Introduzione al caos: un po' di storia ed uno slalom tra ordine e complessità

Angelo **VULPIANI**

Dipartimento di Fisica, Università Sapienza, Roma,
<angelo.vulpiani@roma1.infn.it>

Covid time, 2021

Cosa aspettarsi da questa conferenza?

• *Lo scopo di una conferenza non è tanto quello di fornire soluzioni pronte dei problemi, quanto porre i problemi e dare lo stimolo per la loro risoluzione.*
(**Ludwig Boltzmann**)

• *Non solo nel campo della ricerca ma anche nel mondo quotidiano della politica e dell'economia staremmo tutti di gran lunga meglio se più persone capissero che semplici sistemi non lineari non possiedono necessariamente semplici proprietà dinamiche.*
(**Robert May**)

• *Quando il gioco si fà duro.... i duri cominciano a giocare.*
(**John B. Blutarsky**)

Caos, un concetto ormai di moda e spesso frainteso: FARFALLE DISPETTOSE e/o CRIMINALI

Il CAOS al CINEMA

Versione cinematografica di John von Neumann secondo il matematico Ian Malcom in Jurassic Park

I computer vennero costruiti verso la fine degli anni 40, perché matematici come John von Neumann, il massimo matematico della sua generazione, pensavano che avendo a disposizione una macchina capace di gestire contemporaneamente molte variabili, si sarebbe stati in grado di fare previsioni meteorologiche.
[....] La teoria del caos manda all' aria tutto questo, non si può prevedere il tempo se non per pochi giorni.
[....] Tutto il denaro speso per previsioni meteorologiche lungo termine, circa mezzo miliardo di dollari negli ultimi decenni, è buttato via. È un' impresa vana quanto cercare di trasformare il piombo in oro. Oggi gli sforzi degli alchimisti ci fanno ridere, ma generazioni future guarderanno noi e rideranno nello stesso modo.

Notevole confusione di concetti e svariate idee errate

Persistente confusione su alcuni concetti delicati:
* *Determinismo*
* *Previsioni*
* *Probabilità*
* *Complessità*

* Caos = *scienza nata negli anni 60 del 20-mo secolo*.
* Caos = *terza grande rivoluzione scientifica del novecento*, dopo la relatività e la meccanica quantistica.
* Caos = *nuova disciplina in contrasto con la scienza ufficiale*.
* Caos = *limite intrinseco della scienza* che non è capace di fare previsioni.

* Caos = *fascinazione dell' aleatorio* e sintomo di un' attitudine antiscientifica.

Il Problema a livello concettuale

Poincaré si domandava (retoricamente?):
Perché molte persone trovano del tutto naturale pregare per avere la pioggia o il sereno, mentre giudicherebbero ridicolo invocare un'eclisse con la preghiera?

Se osserviamo il mondo che ci circonda notiamo che esistono fenomeni regolari e prevedibili, come il susseguirsi del giorno e della notte, l'alternarsi delle stagioni e le eclissi che sono calcolate dagli astronomi con grande anticipo e precisione.

Ci sono però anche fenomeni, a differenza delle eclissi ed i corpi che cadono, che non sembrano affatto facili da capire e predire, ad esempio il tempo meteorologico.
Inoltre quando abbiamo a che fare con giochi come i dadi, la roulette, il lotto e così via, invece di parlare di leggi usiamo termini come caso, aleatorietà, probabilità.

Il caos ed i sistemi dinamici hanno una lunga storia...

• Uno dei pochi articoli storici sul caos:
D. Aubin and A.D. Dalmedico *Writing the History of Dynamical Systems and Chaos: Longue Durée and Revolution, Disciplines and Cultures* Historia Mathematica **29**, 273 (2002)

Una veloce carrellata (sicuramente incompleta)

• **Galileo, Newton**: leggi della dinamica
• fine 18-mo secolo, inizio 19-mo secolo
Laplace: equazioni della meccanica per (cercare di) dimostrare la stabilitá del sistema solare, l'idea di determinismo

• 1884 **Boltzmann**: ipotesi ergodica sulla connessione tra dinamica e statistica

• 1890 **Poincaré**: caos nel problema dei 3 corpi

• fine 19-mo secolo, inizio 20-mo secolo
Poincaré, Lyapunov, scuola russa: stabilitá, analisi qualitativa delle equazioni differenziali

• anni 20-30 del 20-mo secolo
Wiener, van der Pol, Bogolyubov, Lotka, Volterra: teoria del controllo, oscillazioni non lineari, modelli per l'ecologia

• anni 30 del 20-mo secolo
von Neumann, Birkhoff, Krylov: teoria ergodica, meccanica statistica ed instabilitá

• fine anni 40, anni 50 del 20-mo secolo
Shannon, Kolmogorov, scuola sovietica: teoria dell'informazione

• 1955 **Femi et al**: FPU(T) primo esperimento numerico moderno che mostra come certe idee sulla connessione tra dinamica e meccanica statistica erano infondate

• 1954 – 1962 **Kolmogorov, Arnold, Moser**: teorema KAM per i sistemi hamiltoniani quasi integrabili

• anni 60 del 20-mo secolo
Lorenz, Hénon, Chirikov: (ri)scoperta del caos (fluidodinamica, astronomia, acceleratori di particelle, etc)
• 1972 **Ruelle, Takens**: generazione delle turbolenza, attrattori strani

• fine 20-mo secolo, inizio 21-mo secolo
Feigenbaum: raddoppio di periodo
Takens: ricostruzione dello spazio delle fasi
Benettin, Galgani, Giorgilli et al: metodi per gli esponenti di Lypaunov
Gollub, Giglio et al: esperimenti sulle celle convettive
Grassberger, Procaccia: metodi per il calcolo delle dimensioni "frattali"
Laskar et al: caos nel sistema solare
Sinai, Bowen, Ruelle et al: descrizione termodinamica del caos
Vari et al : mappe a tempi discreti, sistemi estesi, grandi deviazioni, simulazioni, connessione con la teoria della complessitá, caos quantistico

Galileo GALILEI (1564- 1642)

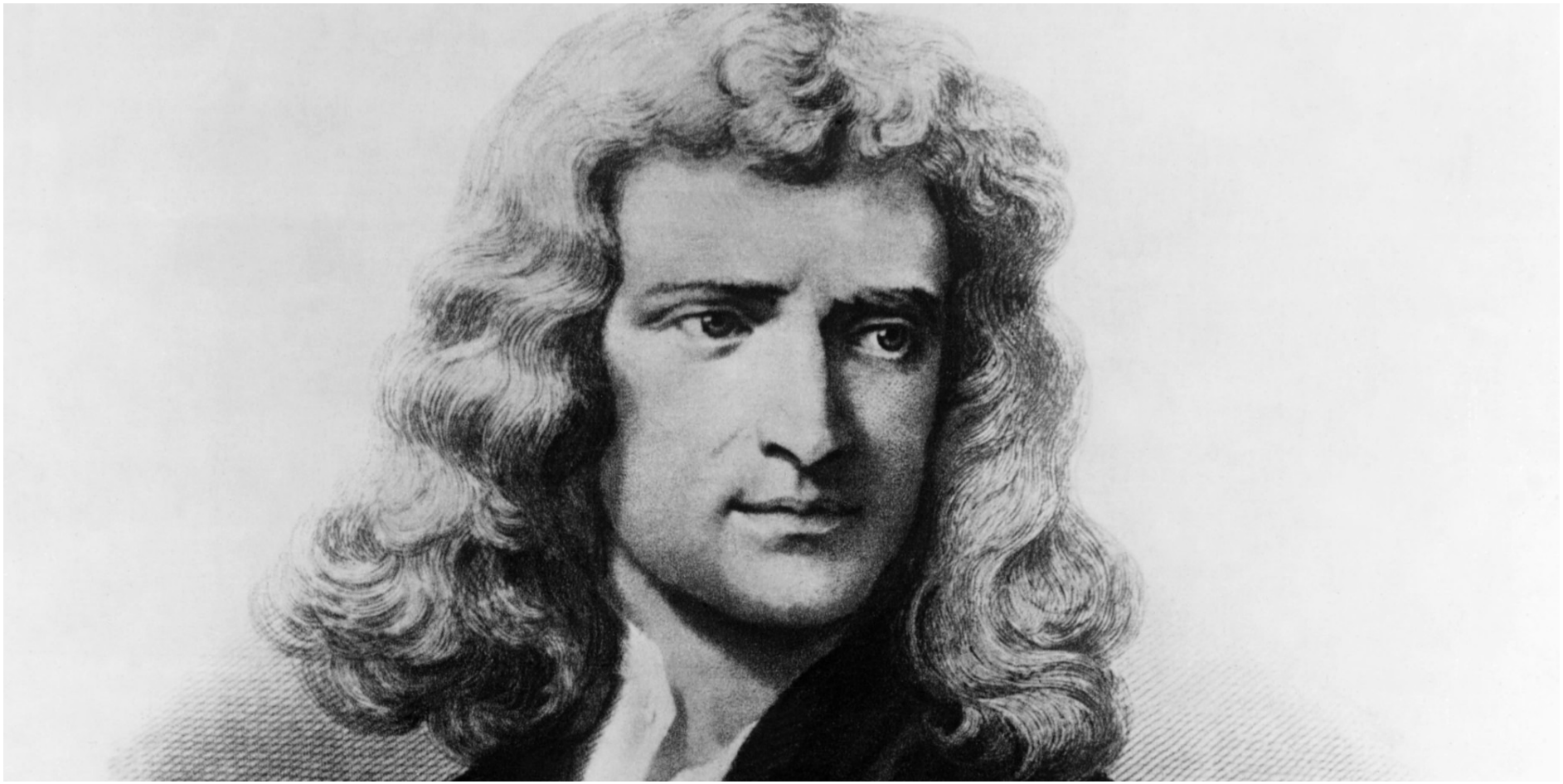
Per capire il mondo intorno a noi dobbiamo usare la Matematica e

DIFALCARE GLI IMPEDIMENTI

cioè concentrarsi su problemi ("semplici") dopo averne identificato gli aspetti essenziali.

