **17** (1905) 891-921 (una trad. italiana si trova in: A. Einstein: *Opere scelte* (a cura di E. Bellone) Boringhieri, 1988)

nota che egli parte dalla limitazione delle velocità con quella della luce; un aspetto più intuitivo che propriamente fondazionale; però poi compie proprio le due operazioni suddette: passa a stabilire delle relazioni differenziali, che costituiscono il passaggio al limite; e dopo risolve delle equazioni algebriche, dando per sottinteso che la soluzione sia quella positiva (in termini fisici, ignorando le retroazioni, il che è basato sul principio di causalità); il che è uno scegliere tra reali e immaginari. Ciò dimostra che egli ha ragionato a livello di scelte fondamentali, sia pur inconsciente. Lo stesso non può essere affermato per Poincaré, perché questi nel suo scritto del 1905 sulla relatività prende il gruppo di Lorentz come già conosciuto.

11. Conclusioni storiografiche

Sia Kuhn che Feyerabend, suggerendo il concetto di incommensurabilità delle teorie scientifiche, hanno proposto il caso della RR come esemplare per questo fenomeno, indicando in più alcuni concetti (spazio, tempo, massa) che di conseguenza subiscono delle variazioni radicali di significato. Però non hanno saputo precisare la nozione di incommensurabilità né hanno saputo ricavarne una migliore comprensione della RR. Ho precisato nel 1986 il concetto di incommensurabilità, come dovuto alla variazione in almeno una delle due scelte fondamentali.⁵⁴

Questo scritto, benché includa elementi semi-formali, ha rivalorizzato, per prima cosa, la tesi di Poincaré, che c'è una struttura-base di quattro geometrie. Con queste geometrie sono state trovate due operazioni matematiche che esprimono i passaggi tra di loro. Inoltre, a livello scintifico-filosofico, sono state ritrovate le due scelte fondamentali di una teoria scientifica e ognuna delle quattro geometrie è stata caratterizzata da una precisa e distinta coppia di scelte. Per cui ogni geometria caratterizzata da una coppia di scelte è incommensurabile con una geometria caratterizzata da un'altra coppia di scelte.

Le due operazioni matematiche possono essere intese come operazioni di traduzione; ma intendendo "traduzione" in modo molto particolare, perché occorre tener presente che essa avviene su particolari grandezze e sotto particolari condizioni; e comunque la loro rigidità matematica impedisce che le strutture concettuali delle geometrie si traducano completamente.

Con ciò si può sostenere che i principi di corrispondenza in fisica teorica non sono affatto dei superamenti delle incommensurabilità tra teorie, ma anzi ne sono la loro espressione matematica; così come hanno concluso le analisi approfondite che ne hanno notato delle essenziali insufficienze.⁵⁵

Tutto quanto detto in precedenza offre la maggiore evidenza, ottenuta finora, della esistenza di un fenomeno di incommensurabilità storica tra le teorie matematiche che fisiche e ne precisa il significato (anche indipendentemente dalla mia definizione).

Questo concetto di incommensurabilità e le due operazioni di traduzione (parziale!) tra teorie caratterizzano una metateoria sia della teoria geometrica che della teoria meccanica (e della RR); così da ristabilire un preciso legame metateorico tra una teoria fisica e una geometria: all'inizio del 1900 la fisica teorica, per progredire, è stata costretta ad accettare una evidente incommensurabilità della nuova teoria RR con la tradizione dominante in fisica teorica, quella newtoniana. In questo senso la RR ha avuto un ruolo storico analogo a quello che ha avuto, nella successiva storia della matematica, il

⁵⁴ A. Drago: "Una definizione precisa di incommensurabilità delle teorie scientifiche, in F. Bevilacqua (ed.): *Atti VII Congr. Naz. Storia Fisica*, Padova (1986), 119-123.

⁵⁵ D. Greenberger: "What is the proper role of classical physics? Reversing the correspondence principle", in A. Shimony e H. Feshbach (eds.): *Physics as Natural Philosophy*, MIT, 1981, 178-203.

teorema di Goedel: l'uscita dalla esclusività della OA⁵⁶ e l'introduzione delle incommensurabilità tra teorie.

Come naturale conseguenza sono avvenuti (fino agli anni '50; vedasi Q. Majorana) tutti i fenomeni storici e teorici dovuti alla incommensurabilità: discussioni omeriche sulle variazioni radicali di significato dei concetti basilari, divisioni e incomprensione nella comunità degli scienziati, loro parziale incomunicabilità, parziale intraducibilità dei loro linguaggi; e infine, l'equivoco su quale geometria si dovesse scegliere (la Minkowsky o la iperbolica?).⁵⁷

La grandezza di Einstein, per cui egli merita l'attribuzione di una teoria, che purtuttavia era stata largamente anticipata da Poincaré, sta nel fatto che egli ragiona all'interno di un pluralismo di fondazioni possibili, ponendosi al livello della metateoria fisica, giusto quel livello in cui sono da prendere in considerazione le incommensurabilità.⁵⁸ Qui egli ha posto il problema della "incompatibilità" dei due principi e poi della loro "conciliazione" - una parola inaudita da parte di un fisico teorico, se riferita al rapporto tra teorie e non al rapporto di una ipotesi con i dati sperimentali. Avendo ragionato a questo livello, egli ha saputo affrontare un conflitto teorico inedito per la tradizione della fisica teorica e ha saputo risolverlo (sia pure parzialmente, perché è rimasto legato allo spazio-tempo newtoniano). Invece Poincaré., che pure è stato più chiaro nel dividere le teorie classiche in due gruppi differenti, ha solamente discusso della generale crisi dei principi delle teorie fisiche, prospettando poi un cambiamento degli stessi secondo le vecchie modalità della fisica matematica.⁵⁹

⁵⁶ E.W. Beth: "Fundamental features of contemporary theories of Science", *Brit. J. Phil. Sci.*, 1 (1950) 291-302, p. 302; J. van Heijenoort: "Goedel's Theorem", in *Encyclopedia of Philosophy*, 3, Mac Millan, 1967, 348-347, p. 356. Più in generale, si veda il mio "Is Goedel's ..", op. cit..

⁵⁷ Hanno sottolineato le ambiguità e confusioni concettuali dovute alla usuale RR gli autori della nota 22.

⁵⁸ Ha colto questo aspetto solo T. Irosighe: "The ether problem, the mechanistic Worldview and the origin of Relativity theory", *Hist. St. Phys. St.*, 7 (1976) 4-81, p. 57.

⁵⁹ : H. Poincaré: "The principles of Mathematical Physics" (1904) in P.L. Williams (ed.): *Relativity Theory*, J. Wiley, New York, 1968, 39-49.