Isaac NEWTON (1642- 1727)

Le mele, la Luna e i Pianeti sono soggetti alle stesse leggi:
la meccanica e la forza gravitazionale.



Meccanicismo e Determinismo

La famosa intelligenza matematica di Laplace

Dobbiamo dunque considerare lo stato presente dell' universo come effetto del suo stato anteriore e come causa del suo stato futuro. Un' intelligenza che, per un dato istante, conoscesse tutte le forze di cui è animata la natura e le posizioni rispettiva degli esseri che la compongono, se per di più fosse abbastanza profonda per sottomettere questi dati all' analisi, abbraccerebbe nella stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e dell'atomo più leggero: nulla sarebbe incerto per essa e l'avvenire, come il passato, sarebbe presente ai suoi occhi.

Anche se sembra strano questo manifesto del determinismo è nell' introduzione del **Saggio Filosofico sulle Probabilità**.

Il marchese Pierre Simon LAPLACE (1749 - 1827)

Laplace credeva di aver dimostrato la stabilitá del sistema solare (in realtá il suo risultato ha una validitá limitata), ed è spesso considerato il gran patron del determinismo, ma ha dato grandi contributi anche alla teoria delle probabilità.

Il determinismo in azione

* **Sistema deterministico:** Esiste una regola di evoluzione, non necessariamente esplicita, che dato lo stato al tempo iniziale $\mathbf{x}(0)$, determina univocamente lo stato ad ogni tempo futuro $\mathbf{x}(t)$.
* Un esempio: **La seconda legge di Newton della meccanica**

$$Forza = Massa \times accelerazione$$

Il caso da manuale è l'oscillatore armonico (una pallina sotto l'azione di una molla)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

l' evoluzione è determinata da $x(0)$ e $v(0)$ (posizione e velocità iniziali)

$$x(t) = x(0)cos(\omega t) + \frac{v(0)}{\omega}sin(\omega t) \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \ .$$

ATTENZIONE!

A volte il termine determinismo è usato in psicologia e sociologia con un' accezione negativa: in un mondo deterministico non ci sarebbe libero arbitrio e saremmo dei meri automi che recitano un copione prestabilito.

Esiste una **persistente confusione tra determinismo e previsione**; su questo punto ad esempio **Popper aveva un'opinione errata**, infatti indicava come deterministico un sistema la cui evoluzione può essere predetta con precisione arbitraria.

Il determinismo è una proprietà intrinseca (ontica dicono i filosofi), mentre la previsione dipende anche dalle nostre capacità.
Determinism is ontic, determinability is epistemic
(H. Atmanspacher, 2002)

Il computer non può risolvere tutti i problemi

Ovviamente non esiste nessun matematico infinitamente bravo e, a parte casi particolari, non è possibile trovare esplicitamente l'evoluzione temporale di un sistema.
A prima vista niente sembrerebbe contrario all'idea che si possa trovare la soluzione (o almeno una buona approssimazione) di ogni equazione con calcoli più o meno difficili.

Si potrebbe sperare che un supercomputer possa aiutarci a creare un super matematico (o qualcosa di simile) capace di fare previsioni con la precisione desiderata.
Negli anni cinquanta anche il grande John von Neumann ne era convinto, pensava sarebbe stato possibile prevedere, ed addirittura controllare il clima, ma si sbagliava..... non sapeva del caos!

Grandi successi della meccanica di Newton

L' approccio meccanicistico sembrò trovare conferme sistematiche in astronomia, raggiungendo precisioni altissime nell' accordo tra il calcolo teorico e le osservazioni.
Uno dei successi più clamorosi fu, nel XIX secolo, la **scoperta del pianeta Nettuno**.
Una serie di osservazioni indicava un considerevole scostamento del moto di Urano dalle posizioni previste dalla meccanica newtoniana. Ipotizzando che tale discrepanza non fosse dovuta ad una manchevolezza della teoria di Newton, bensì alla presenza di un pianeta sconosciuto, utilizzando le leggi della dinamica e la legge di gravitazione fu calcolata la posizione di questo ipotetico pianeta che venne poco dopo osservato al telescopio.

Ombre sul meccanicismo Laplaciano

Il mondo è pieno di fenomeni che appaiono decisamente irregolari, basti pensare all' atmosfera ed alle correnti marine.
Nell' impostazione meccanicistica tradizionale questa irregolarità è pensata come solo "apparente", cioè dovuta ad un numero molto grande di cause ognuna delle quali è però semplice.

Questo modo di interpretare i fenomeni irregolari, che possiamo chiamare filosofia del "mattone elementare semplice", è stato sostanzialmente accettato fino a pochi decenni or sono.
In questa impostazione, che possiamo chiamare riduzionista, il tutto è la somma delle sue parti.
Questo approccio ha portato a grandi risultati, in particolare nella fisica delle particelle elementari e più in generale nella fisica microscopica.

UN APPROCCIO PRAGMATICO

Esistano due tipi di leggi completamente diverse: **deterministiche** per i sistemi "semplici" e **probabilistiche** per i sistemi "irregolari".

* Nei sistemi deterministici c' è una regola di evoluzione: lo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$, determina univocamente lo stato futuro $\mathbf{x}(t)$.
ESEMPIO: la caduta di un grave sotto l'azione della gravità, lasciandolo cadere da un'altezza h tocca terra dopo un tempo $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

* I sistemi con comportamento "irregolare" retti da **regole stocastiche**
ESEMPIO: puntando sistematicamente 1 euro sull'uscita di un numero alla roulette, se x_0 è il capitale iniziale allora dopo t giocate il capitale il tasca (o il debito) sarà $x_t = x_0 + \delta_1 + \delta_2 + ... + \delta_t$ ove $\delta_j = 35$ se è uscito il numero (con probabilità $1/37$), oppure $\delta_j = -1$ se non è uscito (con probabilità $36/37$). Le $\{\delta_j\}$ sono variabili aleatorie indipendenti (se la roulette non è truccata).

Polvere sotto il tappeto?

Si potrebbe notare che le palline delle roulette, obbediscono alle leggi della meccanica di Newton, proprio come i sassi che cadono ed i corpi celesti.

Il famoso dialogo di Democrito tra i Sensi e la Ragione potrebbe essere rifrasato per confrontare due posizioni diverse ed opposte sul caso.

Dice il **Determinista**:
Solo in apparenza c'è il caso, solo in apparenza il numero 27 alla roulette esce per motivi aleatori; in realtà esistono solo le leggi deterministiche della meccanica di Newton, il 27 è uscito perché la pallina è stata lanciata con una certa velocità ed un certo angolo, non poteva fare altrimenti.

Risponde il **Probabilista**:
Sei un ingenuo! tu credi che da leggi certe non possa che venire l'ordine; sei in errore: il determinismo non esclude il caso, tuttavia l'aleatorio può portare alla certezza.

Abbandonare la meccanica classica per quella quantistica?

Si potrebbe pensare che tutto ciò sia un problema non particolarmente interessante in quanto ora sappiamo che la meccanica di Newton è solo una descrizione approssimata e la natura è regolata della **Meccanica Quantistica**.

Ma le cose non sono affatto semplici ...

* La Meccanica Quantistica è una grande cosa, ma è inutile tirarla in ballo sempre, può essere pericoloso ("paradosso" di Iperione).

* Il problema determinismo/probabilità è interessante (e non banale) anche in ambito puramente classico.

La Meccanica Quantistica e il "paradosso" di Iperione

Usando la meccanica quantistica in modo acritico si ottiene che Iperione, una piccola luna di Saturno, di forma irregolare e dimensioni O(100) km, dovrebbe manifestare effetti quantistici (effetto tunnel etc) in tempi dell'ordine di 30- 50 anni!

Uno slalom (personale) tra caos e caso

DUE GRANDI FIGURE per **DUE GRANDI SCIENZE**
apparentemente opposte

H. POINCARÉ | – – – – – – – – | **MECCANICA CELESTE**:
un sistema con pochi corpi;
il desiderio è avere **moti regolari** e poter **predire** le posizioni dei corpi celesti nel futuro (calcolo delle effemeridi):

L. BOLTZMANN | – – – – – – | **MECCANICA STATISTICA**:
un sistema con molte particelle (gas, liquidi, solidi);
il desiderio è avere **moti irregolari** in modo da poter **usare la probabilità** per capire il comportamento termodinamico.

Il padre del caos: Henri POINCARÉ (1854 - 1912)

Il padre della meccanica statistica: Ludwig BOLTZMANN (1844- 1906)

Qualche tappa fondamentale della Meccanica Celeste

* **KEPLERO**(1608- 1619) trova le famose tre leggi
* **NEWTON**(1679- 1687) unifica la fisica terrestre e quella celeste: con le leggi della meccanica e la gravitazione universale spiega le leggi di Keplero e la precessione degli equinozi.

Anche i geni, a volte, prendono grossi granchi....

Stranamente **Newton** credeva che la stabilità del Sistema Solare non fosse una conseguenza delle (sue) leggi della meccanica e della (sua) gravitazione universale, ma che il Creatore dovesse di tanto in tanto sistemare l'orologio cosmico. Questa idea venne sbeffeggiata da **Leibniz**: *Che idea stupida quella di un essere divino che interviene sempre.... Secondo me un essere divino compie un' opera perfetta, crea l' universo in modo tale da non doverci tornare sopra, come un meccanismo che si autoregola. Questo Dio newtoniano, invece, è veramente un incompetente: crea un universo che di continuo si degrada e che richiede costantemente il suo intervento. Insomma, il mio Dio è un perfetto orologiaio.*

Due corpi interagenti gravitazionalmente

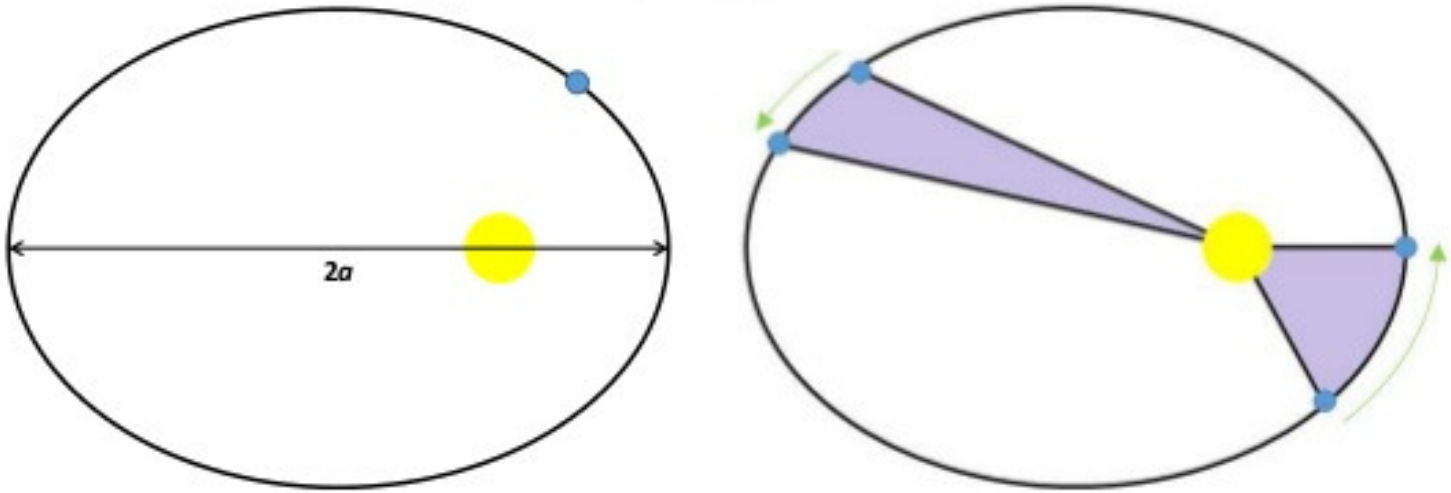
Tutto è chiaro (e semplice):

Un pianeta che interagisce (solo) con il Sole ha un moto regolare.

Kepler's laws of planetary motion

1. The orbit of a planet is an ellipse with the Sun at its focus.
2. The line segment joining a planet and the Sun sweeps out equal areas during equal intervals of time.
3. The square of the orbital period of a planet is proportional to the cube of the semi-major axis of its orbit.

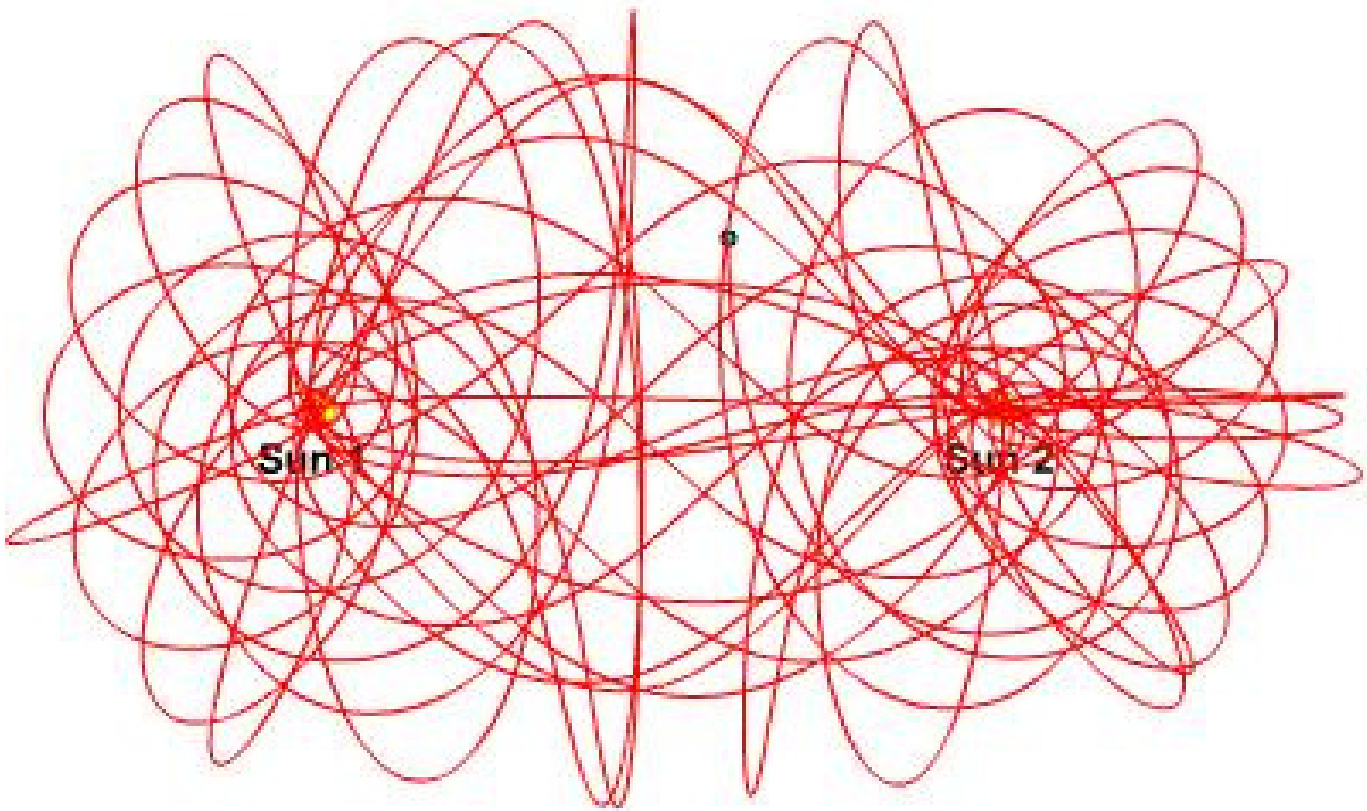
$$\tau^2 \propto a^3$$



Tre corpi interagenti gravitazionalmente

Una situazione decisamente più complicata (e difficile)

Il moto di un pianeta in un sistema binario (con due Soli)



Come Poincaré ottene la fama ma perse molti soldi

Il problema dei tre corpi (ad esempio Sole, Giove e Asteroide) ha resistito all'assalto dei massimi matematici del 18-mo secolo: Eulero, d'Alembert, Lagrange, Laplace, Cauchy e Jacobi hanno ottenuto solo qualche risultato parziale.

Nel 1887 il re di Svezia e Norvegia Oscar II indisse un premio, da consegnare nel 1889 in occasione del sessantesimo compleanno del sovrano, per un lavoro matematico sul problema dei tre corpi. Poincaré partecipò e vinse il premio, diventando una star internazionale. Da un punto di vista economico il premio costituì per lui un disastro; dopo che il suo lavoro era stato stampato Poincaré scoprì un errore (che riuscì a correggere), con un certo imbarazzo della commissione tutte le copie della rivista vennero ritirate e sostituite con quelle con la versione corretta, Poincaré sostenne le spese della ristampa che furono superiori al premio.

Caos deterministico

Poincaré non riuscì a risolvere il problema dei tre corpi, ma capì che le difficoltà non erano dovute alla scarsa bravura dei matematici che l'avevano preceduto, bensì ad un' importante proprietà intrinseca del sistema, quello che oggi chiamiamo **caos**.
Se pure accadesse che le leggi della natura non avessero più alcun segreto per noi, anche in questo caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente .... può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nei secondi. La previsione diventa impossibile e si ha un fenomeno fortuito.

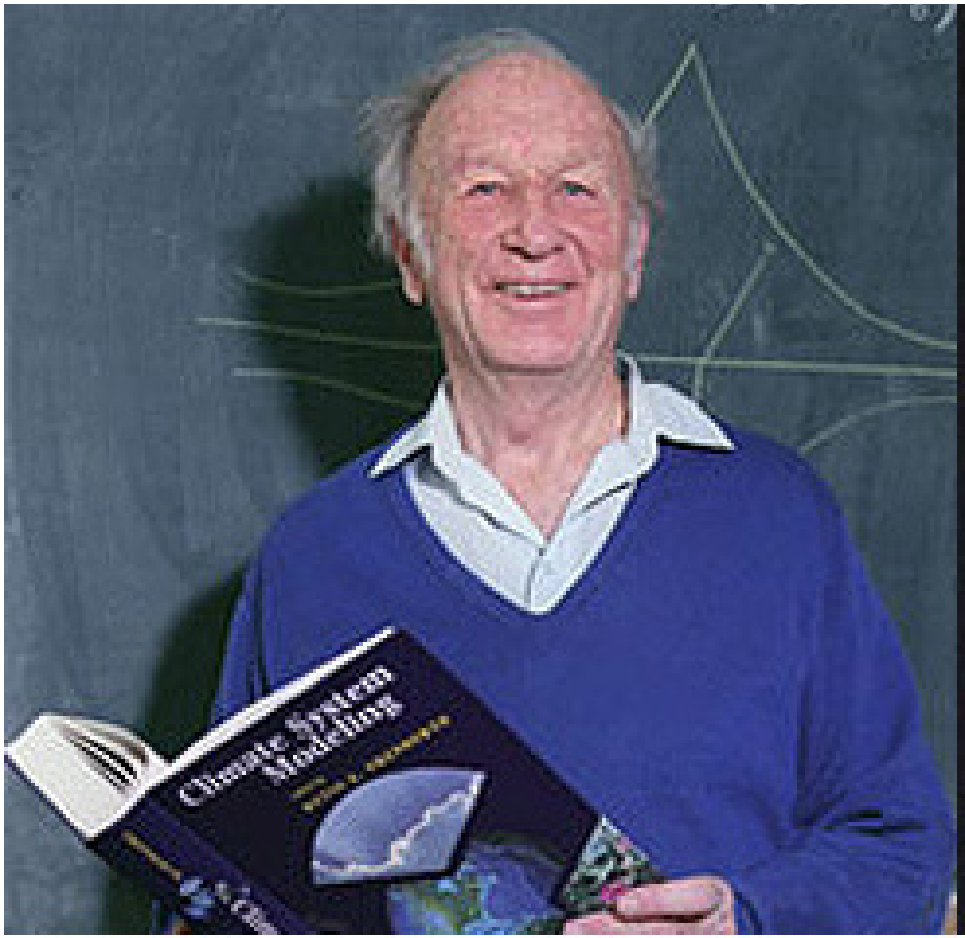
Ci sono sistemi deterministici che mostrano un' evoluzione temporale molto irregolare (come ci si aspetta nei processi stocastici).
Può esserci una forte dipendenza dalla condizione iniziale. Questo è l' effetto farfalla: una farfalla che batte le ali in Brasile può provocare un tornado in Texas dopo un paio di settimane.

Edward LORENZ (1917-2008) e il suo modello

Nel 1963 il meteorologo E. Lorenz, studiando un modello molto semplificato per la circolazione atmosferica, (ri)scoprì il caos.

Il famoso modello, apparentemente semplice, con solo 3 variabili

$dx/dt = -\sigma x + \sigma y$, $dy/dt = -xz + rx - y$, $dz/dt = -bz + xy$



Come è nato il famoso modello

Lorenz nel suo celebre lavoro del 1963 studiando il problema della convezione di un fluido riscaldato da basso, ottenne un sistema di 3 equazioni differenziali, che, nella sua apparente semplicità, evidenzia alcune caratteristiche fondamentali del problema originario.

* Si parte da un set di equazioni non lineare alle derivate parziali

$$\partial_t \psi(\mathbf{x}, t) = \mathcal{L}[\psi(\mathbf{x}, t), \nabla\psi(\mathbf{x}, t), \Delta\psi(\mathbf{x}, t)]$$

ove ψ un campo vettoriale che evolve con le equazioni della meccanica dei fluidi, $\psi = (\mathbf{u}, T)$, ove $\mathbf{u}$ e T denotano, rispettivamente, il campo di velocità e temperatura.

* Si approssima $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ nella forma

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{n<N} a_n(t)\phi_n(\mathbf{x})$$

ove $\{\phi_n\}$ sono opportune funzioni ortonormali e complete.

* Si ottiene un set di N equazioni differenziali per le $\{a_n\}$:

$$\frac{da_n}{dt} = F_n(a_1, a_2, .., a_N) \ , \ n = 1, 2, ..., N \, .$$

Se si vuole un buon accordo quantitativo allora N deve essere molto grande, in geofisica e in ingegneria N può raggiungere (e anche superare) $10^9 - 10^{10}$.

* Lorenz (che conosceva bene la matematica) usò il troncamento minimale: $N = 3$ la più piccola dimensione in cui si possono avere comportamenti non periodici.

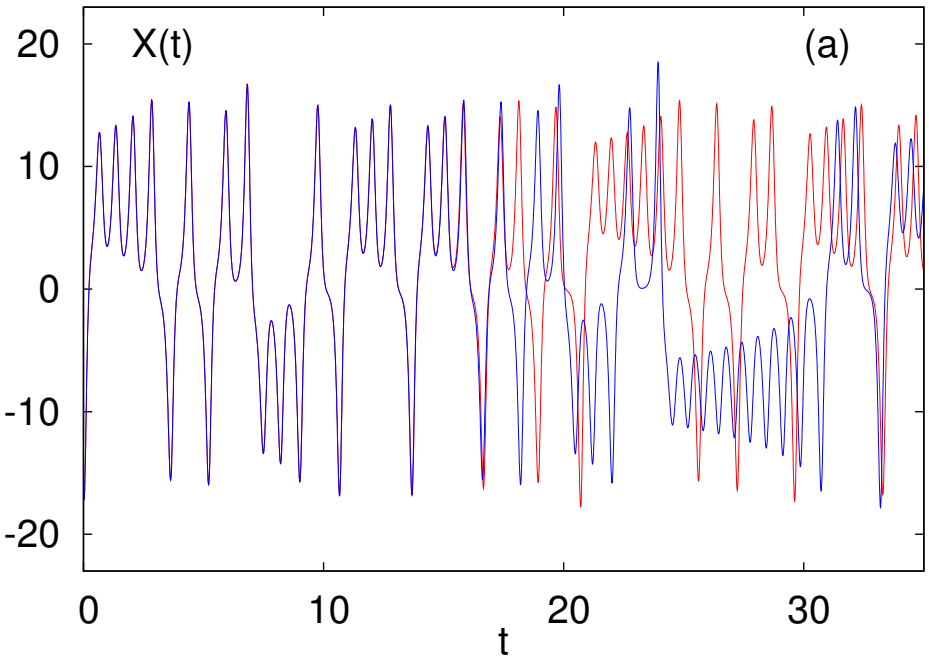
Ecco il modello, con la sua apparente innocenza:

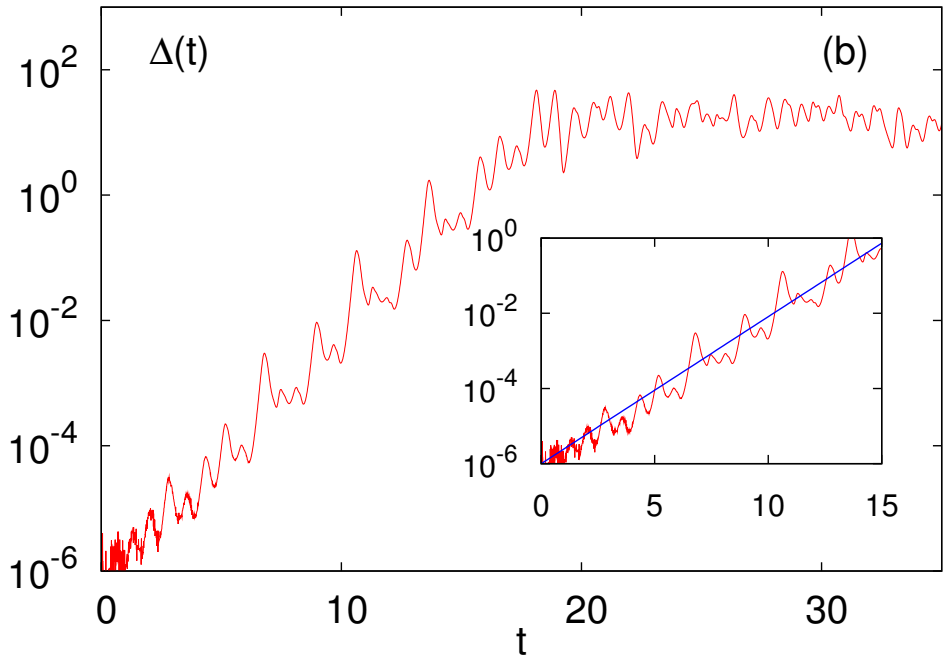
$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y \ , \ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \ , \ \frac{dz}{dt} = xy - bz \ ,$$

ove (x, y, z) sono proporzionali a (a_1, a_2, a_3), σ, b e r delle costanti relative alle proprietà del fluido, in particolare r è proporzionale al numero di Rayleigh.

Sensibile dipendenza dalle condizioni iniziali

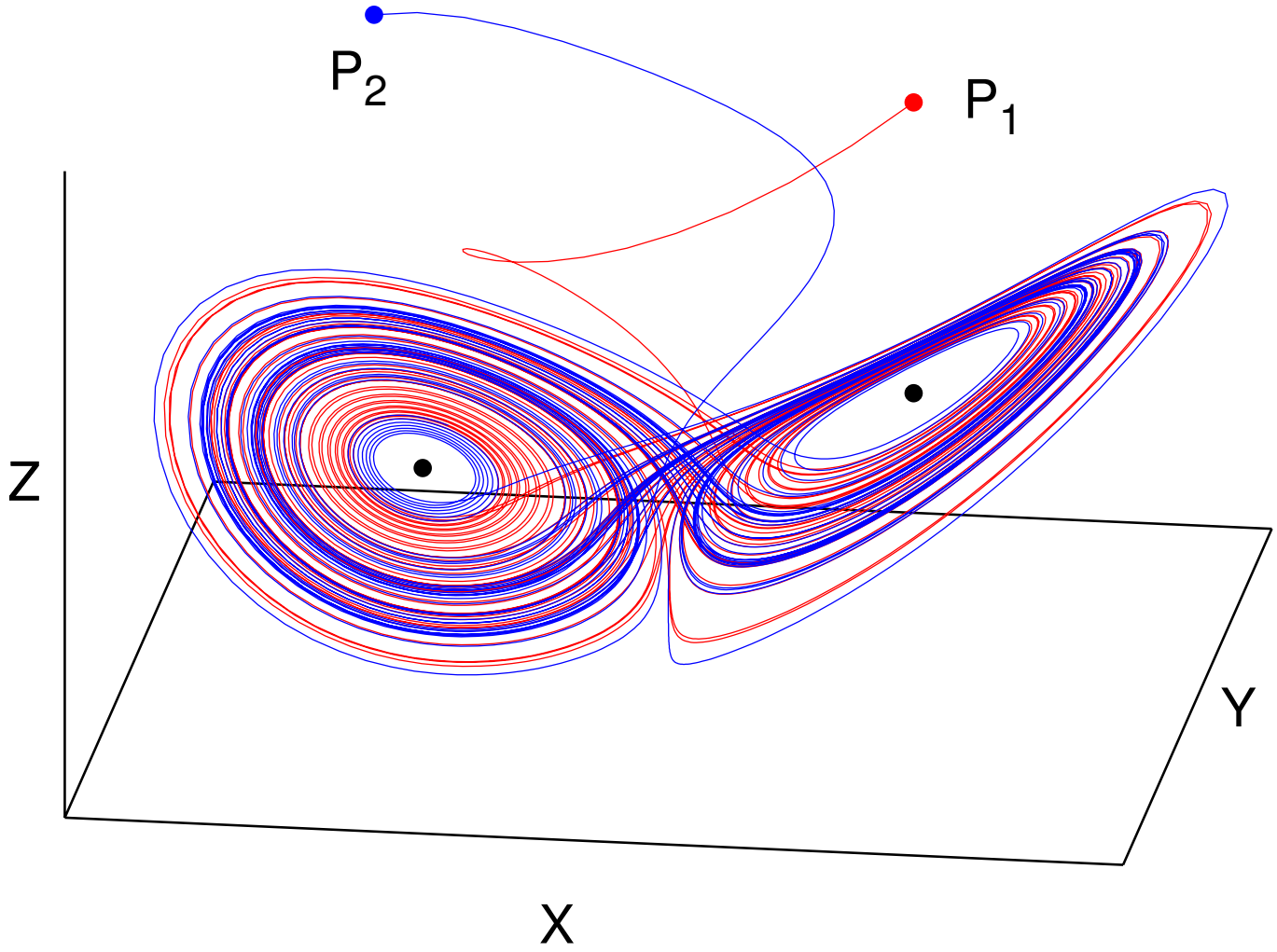
Due traiettorie con condizioni iniziali molto vicine si allontanano molto velocemente: non c'è speranza di fare previsioni meteo a tempi lunghi... (questo anche se il modello di Lorenz descrivesse esattamente l'atmosfera).





Il modello di Lorenz mostra chiaramente che

* Ci può essere "complessità" anche in un sistema con solo 3 variabili.
* Il determinismo non implica la possibiltà di fare previsioni accurate.



La comodità di essere LINEARI

Riprendiamo in esame la molla ideale (senza attrito)
$m\,d^2x/dt^2 = -kx$ e la sua soluzione

$$x(t) = x(0)cos(\omega t) + \frac{v(0)}{\omega} sin(\omega t) \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \, .$$

Un'incertezza sulle condizioni iniziali non sarebbe affatto drammatica: se invece di $x(0)$ e $v(0)$ si avesse $x'(0) = x(0) + \Delta_1$ e $v'(0) = v(0) + \Delta_2$ la differenza tra le due soluzioni sarebbe

$$x'(t) - x(t) = \Delta_1 cos(\omega t) + \frac{\Delta_2}{\omega} sin(\omega t) \, .$$

Quindi un piccolo errore iniziale rimane tale per sempre, questo è una conseguenza della LINEARITÀ delle equazioni.

L'importanza di essere NONLINEARI

Le equazioni differenziali lineari sono semplici:

- sono risolubili in modo esplicito con un protocollo ben chiaro;
- le soluzioni sono "semplici", tipo la molla ideale in cui si ha una periodicità nel tempo, o la molla con attrito in cui le oscillazioni sono smorzate;
- piccole incertezze iniziali rimangono piccole.

Ma c'è un problema: la linearità è rara....

Nei sistemi NON LINEARI la vita è dura:

- in genere NON sono risolubili in modo esplicito;
- le soluzioni possono essere "irregolari", ad esempio il problema dei tre corpi e il modello di Lorenz;
- ci può essere caos: piccole incertezze iniziali possono crescere esponenzialmente.

Un esercizio per casa: il caos in due parole

Consideriamo la seguente regola iterativa:

$$x_{t+1} = x_t^2 - 2 \ ,$$

è un sistema chiaramente deterministico, infatti dato x_0 si determina univocamente $x_1 = x_0^2 - 2$ e poi $x_2 = x_1^2 - 2 = x_0^4 - 4x_0^2 + 2$ e così via. Partendo da $x_0 = 0,5$ calcoliamo $x_1, x_2, ...$; ripetiamo la cosa con una condizioni iniziale leggermente diversa $x_0' = x_0 + 0,00001 = 0,50001$. Ci si potrebbe aspettare che, poiché x_0 e x_0' sono molto vicini, x_t ed x_t' saranno quasi uguali, è facile accertarsi che non è così:

Partendo da $x_0 = 0.5$	Partendo da $x_0' = 0,50001.$
$x_3 = -0,87109...$	$x_3' = -0,87116...$
$x_7 = 1,20023...$	$x_7' = 1,19918...$
$x_{12} = -0,35180...$	$x_{12}' = -0,30935...$
$x_{15} = 0,31690...$	$x_{15}' = 0,64501...$
$x_{18} = 0,58626...$	$x_{18}' = -1,740988..$

Le conseguenze del caos

Se il sistema è caotico un' incertezza inizialmente molto piccola cresce esponenzialmente nel tempo:

$$|\delta\mathbf{x}(t)| \sim e^{\lambda t}|\delta\mathbf{x}(0)| \ ,$$

ove λ è chiamato **esponente di Lyapunov**. Il sistema può essere predetto con una tolleranza Δ solo fino al tempo di predicibilità T_p che dipende (poco) dall'incertezza iniziale e dall' esponente di Lyapunov $\lambda > 0$

$$T_p \sim \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{\Delta}{|\delta\mathbf{x}(0)|}\right) \ .$$

Poiché la funzione logaritmo cresce molto lentamente
($\ln(5) = 1.609.., \ln(10) = 2.302.., \ln(20) = 2.995.., \ln(40) = 3.688..$)
il tempo di predicibilità è determinato sostanzialmente dall' esponente di Lyapunov e, poco, dallo sforzo (ed il costo) per determinare la condizioni iniziale con grande precisione (cioè diminuire $|\delta\mathbf{x}(0)|$).

Il caos non è una patologia matematica

* Il comportamento caotico non è un fatto eccezionale: lo si incontra un po' ovunque (ecologia, astronomia, geofisica, ottica etc);
* Il caos può essere presente anche in sistemi apparentemente innocenti (E. Lorenz, M. Hénon, B.V. Chirikov, ...).

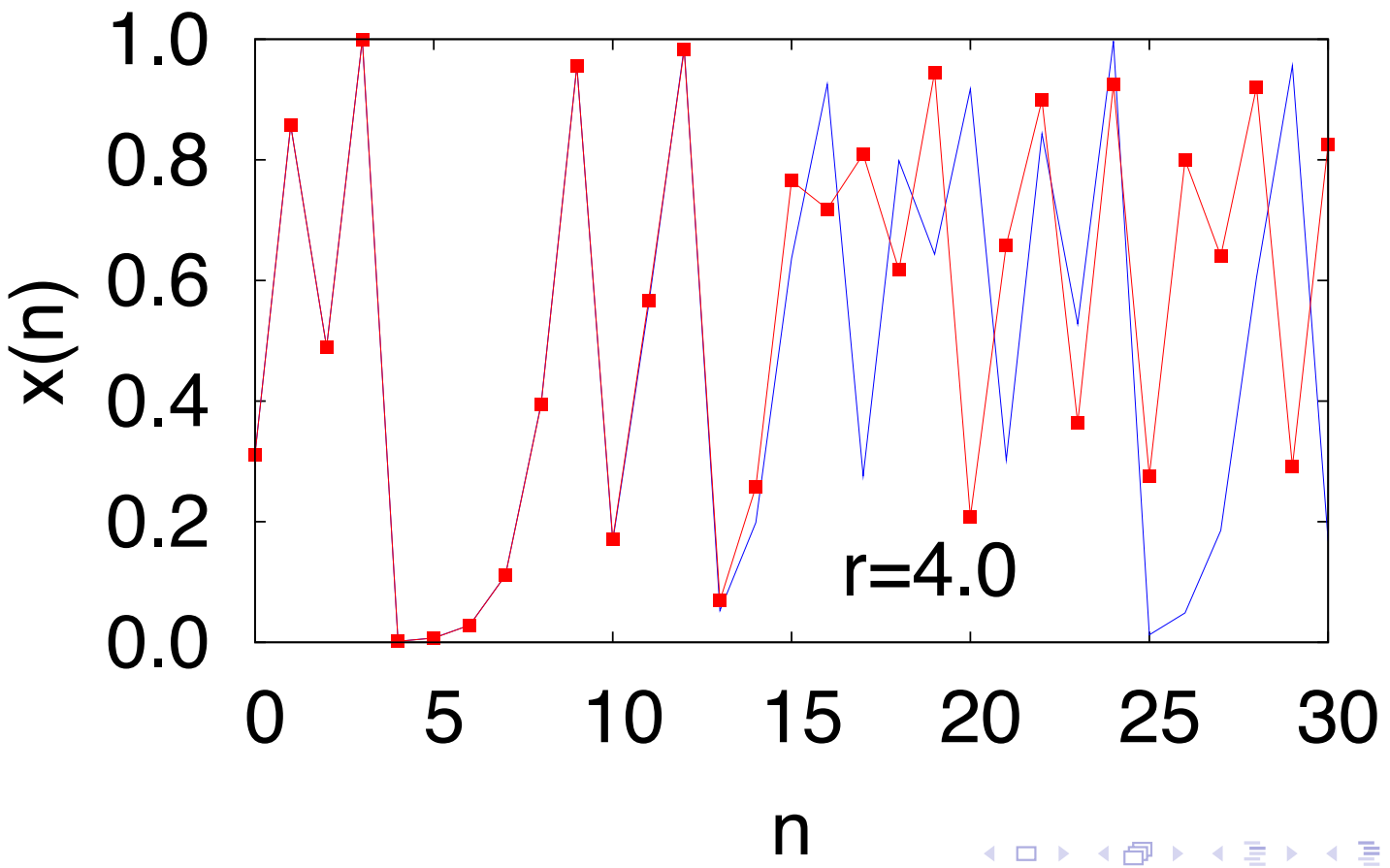
Ad esempio nella mappa logistica

$$x(n+1) = 4x(n)(1-x(n)) \ ,$$

questo è un modello (iper)semplificato, ma non banale, per la dinamica delle popolazioni, (notare la nonlinearità)
* L' andamento temporale $x(0), x(1), x(2), ...$ appare "erratico".
* Un piccolo errore raddoppia ad ogni passo, $\delta x(n) \sim 2\delta x(n-1)$; dopo pochi passi l'errore è enorme anche se $\delta x(0)$ è molto piccolo.

L' effetto farfalla nella mappa logistica

Due traiettorie con condizioni iniziali molto vicine $|x(0) - x'(0)| = 4 \times 10^{-6}$, dopo appena $16 - 17$ iterazioni le due traiettorie sono completamente diverse.



Gli astronomi sono più bravi dei meteorologi?

* Gli astronomi sono in grado di prevedere un'eclisse con migliaia di anni di anticipo.

* I meteorologi non sanno dire se pioverà a Roma tra un mese.

Prima di emettere sentenze di colpevolezza per i meteorologi è opportuno indagare riguardo le loro attenuanti:

* Nella dinamica atmosferica $1/\lambda \simeq 5 - 10$ giorni;
* nel sistema Solare $1/\lambda \simeq 5 - 10$ milioni di anni.

È inutile mettere gli astronomi a fare le previsioni meteo....

Probabilità in un mondo deterministico: non è un ossimoro

La domanda
* *cosa succede nel futuro se conosco* $\mathbf{x}(0)$*?*
è (in qualche modo) senza senso anche in ambito deterministico.

Il fatto che dagli stessi antecedenti seguano le stesse conseguenze è una dottrina metafisica.
[...] Ma non è molto utile nel mondo in cui viviamo, ove non si verificano mai gli stessi antecedenti e nulla accade identico a se stesso due volte.
[...] L' assioma della fisica che ha, in un certo senso, la stessa natura è "che da antecedenti simili seguono conseguenze simili".
(J. Clerk Maxwell)

La domanda "giusta" è:
* *cosa succede nel futuro se conosco* $\mathbf{x}(0)$ *con una data incertezza?*
Questo è un problema di probabilità.

Una breve parentesi tecnica

Se un sistema è caotico allora in qualche modo si comporta come un processo stocastico.
Immaginiamo di avere un'incertezza al tempo $t = 0$, questo corrisponde ad avere una densità di probabilità $p_0(\mathbf{x})$, ad esempio se la condizione iniziale $\mathbf{x}(0)$ è nota con precisione ϵ allora $p_0(\mathbf{x})$ è diversa da zero nella regione $|\mathbf{x} - \mathbf{x}(0)| < \epsilon$.
Esiste un'equazione che permette di determinare la densità di probabilità $p_t(\mathbf{x})$ al tempo t, proprio come nei processi stocastici.

Ad esempio per una mappa unidimensionale $x(t+1) = g(x(t))$ si ha:

$$p_{t+1}(x) = \sum_k \frac{p_t(y_k)}{|g'(y_k)|}$$

ove gli $\{y_k\}$ sono le preimmagine di x, cioè i valori per il quali $g(y_k) = x$, e g' indica la derivata.

Inoltre, sotto ipotesi abbastanza generali, accade che dopo un tempo sufficientemente lungo $p_t(\mathbf{x})$ tende ad una densità $p_\infty(\mathbf{x})$ indipendente dalla densità iniziale.

Ad esempio nel caso della mappa logistica si ha

$$\lim_{t\to\infty} p_t(x) = p_\infty(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \ .$$

Abbiamo quindi che la densità $p_\infty(\mathbf{x})$ è una proprietà intrinseca del sistema ed ha un carattere oggettivo.
I risultati sono indipendenti dalla grandezza dell' incertezza, per quanto piccola sia (purché non nulla), si ha sempre la stessa densità di probabilità asintotica.

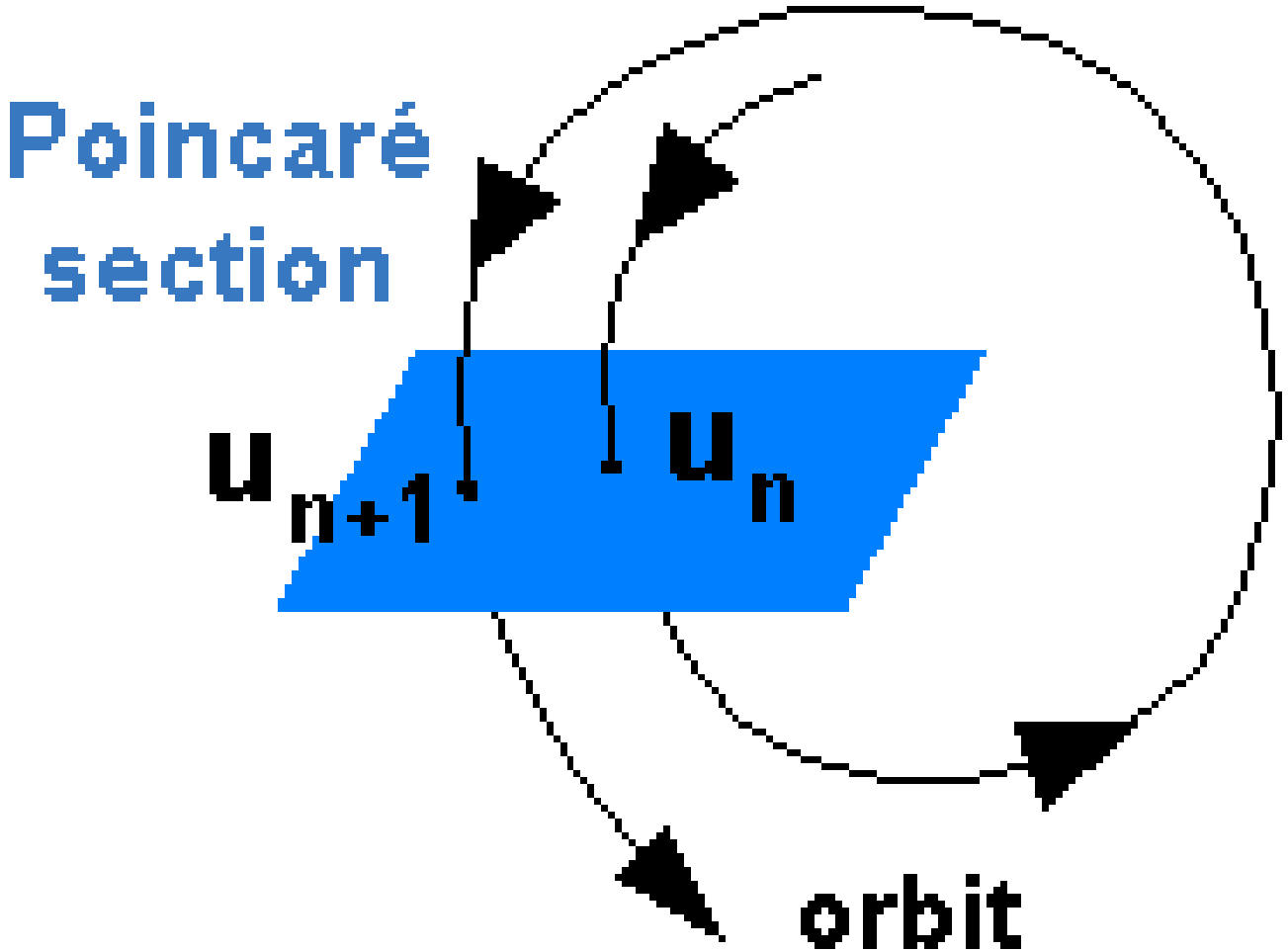
Andrei Nikolaevich KOLMOGOROV (1903- 1987)

Le cose sono quasi sempre più complicate di quello che inizialmente appaiono...

In presenza di caos, c'è sempre anche (un po' di) ordine $\rightarrow$

* i meccanici celesti, e i meteorologi, non si devono disperare
* i meccanici statistici non si devono illudere che le cose siano risolte

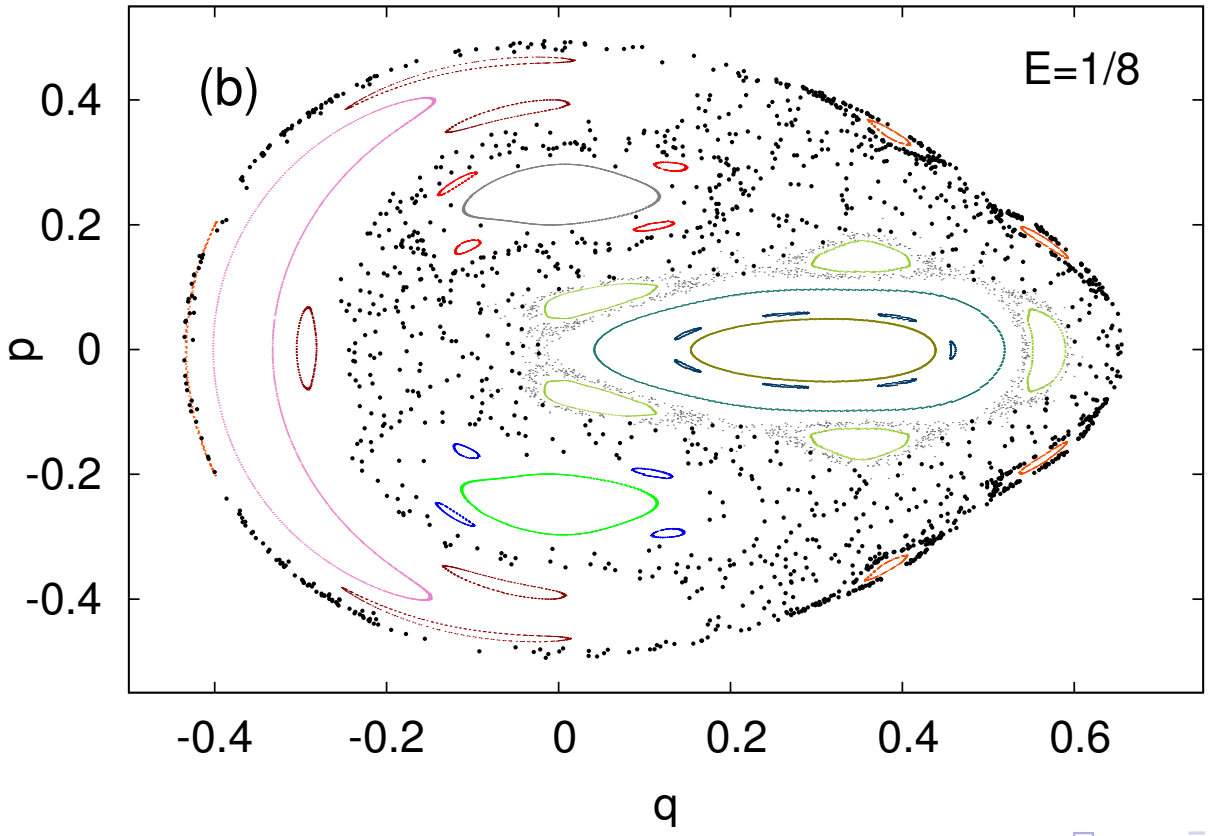
A volte c'è un modo per visualizzare il caos



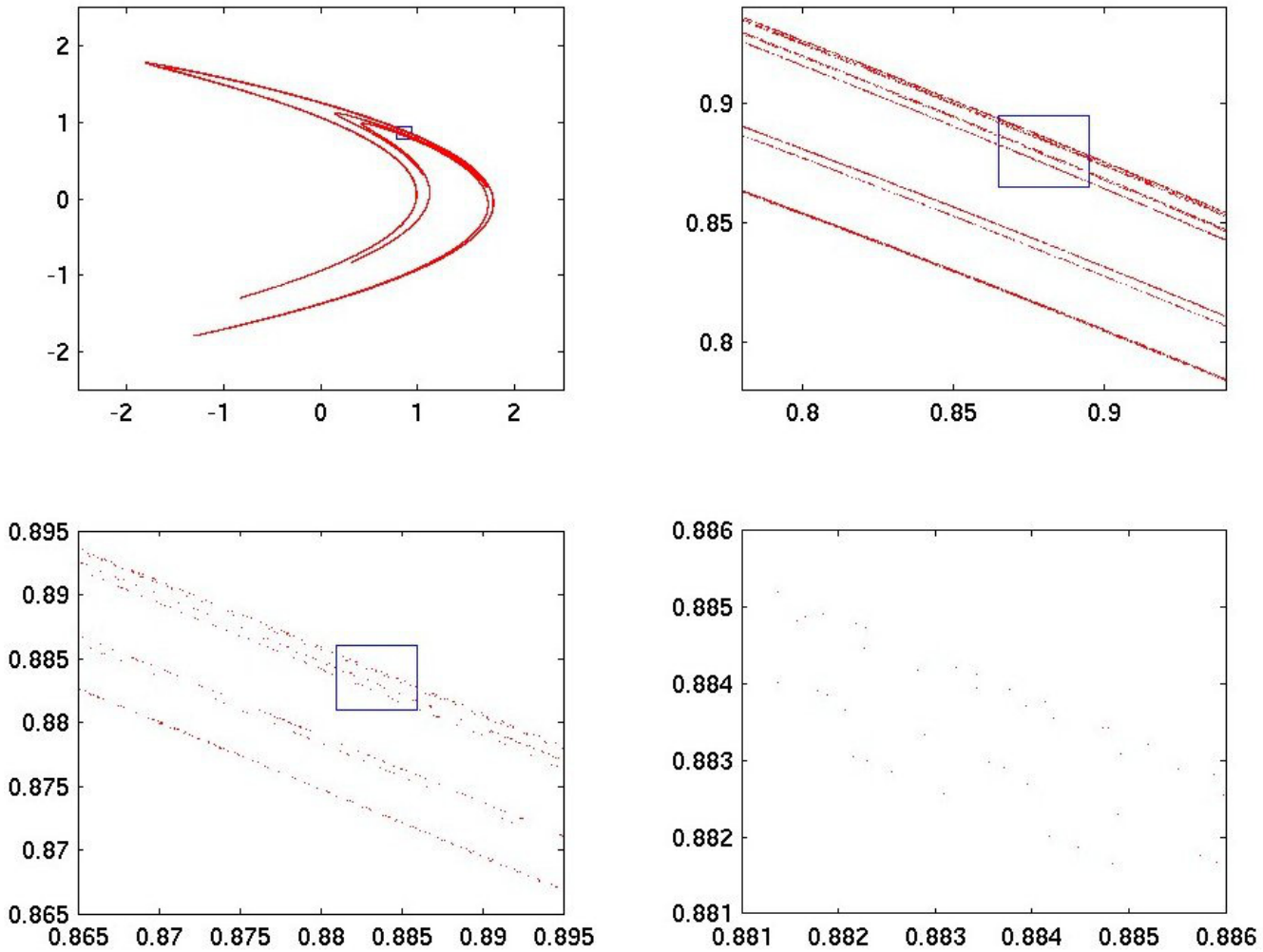
Coesistenza di caos e ordine

Sezione di Poincaré del moto di una stella in una galassia

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2) + \frac{1}{2}(p^2 + q^2) + Q^2 q - \frac{1}{3}q^3 \quad (\textit{modello di Hénon \& Heiles})$$



In una certa classe di sistemi caotici (quelli dissipativi), su tempi lunghi il moto avviene su un insieme "strano" un attrattore tipicamente un frattale.



L' attrattore della mappa di Hénon $x_{t+1} = 1 - 1.4x_t^2 + y_t$, $y_{t+1} = 0.3x_t$. ottenuto con una traiettoria molto lunga e alcuni ingrandimenti.

Osservazioni sparse

* Dopo la scoperta del caos è ormai chiaro che la validità dell'approccio statistico non è necessariamente limitata a sistemi con molti gradi di libertà.
* Si deve adottare un approccio statistico se il numero dei gradi di libertà coinvolti è molto grande, ma anche in presenza del caos deterministico, indipendentemente dal numero (anche piccolo) di variabili coinvolte.
* La possibilità di comportamenti caotici in sistemi apparentemente semplici pone dei problemi per la modellizzazione di una gran classe di fenomeni.
* I modelli caotici non sono attendibili per previsioni puntuali (se piove un certo giorno); tuttavia previsioni di tipo meno accurato (quanto piove in un mese) possono essere precise e questo (può sembrare paradossale) proprio per la presenza del caos.

Caos e problemi attuali

Caos ed Economia

Per molto tempo la formulazione matematica dell'economia è stata basata sull' assunzione di comportamenti regolari, ad esempio periodici, e la convinzione di poterli controllare modificando i parametri di controllo, cioè agendo sui tassi di interesse, svalutazione, tasse etc.
Sostanzialmente è la stessa idea di von Neumann che credeva di poter controllare l'atmosfera.

L'economia e la finanza non mostrano affatto andamenti regolari, i politici (e i loro consulenti strapagati) non sono in grado di controllare molto.
Ora anche gli economisti si interessano di modelli caotici ed alcuni risultati sembrano mettere in discussione alcuni dei paradigmi classici.

Poincaré sui Big Data

"Science is built up of facts, as a house is with stones. But a collection of facts is no more a science than a heap of stones is a house."

Henri Poincare

Il caos e il sogno (duro a morire) di una scienza solo induttiva

Nonostante Poincaré abbia chiaramente stigmatizzato gli eccessi di un empirismo ingenuo: attualmente esiste una nefasta corrente di pensiero che vede come unico ingrediente rilevante nella scienza i dati:
visto che siamo nell'era dei dati in abbondanza si può fare a meno delle teorie, basta usare i dati (parole del guru informatico C. Anderson).
Gli oltranzisti dei **Big Data** credono che usando la grande quantità di dati a disposizione e una rete di computer, si possa capire, su base puramente empirica, il comportamento di un qualunque fenomeno.

Tutto ciò è solo una favola per ingenui: la teoria ergodica (lemma di Kac) mostra che se il sistema è descritto da un numero (relativamente) alto di variabili, diciamo più di 5 o 6, allora inevitabilmente, nei problemi di previsione, i metodi basati solo sullo studio delle serie storiche sono destinati al fallimento.

Cosa ci insegna il caos?

Un tentativo di sommario

* Uno degli aspetti più importanti della Scienza è capire cosa si può fare e cosa no.
* Anche sistemi che sembrano "innocenti" possono riservare sorprese. Un comportamento "complesso" può essere generato da un sistema (apparentemente) semplice.
* La vecchia diatriba determinismo/probabilità non potrà essere decisa su basi empiriche: Albert Einstein e Niels Bohr ne hanno discusso per decine di anni, ora con il caos deterministico è chiaro che non esiste una risposta conclusiva.

Due Perle di Saggezza

- *Sapere che sai quando sai, e che non sai quando non sai, questa è la vera conoscenza* (**Confucio**).
- *Fare previsioni è difficile, specialmente del futuro* (**Mark Twain**).

Qualche Referenza

* C. Anderson *The End of Theory: The Data Deluge Makes the Scientific Method Obsolete* http://www.wired.com/2008/06/pb-theory/
* D. Aubin and A.D. Dalmedico *Writing the History of Dynamical Systems and Chaos: Longue Durée and Revolution, Disciplines and Cultures* Historia Mathematica **29**, 273 (2002)
* G. Boffetta e A. Vulpiani *Probabilità in Fisica* (Springer Italia, 2012)
* M. Cencini, F. Cecconi and A.Vulpiani *Chaos: From Simple Models to Complex Systems* (World Scientific Singapore 2009) .
* S. Chibbaro, L. Rondoni and A. Vulpiani *Reductionism, Emergence and Levels of Reality* (Springer–Verlag, 2014)
* G. Contopoulos *Order and chaos in dynamical astronomy* (Springer-Verlag, 2010)
* I. Ekeland *Come funziona il caos* (Bollati Boringhieri, 2010)
* L.Gammaitoni e A.Vulpiani *Perché è difficile prevedere il futuro* (Dedalo, 2019; Le Scienze 2021)
* A. Guerraggio 15 *grandi idee matematiche* (Bruno Mondadori, 2013)

* H. Hosni and A. Vulpiani *Forecasting in the light of Big Data*, Philosophy and Technology, https://doi.org/10.1007/s13347-017- 0265-3 (2017)
* M. Kac *Gli enigmi del caso* (Bollati Boringhieri, 1996)
* E.N Lorenz *Deterministic nonperiodic flows* J. Atmos. Sci. **20**, 130 (1963)
* E.N. Lorenz *Atmospheric predictability as revealed by naturally occurring analogues* J. Atmos. Sci. **26**, 636 (1969)
* P. Lynch *The Emergence of Numerical Weather Prediction: Richardson's Dream* (Cambridge University Press, 2006)
* E. Noël (Editore) *Aggiornamenti sull'idea di "caso"* (Bollati Boringhieri, 1992)
* H. Poincaré *Geometria e caso* (Bollati Boringhieri, 1995)
* K. Pomian (Editore) *Sul determinismo* (Il Saggiatore, 1991)
* D. Ruelle *Caso e caos* (Bollati Boringhieri, 1992)
* A. Vulpiani *Determinismo e caos* (Nuova Italia Scientifica 1994; Carocci 2004)
* A. Vulpiani *Caso, probabilità e complessità* (Ediesse, 2014; Corriere della Sera 2018)